

UM ESTUDO SOBRE A HABILIDADE MATEMÁTICA NA SOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE GEOMETRIA

AN STUDY ABOUT MATHEMATICAL ABILITY IN GEOMETRY PROBLEM SOLVING

Viviane Rezi Dobarro

Centro Universitário Padre Anchieta/ Curso de Matemática, viviane@mxb.com.br

Márcia Regina Ferreira de Brito

Universidade Estadual de Campinas/ Faculdade de Educação, mbrito@unicamp.br

Resumo

Este estudo teve por objetivo contribuir para o desenvolvimento da compreensão sobre alguns componentes da habilidade matemática intrínsecos às atividades que envolviam conceitos geométricos, através da abordagem de solução de problemas, procurando investigar quais as relações existentes entre o nível de desenvolvimento do pensamento em geometria e a habilidade para conceitos espaciais. Para isso, foram sujeitos da pesquisa 201 alunos concluintes do ensino médio de duas escolas, uma pública e outra particular, submetidos a quatro instrumentos do tipo lápis e papel. Foi identificada uma relação linear moderada entre esses constructos, ou seja, alunos com maior nível de desenvolvimento do pensamento em geometria eram também mais habilidosos na solução de problemas que necessitassem de conceitos espaciais.

Palavras-chave: Geometria, Educação Matemática, Habilidades Matemáticas.

Abstract

The main objective of this investigation was to isolate some mathematics abilities components that appear in activities involving geometric concepts, during problems solving situation. The relations between geometric thinking development level and the presence of spatial concepts, were investigated. Subjects were 201 High school students from private and public schools. Instruments were four test and students were submitted to their at class period. A linear moderate relation was identified among theses constructs.

Keywords: Geometry, Mathematical Education, Mathematical Abilities.

Introdução

Dentre as atividades tratadas na escola, incluem-se as atividades matemáticas. Os profissionais ligados ao ensino dessa disciplina têm buscado práticas mais adequadas e possíveis de serem desenvolvidas no contexto das diferentes instituições de ensino.

Nesse sentido, a Psicologia da Educação Matemática surgiu com o objetivo de identificar os mecanismos do pensamento em situações que envolvem a Matemática, buscando compreender como esses conceitos são adquiridos. Segundo Resnick e Ford (1990), procura-se conhecer que porção da experiência e do intelecto torna possível a chamada capacidade matemática.

Em relação à estrutura do conteúdo, a Geometria apresentou, por um longo período, uma estrutura baseada no enfoque euclidiano. Segundo Nasser (1992), esse enfoque foi adotado pelos autores dos livros didáticos fazendo com que os alunos e professores sentissem mais dificuldades nessa área que em outras da Matemática. Além disso, muitos desses livros eram altamente teóricos, o número de aulas dedicadas à Geometria era baixo, além de a Geometria ser formalmente ensinada apenas no final do ensino fundamental (7^a e 8^a séries). Nasser (1996) apontou também a ausência, no ensino, de manipulação de materiais e de dispositivos que ressaltam o aspecto dinâmico da Geometria, tais como computadores e vídeos. Apontou, do mesmo modo, a ausência de trabalho de desenho geométrico com construções que exijam o uso de régua e compasso, pois isso poderia auxiliar a compreensão de muitos conceitos de Geometria, como por exemplo, os atributos definidores das propriedades das figuras geométricas.

Segundo Shaw, Thomas, Hoffman e Bulgren (1995), os estudantes que compreendiam os conceitos geométricos estavam mais preparados para generalizar e transferir seu conhecimento na solução de problemas de matemática, que os estudantes que apenas memorizavam suas definições. Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais, redigidos pela Secretaria de Educação Fundamental (1997), aparentemente baseados na teoria da aprendizagem significativa de Ausubel (1980), é necessário reverter o ensino centrado em procedimentos mecânicos, desprovidos de significado. Tal concepção pede a formação significativa de conceitos, que pressupõe que o professor considere o ambiente do aluno, suas aspirações, seu estágio de desenvolvimento biológico, psicológico e intelectual (SÃO PAULO, 1986).

O ensino dos conceitos geométricos tem por objetivo interferir na formação de capacidades intelectuais, na estruturação do pensamento e no desenvolvimento do raciocínio dedutivo do estudante. O indivíduo que domina o conhecimento geométrico é capaz de estabelecer relações e domina “as maneiras como os conceitos e relações são utilizadas, ou seja, os procedimentos aprendidos, entre eles as destrezas em geometria, como desenhar, planificar, usar nomes corretos, visualizar transformações em figuras, generalizar os conceitos para outros tópicos da Matemática e para situações do dia-a-dia” (VIANNA, 2005, p. 6).

