ATIVIDADES INVESTIGATIVAS EM UM AMBIENTE DE GEOMETRIA DINÂMICA

INVESTIGATIVE ACTIVITIES IN A DYNAMIC GEOMETRY ENVIRONMENT

Guilherme Henrique Gomes da Silva

Universidade Federal de Alfenas (Campus Varginha)

guilhermehgs@yahoo.com.br

Resumo

Esse artigo apresenta resultados de uma pesquisa cujo objetivo foi analisar como participantes de um grupo de estudos, formado por futuros professores de Matemática se apropriaram do Geogebra, um software de geometria dinâmica, de forma a inseri-lo em sua futura prática docente e analisar as contribuições que a participação em um grupo de estudos pode propiciar aos licenciandos. O grupo se reuniu para ler e discutir artigos científicos, explorar o software de geometria dinâmica e elaborar uma oficina para alunos do ensino médio de uma escola. Nesse artigo é dado um destaque especial ao enfoque investigativo utilizado pelo grupo na elaboração das fichas de atividades e nos possíveis imprevistos que podem ocorrer quando o professor está inserido em um ambiente de aprendizagem baseado na Tecnologia da Informação e Comunicação (TIC). Isso será evidenciado através de episódios ocorridos durante a oficina e nas discussões realizadas pelos futuros professores no grupo de estudos. Os resultados mostram que o estudo teórico e as discussões realizadas no âmbito do grupo de estudos foram fundamentais para que os licenciandos não se imobilizassem diante dos imprevistos e pudessem estimular o senso investigativo do aluno através de atividades mediadas pelo computador.

Palavras chaves: Geometria Dinâmica; Geogebra; Grupos de Estudos; Zona de Risco; Atividades Investigativas.

Abstract:

This paper presents results of a research aiming at analising how a study group, constituted by prospective mathematics teachers, used a dynamic geometry software in planning activities for a teaching practice. Before practicing with students, the group read and discussed papers from journals, explored Geogebra, a dynamic geometry software, and planned a workshop to be held with students at high school level. Special emphasis is given to the investigative approach used by the group in the development activities as well as unforeseen situations that can occur when the teacher is in a learning environment based on Information and Communication Technology (ICT). These emphases will be shown by episodes that occurred during the workshop and discussions made by future teachers in the study group. The results show that the theoretical study and the discussions within the study group were instrumental in that they do not become immobilized in the face of unforeseen and could stimulate the sense of the student through investigative activities mediated by the computer.

Key Words: Dynamic Geometry; Geogebra; Study Group; Risk Zone; Investigative Activities

Introdução

Atualmente a humanidade está cada vez mais inserida em uma sociedade da informação. Vários produtos do conhecimento mudam a face do mundo a todo instante tais como: a biotecnologia, a engenharia genética, a informática e suas potencialidades como o hipertexto, *internet*, construção de realidades virtuais compartilháveis, *softwares* etc. Essa velocidade com que a tecnologia avança causa a obsolescência dos objetos e do próprio conhecimento. Lévy (1999) já dizia isso na década passada, afirmando que grande parte das competências adquiridas por uma pessoa no início de seu percurso profissional estará obsoleta no final de sua carreira. Pode-se notar que as Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC) atuam no cotidiano do ser humano de uma forma cada vez mais causadora de dependência e constituindo a forma de viver.

Diariamente novas tecnologias são desenvolvidas e, em sua grande maioria, focam a melhoria na qualidade de vida das pessoas. Pensando nisso, desde a década de noventa, diversas pesquisas tem sido feitas para que as novas tecnologias também propiciem contribuições para a educação, em seus mais variados níveis. Os órgãos governamentais criaram diversos programas, tentando estabelecer um fio condutor norteador para ações no contexto educacional envolvendo gestores, professores, formadores de professores e, é claro, estudantes. Além disso, diversos recursos tecnológicos como lousas digitais, programas computacionais, redes de cooperação, *blogs*, entre outros, foram desenvolvidos ligados aos mais variados temas da educação, buscando de certa forma que a educação acompanhe a modernização ocorrida na sociedade.

Focando apenas a tecnologia informática, nos últimos vinte anos, diversos *softwares* foram desenvolvidos no intuito de melhorar o ensino e aprendizagem de todas as áreas do conhecimento. Em específico, dentro da Educação Matemática, podemos encontrar uma vasta gama de programas que abordam assuntos como álgebra, cálculo, geometria plana e espacial.

O presente artigo destaca uma modalidade de programas que trabalham em específico com o ensino e aprendizagem da geometria. O ambiente de aprendizagem gerado por tais *softwares* utilizam os objetos geométricos de uma forma interativa, apresentando uma nova maneira de visualizar tanto os objetos da geometria euclidiana quanto de outras geometrias, como a hiperbólica, analítica ou projetiva. Nesse ambiente os objetos não permanecem de forma estática, sem movimento. O usuário é capaz de interagir com as construções geométricas, realizando movimentos como translações, rotações, modificação de tamanho, além de outras possibilidades. São os *softwares* baseados na geometria dinâmica.

Um ambiente de geometria dinâmica pode ser definido como um *software* cuja característica principal é a possibilidade de “arrastar” as construções geométricas pela tela do computador com o mouse, ao mesmo tempo em que suas medidas são atualizadas. Goldenberg, Scher e Feurzeig (2008), afirmam que tais ambientes permitem aos estudantes criarem construções geométricas e manipulá-las facilmente, movendo livremente certos elementos de um desenho e observando outros que correspondem às condições alteradas. Dessa maneira a tela do computador fornece a impressão de que a construção geométrica está sendo deformado continuamente em todo o processo de arrastar, enquanto mantém as relações que foram especificadas como essenciais da construção original.

No decorrer do artigo serão apresentados resultados de uma pesquisa que teve como objetivo analisar como participantes de um grupo de estudos, formado por futuros professores de Matemática se apropriaram do Geogebra, um software de geometria dinâmica, de forma a inseri-lo em sua futura prática docente e analisar as contribuições que a participação em um grupo de estudos por futuros professores propiciou aos seus integrantes. Também fez parte dos objetivos analisar a maneira que os estudantes lidaram com imprevistos que surgiram durante o trabalho com atividades investigativas com o Geogebra em sala de aula, além de verificar de que forma os licenciandos lidaram com a preparação e a aplicação de atividades que possuíam o caráter investigativo.

Os resultados apresentados nesse artigo focam-se na nos dois últimos objetivos da pesquisa apresentados no parágrafo anterior, dando um destaque às reflexões feitas pelos futuros professores em relação às atividades investigativas e a situações em que o trabalho em um ambiente de geometria dinâmica os inseriu no que Penteado (2001) define como zona de risco, onde o professor se vê diante de um imprevisto e, muitas vezes, fica sem movimento diante da situação inesperada. Para tanto serão apresentadas situações vivenciadas por um grupo de estudos formado por alunos do curso de Licenciatura em Matemática que se reuniram e exploraram um *software* de geometria dinâmica com o intuito de elaborar e aplicar atividades de geometria plana em uma oficina pedagógica para alunos do ensino médio.

Participaram do grupo seis licenciandos, Ana Lígia, Ester, André, Welder, Camila e Silmara[1]. Foram realizados oito encontros para a elaboração da oficina. Nesses encontros os futuros professores estudaram previamente livros e artigos científicos sobre geometria plana, utilização de computadores em sala de aula e investigação matemática em sala de aula. Nos encontros eles discutiam assuntos previamente combinados e todos expunham seu ponto de vista, tiravam dúvidas, argumentavam sobre suas experiências em sala de aula enquanto alunos de licenciatura e apresentavam ideias para as atividades da oficina. Depois desse momento de discussão o grupo se separava em duplas ou individualmente e trabalhavam na elaboração de atividades que seguiam a perspectiva investigativa. Antes do término do encontro os participantes se reuniam e apresentavam o que cada um realizou, para que os colegas colaborassem com ideias ou ajudassem em dúvidas conceituais. Antes da realização dos encontros todos os membros do grupo participaram de um curso de extensão na qual aprenderam a manusear as ferramentas do Geogebra. Esse fato permitiu autonomia para construir e elaborar as atividades na plataforma do *software*.

A oficina pedagógica ocorreu em uma escola estadual do interior de São Paulo com alunos do primeiro ano do ensino médio. Ela foi realizada em dois

[1] Nomes fictícios

encontros no laboratório de informática da própria escola e contou com a participação de vinte alunos, os quais eram separados em duplas. As atividades já estavam construídas e os estudantes apenas exploravam-nas, utilizando para isso uma ficha fornecida pelos participantes do grupo e o “modo arrastar” do Geogebra. Em cada um dos dois encontros, foram selecionados dois futuros professores, um para ser o professor da turma e o outro para auxiliá-lo. Cada oficina teve duração de, aproximadamente, uma hora e trinta minutos e os alunos exploraram, em média, cinco atividades por encontro.

Uma característica presente nas atividades elaboradas pelo grupo foi a abordagem investigativa. Nessa perspectiva os estudantes são convidados a procurar regularidades matemáticas, explorar teoremas, elaborar conjecturas, realizar testes, discutir com os colegas os resultados encontrados e, principalmente, refletir sobre assuntos propriamente da matemática. Ponte, Brocardo e Oliveira (2006) e Skovsmose (2008) foram a base teórica das ideias dos participantes do grupo para a oficina. Para o trabalho com o computador em sala de aula, os participantes se fundamentaram em Borba e Penteado (2001). Esse preparo teórico iluminou o caminho dos futuros professores na elaboração das atividades e no trabalho com os estudantes em sala de aula, principalmente quando as situações inesperadas ocorreram.

Os dados da pesquisa são oriundos de gravação em áudio-visual dos encontros realizados pelo grupo de estudos e da oficina pedagógica, além de anotações dos participantes e do pesquisador em um diário de campo. Tais episódios bem como algumas reflexões dos participantes do grupo no decorrer dos encontros, serão destacados no artigo. Antes disso, serão abordadas algumas considerações importantes sobre os ambientes de Geometria Dinâmica.

Ambientes de geometria dinâmica

Hollebrands, Laborde e Sträber (2008) afirmam que a aprendizagem da geometria está essencialmente relacionada por expressões textuais estáticas e ícones de representações externas (descrição textual de uma construção ou os tradicionais desenhos) e com ferramentas criadas para “fazer” geometria (tradicionais régua e compasso e ambientes computacionais). Esses autores defendem que a aprendizagem da geometria é “mediada” por representações externas e ferramentas que formam a conexão entre o estudante e a geometria. A Figura 1 representa essa ideia e mostra uma perspectiva que caracteriza a aprendizagem de geometria com tecnologia.

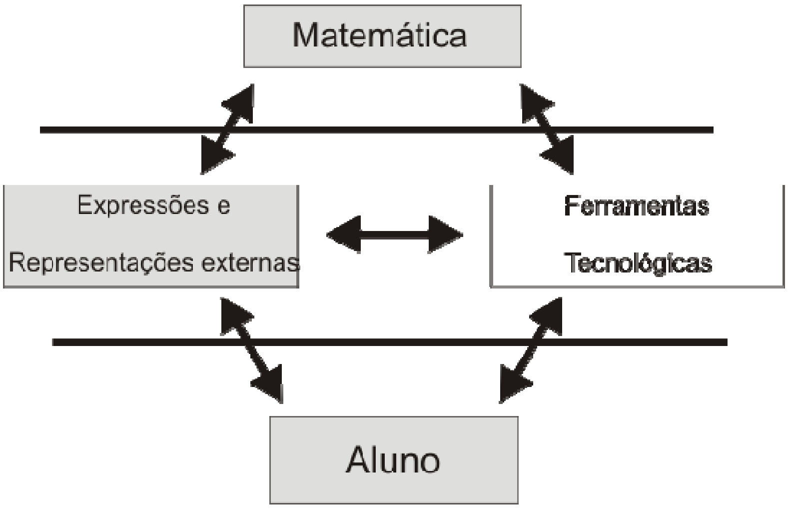


Figura 1 - Uma perspectiva para caracterizar o aprendizado de geometria com tecnologia in Hollebrands, Laborde e Sträber (2008, p.156)

Dentro desse enfoque, é possível considerar os ambientes de geometria dinâmica como uma dessas relações mediadoras entre o ensino da geometria e o aluno. Esses ambientes possibilitam que estudantes façam construções geométricas e manipulem-nas facilmente além de fornecerem oportunidades de explorar propriedades e relações geométricas tanto intuitivamente quanto indutivamente.