Segundo Van Hiele (1986), a experiência é fator fundamental para o desenvolvimento de um nível de pensamento, incluindo o geométrico, para outro mais elevado. Van Hiele (1986) desenvolveu sua teoria baseando-se na Teoria Piagetiana e no conceito de insight da Teoria da Gestalt. É necessário destacar algumas distinções importantes entre a teoria de Van Hiele e a Teoria de Piaget: (1) Van Hiele propôs um modelo teórico de aprendizagem, diferente de Piaget escreveu uma teoria sobre o desenvolvimento da criança; (2) Van Hiele definiu um número de níveis maior que Piaget; (3) Van Hiele tratou a linguagem como de suma importância para a passagem de um nível a outro, descrevendo também a importância da linguagem utilizada pelo professor em sala de aula para que fosse compreendido pelos alunos; (4) Van Hiele não concordava

com Piaget quando este definiu que o homem se desenvolve em direção a alguns conceitos teóricos universais. No modelo de desenvolvimento do pensamento em geometria os conceitos são dinâmicos e o processo de aprendizagem é influenciado pelas pessoas daquele período; e (5) Piaget acreditava que uma criança já nascia com essas estruturas e tinha apenas que desenvolvê-las, mas para Van Hiele o aluno precisa de determinadas atividades que propiciem a aprendizagem. Além disso, dois fatores — experiência e conhecimento — são responsáveis pela formação dos constructos mentais dos indivíduos.

Nesse contexto, um dos componentes das habilidades matemáticas é a habilidade para conceitos espaciais, onde, segundo Krutetskii (1976), um indivíduo considerado capaz soluciona mentalmente um problema, sem o apoio de desenhos ou objetos apropriados, tanto de figuras geométricas em duas, como em três dimensões. A necessidade de ajuda através de um esboço seria um indicativo de que o sujeito possuiria uma fraca habilidade para conceitos espaciais, com relação a figuras geométricas em duas e três dimensões.

Com base nesses aspectos, presentes no ensino e aprendizagem de geometria, foi formulado o seguinte problema de pesquisa: **Existem relações entre o desempenho em provas que avaliam o nível de desenvolvimento do pensamento em Geometria, a habilidade para conceitos espaciais e o raciocínio espacial?**

Grande parte do presente trabalho foi fundamentada nos pressupostos de Van Hiele (1986), que estudou a maturidade do pensamento de estudantes em Geometria, tendo sugerido que esses alunos progrediam através de uma seqüência hierárquica dos níveis de compreensão, enquanto aprendiam Geometria.

O referencial teórico sobre habilidades baseia-se na teoria de Krutetskii (1976), psicólogo russo que estudou as diferenças na habilidade matemática de indivíduos, definidos por ele como muito capazes, capazes, médios e pouco capazes em Matemática.

Nesse sentido, o presente trabalho justifica-se pela comparação entre dois modelos teóricos: um que descreve o desenvolvimento do pensamento geométrico e outro que trata de habilidades matemáticas. Em outras palavras, identificar quanto de conhecimento estava relacionado a uma habilidade específica neste contexto.

O Modelo Van Hiele de Desenvolvimento do Pensamento em Geometria

Van Hiele (1986) propôs que o desenvolvimento do pensamento em Geometria fosse dividido em níveis. Para compô-los, ele baseou-se na Psicologia Piagetiana, estabelecendo algumas diferenças, sendo as mais importantes: Van Hiele compôs um modelo teórico de aprendizagem, enquanto que os estudos psicológicos de Piaget tinham por objetivo compreender o desenvolvimento; e Piaget acreditava que uma criança já nascia com estruturas e tinha apenas que desenvolvê-las. Para Van Hiele, um nível mais elevado é atingido à medida que as regras do nível precedente tornam-se explícitas, a fim de se obterem novas estruturas.

Outro fator muito importante é a maturação do sujeito durante o processo de ensino: “É evidente que o alcance de um nível é resultado de um processo de aprendizagem. (...) De qualquer modo, seria um deplorável erro supor que um nível é

alcançado como resultado de uma maturação biológica que o professor ajuda a influenciar” (VAN HIELE, 1986, p. 65).

Van Hiele, em 1955, descreveu cinco níveis que iam de zero a quatro, mas posteriormente, os níveis foram numerados de um a cinco, com uma maior ênfase no que ele descreveu como o nível visual ou nível um. Ele percebeu que as ações, no patamar do pensamento visual, são de extrema importância para o desenvolvimento do pensamento. Para descrever esse processo, o modelo foi dividido em cinco níveis de compreensão:

1. Nível visual, onde as figuras ou objetos geométricos são reconhecidos por sua aparência física, em sua totalidade, e não pelas suas partes ou propriedades.
2. Nível descritivo, onde as figuras podem ser identificadas por suas propriedades.
3. Nível teórico, cujas relações entre as propriedades e entre as figuras já podem ser estabelecidas.
4. Lógica formal, onde há um domínio do processo dedutivo e de demonstrações como um modo de estabelecer relações geométricas.
5. Leis lógicas, com estabelecimento de teoremas em diversos sistemas, inclusive não euclidianos.