Clements et al (2008) declaram que ambientes baseados em geometria dinâmica podem beneficiar estudantes no desenvolver do entendimento sobre formas e figuras geométricas. Para esses autores, em muitas ocasiões estudantes passam de um nível visual de entendimento geométrico para níveis de descrição/análise ou até mesmo abstração/relação. Sua principal característica é a possibilidade do arrastar. Ela permite que estudantes explorem situações problemas e façam conjecturas sobre o conteúdo que estão estudando. Hollbrands, Laborde e Sträber (2008), baseados nos trabalhos de Olivero (2002), Olivero e Robutti (2002), Smith (2002) e outras pesquisas, definem que o modo arrastar em um software GD possui três modalidades diferentes para o desenvolvimento de atividades: **Arrastar sem um objetivo específico, lugar geométrico pelo arrastar** e **arrastar para testar hipóteses**.

O primeiro se refere ao tipo aleatório de arrastar no qual o estudante busca por regularidades ou por comportamentos interessantes e ocorre em um momento de exploração da situação. O segundo tipo se refere ao arrastar de forma a preservar certa propriedade e visualizar o lugar geométrico dos pontos que a satisfazem. O terceiro tipo pressupõe que o estudante já conheça a propriedade do objeto, arrastando-o sistematicamente apenas para testá-la.

Como exemplo, pode-se pensar na seguinte situação: Seja uma elipse *d,* no plano cartesiano, com focos *A* e *B* e um ponto qualquer *C* sobre a mesma. A distância $\overline{CA}$ e $\overline{CB}$ são dadas e a soma de $\overline{CA}$ com $\overline{CB}$ é mostrada na tela, conforme a Figura 2.

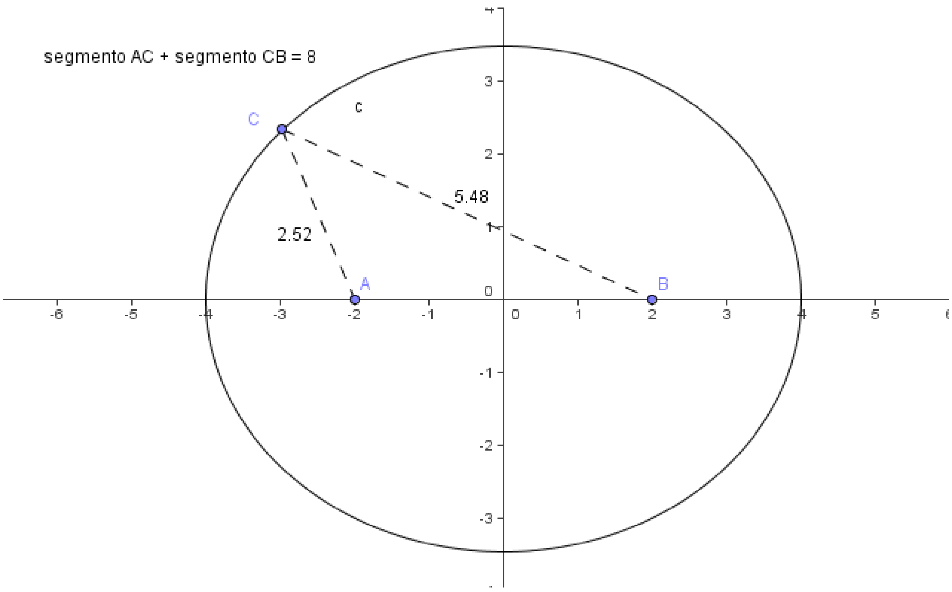


Figura 2 - construção inicial da elipse

Em um primeiro momento, o estudante poderia "arrastar sem um objetivo específico" os pontos *A*, *B ou C* criando uma conjectura qualquer sobre a elipse. Isso poderia levar o estudante a perceber, por exemplo, que a soma dos segmentos $\overline{CA}$ e $\overline{CB}$ permanecem sempre constantes ou então que se os pontos A e B coincidirem a elipse é na verdade uma circunferência. Depois disso, ele poderia "arrastar para testar hipóteses" para tentar justificar suas observações.

De outra maneira o estudante poderia encontrar o "lugar geométrico pelo arrastar", caso o professor solicitasse que ele encontrasse os pontos *C* cuja soma das distâncias $\overline{CA}$ com $\overline{CB}$ seja constante. Com o manejo do mouse e com a opção "rastro[2]" habilitada, é possível marcar os pontos na tela e observar que a figura obtida se aproxima muito a uma elipse. Essa situação poderia ser confirmada pela definição formal encontrada nos livros didáticos: "elipse é o lugar geométrico dos pontos de um plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixos desse plano é constante" (WINTERLE, 2000, p.177).