A Teoria de Krutetskii a respeito das Habilidades Matemáticas

Krutetskii (1976) discutiu se as habilidades seriam inatas ou adquiridas. Essa teoria diferenciou-se das demais teorias soviéticas sobre a crença de que fatores sociais seriam decisivos no desenvolvimento das habilidades, e que se opunham à idéia de “habilidade inata”. Krutetskii (1976) aceitou os fatores hereditários e as diferenças individuais, acreditando que “se cada um possuísse o mesmo potencial para o desenvolvimento em todas as direções e para a realização de qualquer atividade, não teria sentido algum discutir habilidades” (p. 3).

Este autor definiu habilidade como sendo “as qualidades internas de uma pessoa que permitem a realização de uma atividade definida” (KRUTETSKII, 1976, p. 74-75), e a habilidade para aprender Matemática como:

Característica psicológica individual (primeiramente características da atividade mental) que respondem aos requerimentos da atividade matemática escolar e que influencia, sendo todas as outras condições equivalentes, o sucesso no domínio criativo da Matemática como um assunto escolar – em particular, uma relativa rapidez, facilidade e domínio profundo do conhecimento, destrezas e hábitos em Matemática (KRUTETSKII, 1976, p. 75).

E para a solução de um determinado problema matemático é necessário um conjunto de habilidades. Assim, por exemplo, a presença isolada de uma habilidade verbal não é garantia de sucesso na solução de um problema matemático de enunciado verbal, sendo também necessários alguns componentes matemáticos (BRITO, FINI e GARCIA, 1994). Além disso, as habilidades também não são os únicos fatores necessários para um bom desempenho em uma determinada atividade. A essa característica deu-se o nome de prontidão, conjunto de condições psíquicas que permitem

essa execução com sucesso, que são, em conjunto com as habilidades, a atitude positiva com relação à atividade, traços da personalidade, estado mental, conhecimentos, destrezas e hábitos. Estes três últimos podem ser adquiridos, ao passo que as habilidades são desenvolvidas. Enquanto estas são desenvolvidas, esses três fatores são adquiridos com maior facilidade. Ainda segundo Krutetskii (1976), a habilidade seria um traço pessoal, enquanto que os hábitos e as destrezas são características da atividade.

As relações entre habilidade, instrução e desempenho têm sido foco de discussão em outras teorias. Carroll (1983) definiu uma habilidade cognitiva como “uma ou mais características não-efêmeras de um indivíduo que determina o nível do desempenho do indivíduo em uma prova cognitiva” (CARROLL, 1983, p. 4), sendo que essa prova “cognitiva” permite avaliar o processamento de informação, buscada na memória e/ou derivada de experiências prévias.

Um dos componentes das habilidades matemáticas é a habilidade para conceitos espaciais, onde, segundo Krutetskii (1976), um indivíduo considerado capaz soluciona mentalmente um problema, sem o apoio de desenhos ou objetos apropriados, tanto de figuras geométricas em duas como em três dimensões. Contudo, um indivíduo hábil em “ver” formas espaciais não terá garantido seu desenvolvimento geométrico, se a isso não for aliada a habilidade de raciocínio lógico. Assim, de acordo com Hoffer (1981), um bom curso de Geometria precisaria fornecer experiências adequadas para desenvolver os dois lados do cérebro, pois um lado tem funções mais analíticas e lógicas e o outro, mais funções espaciais e holísticas. O balanço entre habilidade espacial e lógica é geralmente um aspecto importante para o desempenho em atividades geométricas.

Solução de Problemas

Na Psicologia Cognitiva a solução de problemas é um conjunto de processos mentais internos mais elevados, com o objetivo de compreender a natureza da inteligência humana (ANDERSON, 1995), ou seja, como as pessoas captam, armazenam, transmitem e manipulam informações (GARDNER, 1996). Para Sternberg (1992, p. 50) “a solução de problemas é uma habilidade cognitiva complexa que caracteriza uma das atividades humanas mais inteligentes”.

Krutetskii (1976), ao desenvolver sua teoria a respeito das habilidades matemáticas, estruturou a solução de problemas em três etapas: obtenção da informação matemática, processamento da informação matemática e retenção da informação matemática.