É importante destacar também que quando os estudantes utilizam pela primeira vez um *software* de geometria dinâmica, a visão que geralmente possuem sobre desenhar e construir um objeto geométrico acabam se misturando. Em um primeiro momento, eles acabam utilizando o software apenas como uma ferramenta de desenho. Conforme Clements et al (2008) afirmam, ao montar os componentes do objeto aparentemente tem-se o resultado esperado. Porém, ao arrastar a figura, percebe-se que a construção não foi eficiente. Dessa forma acaba-se notando que, por exemplo, duas retas são paralelas ou perpendiculares não porque aparentam ser, mas por terem sido construídas dessa forma. Um exemplo desse fato pode ser visto na Figura 3. Um estudante inserido nesse ambiente que queira construir um triângulo retângulo poderia usar um ponto de referência da tela do computador para criar um segmento perpendicular à base do triângulo. Dessa forma o estudante teria "desenhado" o triângulo, ou seja, quando um dos vértices é arrastado, seu triângulo não possui mais um ângulo reto, descaracterizando assim sua construção. Pode-se

[2] Essa é uma opção presente na maioria dos softwares de Geometria Dinâmica.

notar na Figura 4 que, ao “construir” um triângulo retângulo a partir de dois segmentos de retas perpendiculares, as propriedades fundamentais que o definem (no caso possuir um ângulo reto) continuam existindo mesmo quando o vértice A é arrastado pela tela. Isso mostra que usar o *software* apenas para expor aos alunos os desenhos prontos pode fornecer uma visão do ambiente apenas como uma ferramenta de desenho.

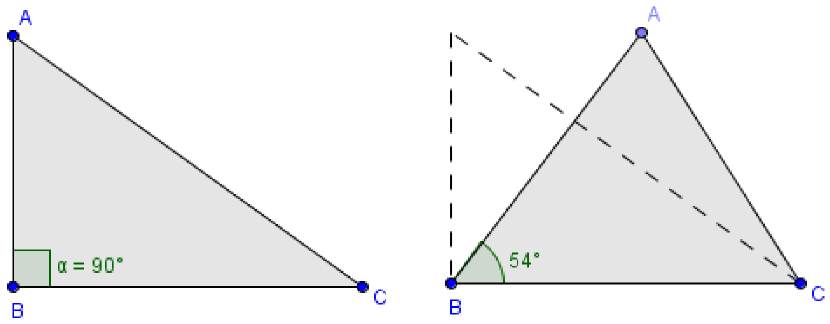


Figura 3-Um triângulo retângulo que foi "desenhado". Ao arrastar o vértice A, ele não possui mais um ângulo de 90º.

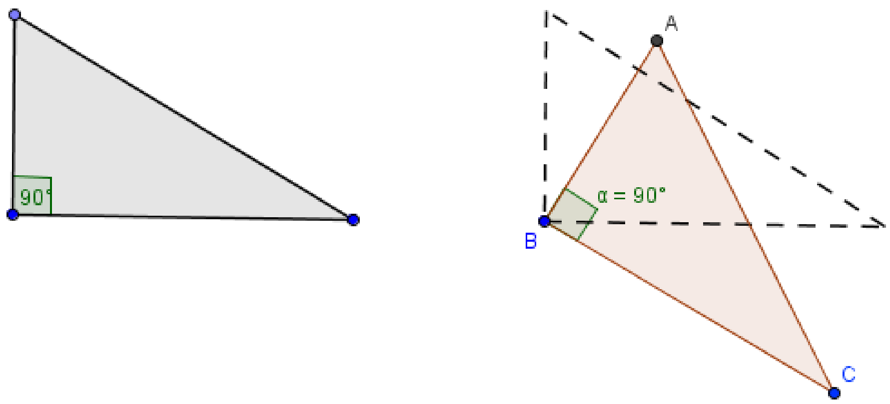


Figura 4 - Um triângulo retângulo que foi "construído". Ao arrastar o vértice A suas características fundamentais continuam existindo.

Tais características de um software de geometria dinâmica devem ser levadas em conta, principalmente no momento em que o professor necessite elaborar atividades para sua turma. Além disso, também é importante a opção da abordagem utilizada para elas. No caso do grupo de estudos apresentado nesse artigo, optou-se por utilizar uma abordagem investigativa. Atividades com essa abordagem, de acordo com Ponte et al (1998), podem ser definidas como “um tipo de atividade que dá ênfase a processos matemáticos tais como procurar regularidades, formular, testar, justificar e provar conjecturas, refletir e generalizar.” (p.15). Faz parte também o processo de refutação de uma conjectura e sua reformulação. Essa definição inclui basicamente os mesmos processos nos quais os matemáticos profissionais produzem conhecimento. Devido a esse fato, muitos pesquisadores defendem que essa forma de produzir conhecimentos matemáticos pode estar ao alcance da sala de aula, já que, por meio dela, é possível mostrar ao aluno que a Matemática é uma atividade humana, incompleta e que pode ser falível. Skovsmose (2008) destaca que essa abordagem insere os estudantes nos chamados cenários de investigação. Trabalhar em um cenário de investigação requer do professor e de seus alunos um senso investigativo, procurando conhecer o que não sabem. Dessa forma, os alunos são convidados a aprender Matemática fazendo Matemática.

Atividades investigativas no ambiente de geometria dinâmica

O grupo de estudos apresentado nesse artigo utilizou o *software* Geogebra, que é um programa livre, onde é possível trabalhar com elementos geométricos e algébricos simultaneamente. Na tela do programa todo objeto geométrico possui seu representante algébrico. Além disso, é possível utilizar seus comandos para construir e explorar gráficos dos mais variados tipos de funções.

Nas atividades elaboradas pelos futuros professores foi possível notar a preocupação em conduzir os alunos a formular questões e procurar explicações, como proposto por Skovsmose (2008). Em todas as atividades havia um espaço em branco destinado às anotações, pois os participantes do grupo acreditavam que nelas seria possível verificar, mesmo depois da aula, os caminhos e estratégias utilizados pelos alunos bem como suas conclusões, além de possibilitar aos estudantes a reflexão sobre o processo investigativo, aprendendo com e sobre ele (PONTE, BROCARDO E OLIVEIRA, 2006).