Uma situação é considerada um problema quando se refere a “uma situação que um indivíduo ou um grupo quer ou precisa resolver e para a qual não dispõe de um caminho rápido e direto que o leve à solução” (LESTER, 1983, citado por ECHEVERRÍA e POZO, 1988, p. 15). Em outras palavras, está caracterizado um problema quando a resposta não pode ser rapidamente recuperada da memória (STERNBERG, 2000).

Embora exista discordância entre os diferentes autores a respeito da definição de “solução de problemas”, existe concordância sobre um problema ser uma situação inicial quase sempre desconhecida que é o ponto de partida. É o contato do sujeito com essa situação inicial

desconhecida que permite a ele disponibilizar, na estrutura cognitiva, os elementos necessários à solução (BRITO, 2005, p. 17).

Segundo essa concepção, o sucesso na solução de um problema depende de certos passos que devem ser seguidos e que seriam praticamente invariantes. Além da disposição para a solução, os planos, metas e submetas que o aluno estabelece em busca da solução são importantes para a obtenção da solução correta. E mais, as habilidades gerais individuais são importantes no sentido de proporcionar uma aplicação adequada desses processos, podendo ser motivadas por diferenças na aprendizagem.

Segundo Echeverría (1998), a Matemática é uma das disciplinas escolares que mais requerem o uso de solução de problemas e a aplicação desse método em sala de aula é indiscutível, pois desenvolve os processos mentais internos mais elevados. A relação entre as habilidades e os conteúdos matemáticos acontece no sentido de que “uma pessoa que tem sucesso no campo da Matemática é uma pessoa que sabe raciocinar e pensar de maneira adequada. E, no sentido inverso, uma pessoa que sabe raciocinar aprenderá facilmente o conhecimento matemático” (ECHEVERRÍA, 1998, p. 44), e isso implica no desenvolvimento da capacidade geral de raciocínio do indivíduo. Esse autor destacou ainda o papel extremamente importante do professor, pois é ele quem irá auxiliar o desenvolvimento, nos alunos, de estratégias e habilidades que resultem em uma aprendizagem significativa.

Ainda, de acordo com Luengo (2005), a solução de problemas de geometria é principalmente um processo dialético devido à interação entre o contexto gráfico e o contexto linguístico.

A Representação Mental

A Psicologia tem estudado os fatores que permeiam os fenômenos visuais, mais profundamente em alguns períodos e menos em outros. O filósofo grego Aristóteles (384-322 a.C.) afirmava que o pensamento era impossível sem imagens. Já o psicólogo Wundt, na Alemanha durante a segunda metade do século XIX, realizou experiências utilizando o método de introspecção, que possibilitou perceber a existência de alguns pensamentos sem imagens, ou seja, elas não seriam a única espécie de representação interna utilizada, porque as imagens mentais poderiam ser eliminadas se o material fosse muito familiar ou se a informação verbal fosse bem adquirida anteriormente (KÖHLER, 1980).

Com o surgimento do behaviorismo, o estudo sobre imagens e representações foi deixado de lado, já que essa concepção não tinha por meta o estudo de eventos internos, como o pensamento. A frequência desses estudos só aumentou novamente na década de setenta.

Imagem mental é uma das formas de representação pela qual “criamos estruturas mentais que representam coisas que, presentemente, não estão sendo percebidas pelos órgãos sensoriais” (STERNBERG, 2000, p. 180). Este autor dividiu a representação mental em dois sistemas, um composto de atributos não-espaciais (cor, forma, etc) e outro composto por atributos espaciais (localização, orientação, tamanho, distância, etc). Segundo Kosslyn (1992), a imagem mental refere-se à possibilidade de criação mental com representações de objetos, pessoas e situações, mesmo na ausência do estímulo

visual apropriado. As imagens mentais armazenam informações diferentemente do modo verbal, pois possibilitam a manipulação de objetos de modo muito parecido com os próprios, economizando tempo e esforço. Sternberg (2000) afirmou que a imaginação visual — representação mental do conhecimento visual — é uma das formas de imaginação mental mais estudada pelos psicólogos cognitivos.

Já se sabe que a capacidade de utilizar imagens mentais não é uma capacidade isolada, ou seja, refere-se a um conjunto de capacidades como a capacidade para fazer rotações mentais de figuras, a capacidade para inspecioná-las e a capacidade para manter na mente muitas partes de uma imagem. Isso implica no fato de uma pessoa poder ser mais capaz em um ou mais desses componentes e fraca em outros (KOSSLYN, 1992).

Lean e Clements (1981) afirmaram que os sujeitos que possuem habilidades espaciais pouco desenvolvidas apresentam dificuldades em atividades geométricas que exigem translações, reflexões, rotações, dilatações e expansões. Gorgorió (1998) definiu habilidade para o processamento espacial como necessária para completar a combinação de operações mentais para imaginar objetos espaciais, relações e transformações e decodificá-las visualmente.