A seguir serão evidenciadas as reflexões do grupo de estudos no que diz respeito à perspectiva de investigação matemática em sala de aula utilizando o Geogebra. Serão destacadas atividades elaboradas pelo grupo e diálogos realizados nos encontros de preparação das atividades e de avaliação da oficina pedagógica, analisando o discurso dos participantes em relação à perspectiva investigativa em sala de aula. Em seguida serão destacadas algumas situações em que as atividades inseriram o futuro professor em uma zona de risco na qual foi necessário o movimento de reflexão diante do imprevisto.

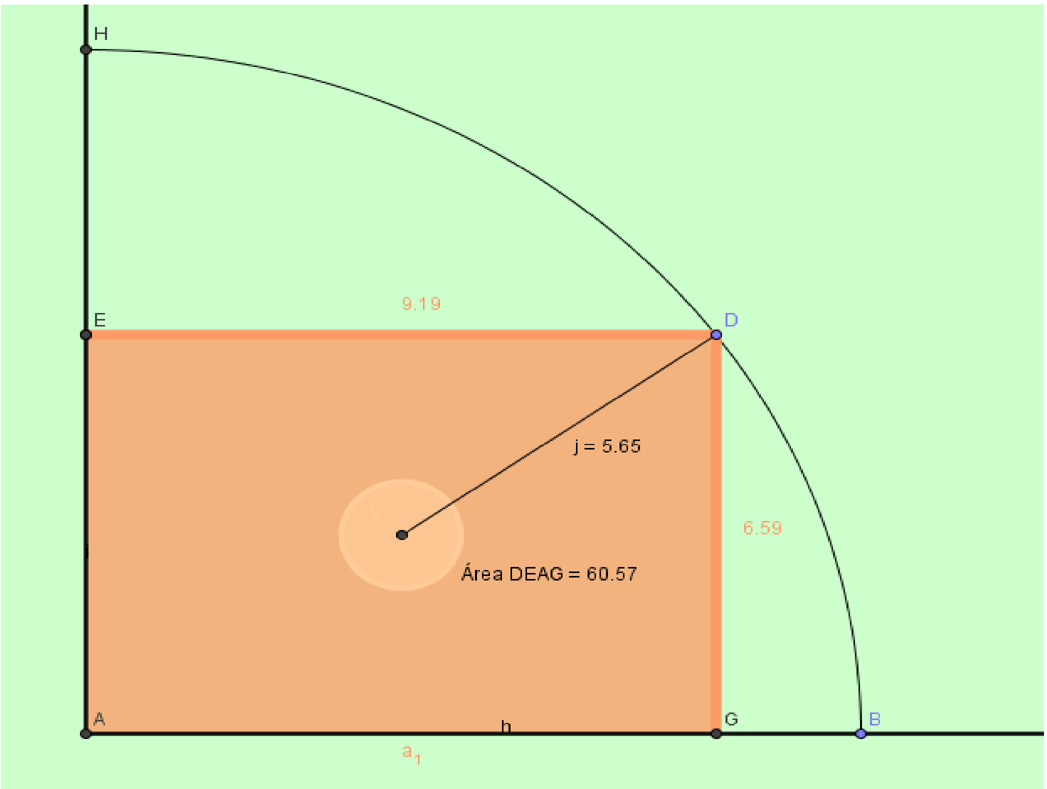
Na atividade do Quadro 1 faz referência à semi-realidade. De acordo com Skovsmose (2008), atividades com esse enfoque trazem aspectos do mundo real ao alcance do aluno. Para sua elaboração os futuros professores utilizaram conceitos de perímetro e área de um quadrilátero. Mais precisamente, o objetivo era que o aluno percebesse, através de um campo de beisebol, que a área de um quadrilátero é máxima quando este é um quadrado.

Quadro 1 – Atividade sobre Beisebol

[Atividade – Beisebol]

Para realizar essa atividade você precisa saber o conceito de Perímetro e de área de um quadrilátero. Anote o que você sabe sobre esses temas.

Um rebatedor de beisebol localizado sobre o ponto A, tem de percorrer o perímetro do quadrilátero para conseguir um *home run*[3], e marcar um ponto.
1 - Arrastando o ponto D sobre o setor circular *c*, o que acontece com o perímetro do quadrilátero DEAG? Quanto é possível ter o maior perímetro do campo?
2 – O que acontece com a área do quadrilátero DEAG quando você arrasta o ponto D? Quando é possível obter a maior área? Justifique seu raciocínio.



O grupo de estudos utilizou toda teoria discutida durante os encontros de preparação da oficina para que as atividades tivessem o caráter investigativo. Em todas é possível notar uma preocupação em direcionar os estudantes com perguntas do tipo “o que acontece se...” procurando despertar questionamentos do tipo “sim, o que acontece se...”. Para Skovsmose (2008) essa é uma das características de um ambiente de aprendizagem baseado na investigação matemática. O Quadro 2 mostra outra atividade elaborada pelo grupo em que pode-

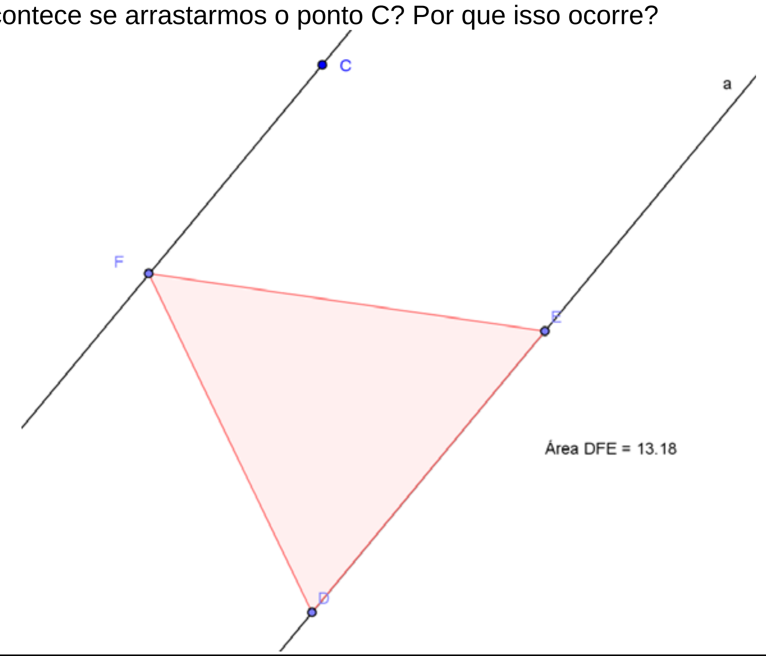
[3] Home run é uma rebatida do beisebol na qual o rebatedor é capaz de circular todas as bases, terminando na casa base e anotando uma corrida (junto com uma corrida anotada por cada corredor que já estava em base), com nenhum erro cometido pelo time defensivo na jogada que resultou no batedor corredor avançando bases extras.

se verificar a preocupação dos futuros professores em inserir os estudantes em um cenário de investigação.

Quadro 2 – Atividade sobre altura do triângulo

[Atividade – Triângulo]

Para essa atividade você precisa saber o conceito de área de um triângulo. Anote o que você sabe sobre isso. Se necessário, peça auxílio para seu professor.
1. O que acontece com a área do triângulo se arrastarmos os pontos D e E ?
2. O que acontece se arrastarmos o ponto F? Como ficou a área do triângulo? Por que isso ocorre?
3. Agora, o que acontece se arrastarmos o ponto C? Por que isso ocorre?



Para tanto foram marcadas dois pontos *D* e *F* em uma reta *a* e um ponto *F* sobre uma reta paralela a reta *a* de tal forma que todos os pontos poderiam ser arrastados sobre as retas, porém a distância entre uma reta e outra foi mantida fixa. Em seguida foi construído o triângulo DEF mostrando na tela do computador o valor da área desse triângulo. O objetivo dessa atividade foi que os estudantes investigassem elementos da área do triângulo DEF e descobrissem que a mesma só se alterava quando os pontos *D* ou *E* (que formam a base do triângulo) fossem arrastados.

Ao término de cada atividade o professor que estava à frente da turma fazia a institucionalização do conteúdo e os estudantes discutiam sobre suas descobertas para "fechar" uma teoria geral. No discurso apresentado pelos futuros professores, essa forma de trabalhar propiciou grandes resultados possibilitando aos alunos uma sensação de motivação, pois as tarefas propostas apresentam diversas possibilidades para a construção do pensamento matemático dos envolvidos. Para Brocardo (2001), isso se caracteriza pela participação ativa dos estudantes nesse ambiente de aprendizagem. A seguir é evidenciado um diálogo que ocorreu em um dos encontros de avaliação do grupo de estudos onde é possível verificar esse discurso dos licenciandos.

[Reunião do Grupo]

Pesquisador: *O que vocês acharam de primeiro utilizar o computador com a exploração das atividades para depois os estudantes fecharem o conteúdo junto com o professor?*
Silmara*: Achei interessante usar o computador primeiro. Porque depois que você dá a matéria, eles vão falar "ah, eu já vi isso no computador", então acredito que eles se interessaram mais.*
Camila: *Acho que se você der a matéria o aluno já não vai se interessar tanto na exploração da atividade.*
Silmara*: Se trabalhar primeiro o conteúdo na sala de aula, acho que perde o caráter investigativo da aula.*
Keila: *Acho que na atividade investigativa é melhor deixar para dar a matéria depois.*
Camila: *Por que se derem antes eles já vão para o computador sabendo o que vai acontecer.*
Silmara*: Eu me lembro de uma atividade sobre funções exponenciais que fiz no curso de extensão sobre o Geogebra. Logo depois eu estudei função exponencial na faculdade. Parece que eu já sabia tudo. É muito mais fácil depois que a gente já trabalhou a atividade no computador e vemos e mexemos.*

Essa ideia de trabalhar primeiro a atividade no computador antes de apresentar o conteúdo para o aluno vem ao encontro do que afirma Brocardo (2001) em relação às atividades investigativas. Para essa pesquisadora, “as investigações são muitas vezes usadas para *explorar*, ou seja, são encaradas como uma primeira experiência que permite ter uma visão geral de um contexto que será trabalhado posteriormente” (p.132). Além disso, Porfírio e Oliveira (1999) afirmam que, sendo já conhecido o “destino” é possível que a viagem não apresente um interesse particular ao aluno. No entanto, as autoras enfatizam que o “caminho” pode proporcionar novos olhares para relações matemáticas que, muitas das vezes, podiam não ter sido ainda evidentes, propiciando um verdadeiro prazer a quem tem a oportunidade de percorrê-lo.

Na última fala da participante Silmara é possível verificar que a participante se colocou no papel de aluno, mostrando a experiência que teve em aprender matemática enquanto uma estudante utilizando o software de uma maneira investigativa. No cotidiano do professor isso raramente acontece. Ainda mais, poucos professores tiveram oportunidades dessa natureza em sua formação inicial. Considero que isso leva a pensar na formação do professor de Matemática para que existam propostas nos cursos que privilegiem o aprender dos futuros professores utilizando atividades investigativas no computador. O diálogo a seguir mostra o discurso de André de que as atividades investigativas propiciam ao aluno a criação de várias possibilidades para a construção do pensamento.

[Reunião do grupo]

André: *É um trabalho que você tem que fazer conjecturas, tem que pensar, organizar. De uma maneira investigativa é uma forma de você não perder aquele interesse pelo aprendizado que a gente tem que ter, até porque um exercício, como o texto fala que é fechado, que não dá margem para outras interpretações é desmotivador, até mesmo uma conjectura do professor. Eu acho que para mim, além de aluno, é você poder ver várias possibilidades. O mais interessante é você conseguir construir além do exercício. É você saber que tem várias possibilidades.*

As possibilidades citadas por André são, na verdade, o que Ponte, Brocardo e Oliveira (2006) consideram sobre investigar na aula de matemática, ao afirmarem que “a variedade de percursos que os alunos seguem, os seus avanços e recuos, as divergências que surgem entre eles, o modo como a turma reage as intervenções do professor são elementos largamente imprevisíveis numa aula de investigação” (p.25). Além disso, os participantes consideram que trabalhando com atividades investigativas no computador os alunos podem ter mais autonomia e desenvolver seu senso crítico, já que em muitas vezes é possível utilizar o software para verificar se algum exercício ou conteúdo desenvolvido em sala de aula realmente ocorre da maneira que o professor mostrou. Isso é notado no diálogo a seguir.