Essa é uma área de estudo da Psicologia que apresenta um número grande de definições para um mesmo constructo, sendo todas elas muito parecidas, exigindo o estabelecimento de relações entre os vários conceitos que compõem essa habilidade.

Objetivos, Sujeitos, Materiais e Método

Trata-se de uma pesquisa básica, exploratória e descritiva. Seus objetivos específicos foram:

1. Descrever e comparar, de acordo com o tipo de escola, o desempenho dos sujeitos concluintes do ensino médio, em uma prova que buscava avaliar o conhecimento geométrico de figuras no plano;
2. Comparar, de acordo com o gênero, o desempenho dos sujeitos em provas e testes que avaliam o desenvolvimento do pensamento em Geometria, a habilidade para conceitos espaciais e o raciocínio espacial;
3. Identificar as relações entre o desempenho em provas que avaliam o nível de desenvolvimento do pensamento em Geometria, segundo a concepção de Van Hiele (1986), e a habilidade para conceitos espaciais, definidos como componentes das habilidades matemáticas por Krutetskii (1976).

As escolas participantes do estudo foram escolhidas por conveniência¹, sendo uma escola particular e uma escola da rede de ensino público do Estado de São Paulo, ambas localizadas na cidade de Jundiaí-SP. Inicialmente, foram sujeitos dessa fase 228 alunos matriculados na terceira série do ensino médio, distribuídos em uma classe do período diurno e três classes do período noturno na escola particular, além de três classes do

¹ A amostragem por conveniência é não-probabilística, onde o pesquisador seleciona membros da população mais acessíveis (TRIOLA, 2008).

período diurno na escola pública. Foram analisados os dados de 201 sujeitos que responderam a todos os instrumentos de pesquisa.

Os dados foram coletados mediante a aplicação de quatro instrumentos:

1. Um questionário informativo, com questões de múltipla escolha, contendo questões relativas à identificação, idade, gênero, séries em que o aluno foi reprovado.
2. Uma prova obtida através da adaptação do instrumento *Van Hiele Test*, retirado de “Van Hiele Levels and Achievement in Secondary School Geometry”, Usiskin (1982), que será tratada aqui nesse trabalho como prova Van Hiele (VH). Esse instrumento era composto por 25 questões, cinco para cada nível, porém nessa pesquisa foram aplicadas somente as questões de 1 a 15, referente aos três primeiros níveis (VH₁, VH₂ e VH₃). Segundo o próprio Van Hiele (1986), os três primeiros níveis são trabalhos na escola até o Ensino Médio. Esse instrumento gerou duas variáveis: nível de desenvolvimento do pensamento em geometria (0,1, 2 ou 3) e VH, a nota na prova variando de zero a dez.
3. Uma prova contendo a série XXV de Krutetskii (1976), “Problemas relacionados a conceitos espaciais”, aqui chamada prova de conceitos espaciais (CE). Essa prova era composta por 28 questões, sendo assim divididas: (A) Problemas no plano (oito questões); (B) Geometria Espacial (16 questões); e (C) Teste de figuras (13 questões). As subprovas A e B eram compostas somente por atividades com enunciados verbais, enquanto que a subprova C apresentava figuras como parte do enunciado. Esse instrumento gerou a variável CE, representando a nota na prova variando de zero a dez.
4. Um teste de raciocínio espacial (RE) da Bateria de Raciocínio BPR-5 (forma B), de Primi e Almeida (2000). Esse instrumento era composto de 20 questões de múltipla escolha com tempo limite de 18 minutos de solução. Esse instrumento gerou a variável RE, a nota na prova, normalizada segundo as instruções do manual, e variando de zero a dez.

A aplicação dos instrumentos foi feita em dois momentos. Primeiramente, foi aplicada a prova de problemas geométricos de Van Hiele, acompanhada do questionário e do teste de raciocínio espacial. Na segunda sessão, realizada em outro dia letivo, foi aplicada a prova de conceitos espaciais. Os alunos foram submetidos às provas em horário normal de aula.

As diferenças significativas² entre as médias de desempenho nas provas matemáticas (instrumentos 2, 3 e 4) segundo o gênero e a escola foram verificadas por meio da aplicação do teste t-student. Para a comparação de dados categóricos, por exemplo, os níveis em que os alunos foram enquadrados segundo a teoria de Van Hiele (1986), foi aplicado o teste Qui-quadrado (χ^2). O teste Qui-quadrado é um método para testar a igualdade das frequências para diferentes categorias.

As relações lineares entre as variáveis foram calculadas por meio da Correlação de Pearson (r).

² Nos testes t-Student e Qui-quadrado, uma diferença é considerada significativa quando $p < \alpha$. Quando $p = 0$, diz-se também que a diferença é altamente significativa (KERLINGER, 1980).

O nível de significância adotado nesse trabalho foi de 5%, ou seja, $\alpha = 0,05$. Nesse sentido, o resultado obtido em cada teste será considerado estatisticamente significativo se o p -valor for menor que α , ou seja, se $p < 0,05$.

Foi utilizado o teste Lillefors ($K-S$) para verificar a normalidades das amostras (independentes, ora segundo a variável gênero ora segundo a variável escola), como pressuposto do teste estatístico t-Student. Esse teste não indicou normalidade, porém, devido ao número elevado de sujeitos, maior que 30, a amostra é considerada normal e esse teste t pode ser aplicado (BUSSAB e MORETIN, 1987).

Resultados

Foram analisados os dados referentes a 201 sujeitos, sendo 94 matriculados na escola pública e 107 na escola particular, que representaram respectivamente 46,8% e 53,2% da amostra. Os dois grupos juntos – escola pública e particular – foram compostos por 45,3% do gênero masculino e 54,7% do gênero feminino.

As notas obtidas na prova VH foram calculadas de zero a dez, sendo encontrada média 3,8 ($SD^3 = 1,5$). Não foram encontradas diferenças significativas de desempenho segundo o tipo de escola.

Posteriormente, para que o sujeito fosse enquadrado em um nível de desenvolvimento do pensamento em Geometria conforme proposto por Van Hiele, foi considerado nessa mesma prova o número mínimo de três questões corretas entre as cinco de cada nível. Os sujeitos foram classificados em “nível 0” quando não acertavam o mínimo de três questões entre as cinco primeiras (9,4%), nível 1 (45,8%), nível 2 (25,9%) e nível 3 (6,5%). Alguns sujeitos (12,4%) que acertavam no mínimo três questões em um nível, mas não o fizeram em algum nível precedente foram classificados em nível “indefinido”, já que a teoria pressupõe que para que se alcance um nível é necessário passar pelos anteriores. Os resultados do teste Qui-quadrado não indicaram nenhuma diferença significativa segundo o gênero e a escola quanto ao enquadramento em níveis (χ^2 s (3) = 6,581, 4,203, $ps = 0,087, 0,240$, respectivamente)⁴.

Na prova sobre conceitos espaciais os sujeitos obtiveram média 1,9 e desvio padrão 0,8, sendo que não foram encontradas diferenças significativas em relação à escola ou ao gênero. Essa foi a prova que apresentou o maior número de questões em branco.

A aplicação do teste de raciocínio espacial teve por objetivo avaliar a capacidade de raciocínio espacial dos sujeitos, independentemente de um conteúdo específico. Muitos sujeitos não terminaram a prova devido à restrição de tempo, mas ela constituiu-se num fator importante para destacar os sujeitos que conseguiram executar a tarefa no tempo determinado. Essa nota variava de zero a 20, sendo obtida média de 10,7 ($SD = 4,1$). Também não foram encontradas diferenças significativas segundo o gênero e o tipo de escola (t s (199) = -0,506, 0,502, $ps = 0,614, 0,616$, respectivamente).

As notas do teste de Raciocínio Espacial foram normalizadas de acordo com o manual técnico do teste e pode-se concluir que os sujeitos dessa amostra apresentaram

³ Neste trabalho, entende-se SD por Desvio Padrão (Standard Deviation).

⁴ χ^2 (G. L.), onde G. L. é o grau de liberdade, sendo número de categorias analisadas menos 1.

um desempenho abaixo da média dos sujeitos que participaram da validação do teste, sendo essa diferença entre as médias estatisticamente significativa ($t(200) = -24,227$, $p = 0,000$)⁵.

Em seguida, procurou-se estabelecer a relação entre a nota obtida na prova sobre desenvolvimento do pensamento em Geometria (VH), o desempenho na prova sobre habilidade para conceitos espaciais (CE) e o teste de raciocínio espacial (RE). Nesse sentido, foram determinadas as relações lineares através do cálculo das Correlações de Pearson (r). Todas as relações foram altamente significativas ($ps = 0,000$), o que indica que os sujeitos apresentaram desempenho semelhante em provas que avaliaram a habilidade para manipular mentalmente conceitos espaciais, em provas que avaliaram o raciocínio espacial e em provas que avaliaram o nível de desenvolvimento do pensamento em geometria. Segundo os valores descritos na Tabela 1, as relações eram positivas e moderadas (TRIOLA, 2008).