[Reunião do grupo]

Welder: *Esse método é interessante porque você vai possibilitar ao aluno que ele tenha mais autonomia. Quando ele não souber alguma coisa ele pode ir lá no programa e ver se dá certo. Às vezes ele sai da aula e pensa "eu estou duvidando do professor" então vai e faz os testes no programa. Então ele vai investigar.*

Apesar de todas as potencialidades que um ambiente de geometria dinâmica sua utilização nem sempre é bem vista pelos professores, pois significa a necessidade de assumir riscos durante a aula. Para Penteado (2001), uma razão para isso é que engajar-se em trabalhos que fazem uso de recursos pedagógicos que utilizam a tecnologia informática é algo como sair de uma zona caracterizada pelo conforto proporcionado pelo controle da situação e atuar em uma zona de risco, onde o imprevisto predomina. Para a autora, os ambientes baseados em TIC propiciam tais imprevistos com mais frequência, pois o professor pode se deparar com situações inesperadas como o mau funcionamento de um computador ou um apertar de teclas pelos estudantes que leve a uma situação não esperada. Nesse cenário o professor está mais propicio a sair de uma zona de conforto, caracterizada pela previsibilidade do ambiente, e entrar em uma zona de risco, que requer tomada de decisão sobre situações nunca antes experenciadas. De acordo com Skovsmose e Penteado (2008) uma zona de risco, apesar de parecer um momento negativo, é na verdade um espaço que precisa ser explorado pelo professor para ampliar as possibilidades de aprendizagem dos alunos.

Essa situação foi sentida na prática pelos futuros professores. Algumas atividades elaboradas por eles acabaram inserindo-os diante dessa zona de risco. Mesmo com um estudo e testes prévios, não foi possível prever que as atividades os levariam a uma situação inusitada.

O grupo de estudos elaborou uma atividade que convidava os estudantes a investigarem a propriedade de que, em um paralelogramo, mesmo arrastando e modificando as posições de seus vértices, os ângulos opostos sempre são iguais. Conforme mostra a Figura 5, a ideia da atividade era que os pontos *A, B, C* e *D* do paralelogramo fossem arrastados pela tela do computador e o aluno verificasse que realmente os ângulos opostos continuavam iguais.

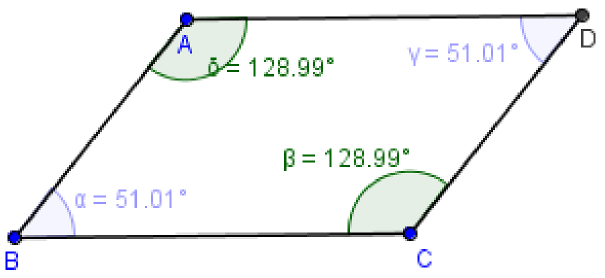


Figura 5 – Atividade elaborada pelo grupo

Nessa atividade, aparentemente, nada poderia sair errado. Apesar disso, quando um estudante arrastou o ponto A "para trás" do ponto B, invertendo a posição do paralelogramo, o *software* acabou mudando a marcação dos ângulos de interno para externo, conforme pode ser notado na Figura 6.

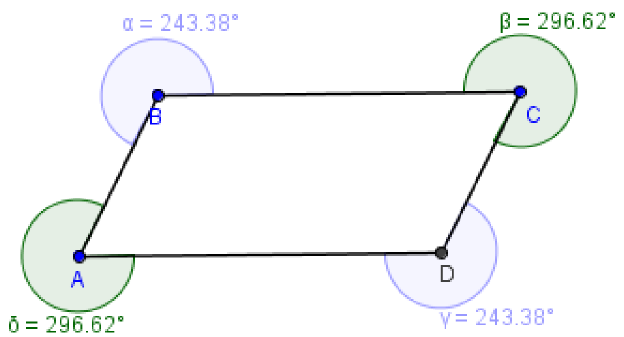


Figura 6 – Atividade elaborada pelo grupo

Ana Lígia estava conduzindo a atividade com a turma e, ao se deparar com essa situação, tentou recuar perante a zona de risco, voltando para uma zona de conforto, ao dizer para o aluno que o foco da aula era analisar os ângulos internos do paralelogramo e não os externos, limitando assim outras possibilidades de aprendizagem que estavam aparecendo na atividade. Essa postura foi motivo de discussão em um dos encontros de avaliação realizado pelo grupo.

> **[Reunião do Grupo]**
>
> ***Keila:*** *O que eu não achei muito interessante foi que você fez os alunos voltarem ao paralelogramo anterior, aquele que os ângulos eram internos. Você poderia ter os deixado terminar a conclusão que estavam chegando. A questão é que a partir do momento que você faz o aluno voltar, você acaba tirando um pouco da atenção dele e ele acaba perdendo aquele entusiasmo que ele estava com a atividade.*
>
> ***Ana Lígia:*** *Na realidade aconteceu que eles fizeram isso, arrastaram os pontos e os ângulos ficaram externos. Então fui e expliquei. Só que falei para eles que "isso não é a questão da aula, é para a gente trabalhar os ângulos internos..." daí eu falei que o restante do ângulo externo seria a soma com o ângulo interno para dar 360º. Então expliquei para todos os grupos. Quando começaram a ficar alvoroçados falei que "o foco da aula não é esse, é para ver os ângulos internos" então eles falaram "ah não, ta bom, ta bom...". Eles até começaram a calcular os ângulos externos para achar os ângulos internos e tal. Mas depois eles voltaram para o foco da aula.*

Nesse caso é possível notar que professora da turma recuou perante a zona de risco, conduzindo o grupo de volta ao que ela considerava como "foco da aula", parecendo negligenciar toda a proposta de atividades investigativas também estudadas pelo grupo. De acordo com Penteado (2001) isso é comum já que em alguns momentos prevalece a tendência de auto proteção do professor, mostrando a tensão que envolve o estar em uma zona de risco e ir para uma zona de conforto.