Variáveis		VH	CE	RE
VH	r	1,000	0,287	0,358
	p		0,000	0,000
CE	r		1,000	0,433
	p			0,000
RE	r			1,000
	p			

Tabela 1: Coeficientes de Correlação de Pearson entre as notas obtidas através da prova VH, prova CE e RE.

Entre as variáveis VH, CE e RE, o maior coeficiente de Correlação de Pearson está entre CE e RE, ou seja, entre a habilidade para conceitos espaciais e o raciocínio espacial, indicando uma maior aproximação entre os constructos.

Discussão e conclusões

Como os sujeitos selecionados para a pesquisa eram alunos concluintes do Ensino Médio, era esperado que eles dominassem uma série de conceitos e demonstrassem algumas habilidades que deveriam ter sido desenvolvidas na escola desde o Ensino Fundamental. Isso não foi confirmado pelos dados obtidos no presente trabalho. Os alunos das escolas escolhidas para este trabalho não conheciam uma série de objetos matemáticos e não possuíam habilidades em nível considerado satisfatório para continuar seus estudos em nível superior ou para transferir conhecimentos para situações fora da escola.

Sobre o desempenho dos sujeitos, não existia inicialmente a intenção de pesquisar diferenças em relação ao gênero, mas a revisão da literatura na área da habilidade de conceitos espaciais indicou resultados mais satisfatórios para sujeitos do gênero masculino em comparação aos demais. Por este motivo, as diferenças de desempenho

⁵ $t(n-1)$, onde n é o número de sujeitos analisados.

segundo o gênero foram incluídas no presente trabalho. Não se pode afirmar nessa pesquisa que os sujeitos do gênero masculino tenham apresentado um desempenho superior aos sujeitos do gênero feminino, nesta amostra.

A melhor forma de responder à pergunta de pesquisa é tomar os resultados apresentados na Tabela 1, que direcionaram a investigação para a forma de apresentação de cada atividade matemática nos instrumentos. Em outras palavras, uma atividade matemática requer um conjunto de habilidades, e não apenas uma habilidade específica, o que é estabelecido também pelo enfoque adotado nesse trabalho sobre habilidades matemáticas, desenvolvido por Krutetskii (1976).

A habilidade para conceitos espaciais foi analisada em relação à forma de apresentação das questões que ora exigiam uma representação e manipulação mental de objetos – fossem eles figuras planas, sólidos geométricos ou elementos espaciais, tais como planos e retas – ora exigiam habilidade verbal.

Sobre a relação dessas habilidades com o nível de desenvolvimento do pensamento em Geometria, a partir do momento em que esses níveis deixam de requerer somente habilidades visuais, como no segundo e terceiro níveis, em que o aluno deve conhecer propriedades das figuras e relacioná-las, estando já embutida uma habilidade verbal de codificação de informações que foi ligada à forma de apresentação das questões que requeriam habilidade para conceitos espaciais na forma de enunciado verbal.

Finalmente, o fato das correlações de Pearson entre a nota obtida na prova Van Hiele (VH), a nota obtida na prova de percepção (PE) e a nota obtida na prova de conceitos espaciais (CE) serem todas significativas, contempla para uma forma geral de conhecimento e habilidade quando o pano de fundo das atividades são os conceitos geométricos. Em outras palavras, alunos que estavam em um nível superior de desenvolvimento geométrico, ou seja, conheciam suas propriedades e sabiam relacioná-las, possuíam também a habilidade para conceitos espaciais mais desenvolvida e também um raciocínio espacial mais apurado.

Em relação aos sujeitos dessa pesquisa, portanto, o componente das habilidades matemáticas escolhido para a investigação do presente estudo – a saber, habilidade para conceitos espaciais – está presente no pensamento em geometria e possui uma forte relação com a aprendizagem de conceitos em vários níveis, além do raciocínio espacial mais desenvolvido.

Referências Bibliográficas

ANDERSON, J. R. **Cognitive psychology and its implications**. 4.ed. New York: W. H. Freeman and Company, 463p, 1995.

AUSUBEL, D. P., NOVAK, J. D. & HANESIAN, H. **Psicologia educacional**. Tradução Eva Nick. Rio de Janeiro: Ed. Interamericana, 1980

BRITO, M. R. F. Alguns Aspectos Teóricos e Conceituais da Solução de Problemas Matemáticos. In: **Solução de Problemas e a Matemática Escolar**, de Márcia Regina Ferreira de Brito (org.). Campinas, SP: Ed. Alínea, 2006.

- BRITO, M. R. F., FINI, L. D. T., GARCIA, V. J. N. Um Estudo Exploratório sobre as Relações entre o Raciocínio Verbal e o Raciocínio Matemático. **Proposições**, Campinas, SP, v. 5, n.1, pp. 37-44, 1994.
- BUSSAB, W. O., MORETIN, P. A. **Estatística Básica**. SP: Atual, 1987.
- CARROLL, J. B. Studying individual differences in cognitive abilities: through and beyond factor analysis. In R. F. Dillon & R. R. Schmeck, **Individual differences in cognition**. New York: Academic Press, 1983.
- ECHEVERRÍA, M. D. P. P. A solução de problemas em Matemática. In **A solução de problemas: aprender a resolver, resolver para aprender**. Juan Ignacio Pozo. Porto Alegre: Artmed, 1998.
- ECHEVERRÍA, M. D. P. P., & POZO, J. I. Aprender a resolver problemas e resolver problemas para aprender. In **A solução de problemas: aprender a resolver, resolver para aprender**. Juan Ignacio Pozo. Porto Alegre: Artmed, 1998.
- GARDNER, H. **A nova ciência da mente: uma história da revolução cognitiva**. Tradução Claudia Malbergier Caon. São Paulo: USP, 1996.
- GORGORIÓ, N. Exploring the functionality of visual and non-visual strategies in solving rotation problems. **Educational Studies in Mathematics**. n. 35, 207-231, 1998.
- HOFFER, A. Geometry is more than proof. **Mathematics Teacher**, USA. v. 71, n. 1, 11-21, 1981.
- KERLINGER, F. N. **Metodologia em Ciências Sociais: um Tratamento Conceitual**. São Paulo: EPU, 1980.
- KÖHLER, W. **Psicologia da Gestalt**. Belo Horizonte: Ed. Itatiaia, 1980.
- KOSSLYN, S. M. A capacidade para trabalhar mentalmente com imagens. In Robert Sternberg, **As capacidades intelectuais humanas: uma abordagem em processamento de informações**. Tradução de Dayse Batista. Porto Alegre: Artes Médicas, 1992.
- KRUTETSKII, V. A. **The psychology of mathematical abilities in schoolchildren**, Chicago: Teh University of Chicago Press. Transleted from the Russian by Joan Teller, 1976.
- LEAN, G. & CLEMENTS, M. A. Spatial ability, visual imagery, and mathematical performance. **Educational Studies in Mathematics**. v. 12, 267-299, 1981.
- LUENGO, V. Some Didactical and Epistemological Considerations in the Design of Educational Software the Cabri-Euclide Example. **International Journal of Computer for Mathematical Learning**, v. 10, 1-29, 2005.
- NASSER, L. **A teoria de Van Hiele: pesquisa e aplicação**. Rio de Janeiro: UFRJ. 16p, 1992.
- NASSER, L. **Geometria: Na Era da Imagem e do Movimento**. Rio de Janeiro: UFRJ, 1996.

- PRIMI, R. & ALMEIDA, L. S. **BPR-5: Bateria de Provas de Raciocínio – manual técnico**. Casa do Psicólogo, 2000.
- RESNICK, L. B. & FORD, W. W. **La enseñanza de las Matemáticas y sus fundamentos psicológicos**. Barcelona: Paidós, 1990.
- SÃO PAULO **Proposta curricular para o ensino de Matemática: 2º grau**. São Paulo: Secretaria Estadual de Educação/CENP, 393p, 1986.
- SECRETARIA DE EDUCAÇÃO FUNDAMENTAL. **Parâmetros curriculares nacionais: Matemática**, Brasília: MEC, v. 3, 1997.
- SHAW, J. M., THOMAS, C., HOFFMAN, A. & BULGREN, J. Using concept diagrams to promote understanding in geometry, **Teaching Children Mathematics**, v. 2, n. 3, 184-189. Nov, 1995.
- STERNBERG, R. **As capacidades intelectuais humanas: uma abordagem em processamento de informações**. Tradução de Dayse Batista. Porto Alegre: Artes Médicas, 1992.
- _____. **Psicologia Cognitiva**. Porto Alegre: Artes Médicas, 2000.
- TRIOLA, M. **Introdução à Estatística**. Rio de Janeiro: LTC, 2008.
- USISKIN, Z. **Van Hiele levels and achievement in secondary school geometry**. CDASSG Project. The University of Chicago (ERIC Document Reproduction Service No. ED 220 288), 1982.
- VAN HIELE, P. M. **Structure and insight: a theory of mathematics education**. Orlando, USA: Academic Press, Inc. 246p., 1986.
- VIANNA, O. A. **O Componente Espacial da Habilidade Matemática de Alunos do Ensino Médio e as Relações com o Desempenho Escolar e as Atitudes em Relação à Matemática e à Geometria**. Campinas, SP: Faculdade de Educação da UNICAMP. (Tese, Doutorado em Educação), 2005.