Outra atividade também levou o professor da turma a se deparar em uma zona de risco. A atividade destacada na Figura 7, os alunos investigavam a propriedade de que em duas retas concorrentes os ângulos opostos pelo vértice são sempre iguais.

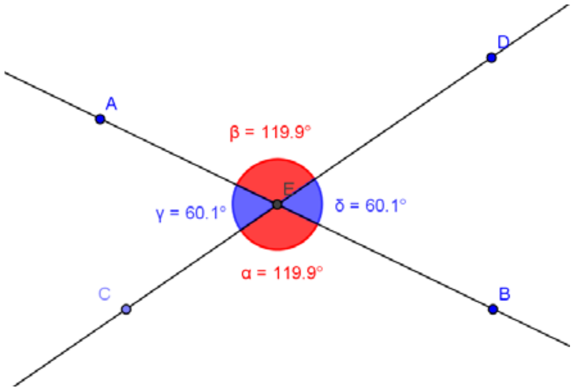


Figura 7 – Atividade elaborada pelo grupo

Aparentemente também não havia nenhuma dificuldade em trabalhar com essa atividade. Apesar disso, um dos estudantes arrastou o ponto *C* de forma que ele ficou entre os pontos *E* e *D* e o *software* mudou a marcação dos ângulos, dando a falsa sensação de que o teorema explorado pela atividade não era válido (Figura 8).

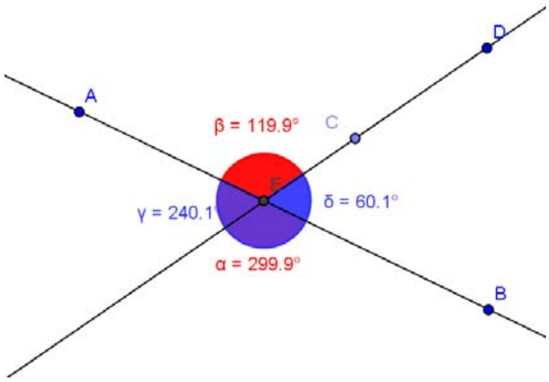


Figura 8 – Atividade elaborada pelo grupo

Como proceder diante disso? O professor sabe que a propriedade é válida sempre, mas a tela do computador mostra algo que contradiz isso. Vejamos o professor da turma fez.

> **André:- "***Na hora que eu percebi o problema, comecei a conversar com a dupla e eu ia questionando para ver o que estava acontecendo:*
>
> **André: -** *Que valor está dando ai?*
> **Dupla**:- *ah, é 300°.*
> **André: -** *e qual era o valor inicial?*
> **Dupla: -** *a, era 120°*
> **André: -** *qual era a diferença do maior para o menor?*
> **Dupla: -** *é 180º...*
> **André: -** *180º não são dois ângulos retos, então é uma meia circunferência*
> **Dupla: -** *é verdade, o ângulo passou daqui para baixo..."*
>
> **André: -** *"Então eles queriam enunciar isso. Ai eu disse que isso na verdade é porque o software está fazendo a leitura do ângulo AÊC, e não importa onde o ponto A estiver, nessa reta ou nessa reta (aqui ele quis dizer na semi reta EA ou entre os pontos E e B na semi reta EB)."*
> **Pesquisador: -** *"Você falou isso para eles?"*
> **André: -** *"Isso. Ele vai ler esse ângulo, a gente marcou o ângulo central, mas o ponto é deslocável. Você pode deslocá-lo pela reta. A dupla estava motivada para fazer a conjectura de uma maneira coerente, com uma linguagem matemática. E para uma aula investigativa isso é muito bom."*

Mesmo que o software possa ter confundido um pouco os alunos, o professor da turma naquele momento mostrou outra possibilidade para que pudessem explorar um acontecimento novo que surgiu em decorrência da atividade. Embora não tivesse dado continuidade ao processo de investigação, sua fala é um indício de que percebeu a potencialidade de uma zona de risco para a aprendizagem matemática no sentido do que discutem Penteado e Skovsmose (2008).

Analisando essa atividade, pode-se perceber que, da mesma forma em que a atividade do paralelogramo mostrada na Figura 5 e 6, a marcação dos ângulos acabou sendo uma limitação do Geogebra no trabalho com ângulos. Observando essa atividade passo a passo é possível entender como essa limitação ocorreu. Depois de construído as retas concorrentes marcaram-se os pontos A e B sobre uma reta e os pontos C e D sobre a outra. O ponto *E* é a intersecção das duas retas. Marcou-se o ângulo *CÊB* obtendo 119,99° (Figura 9).

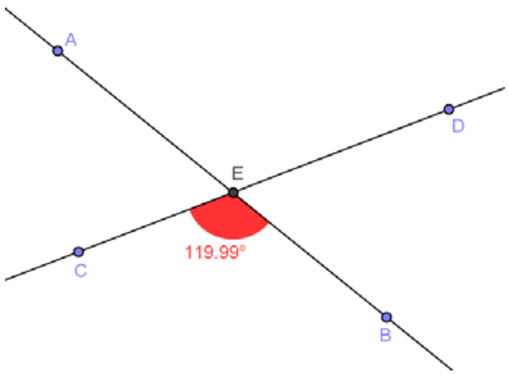


Figura 9 – ângulo CEB

Ao arrastar o ponto C de forma que ele fique entre os pontos *E* e *D* a marcação do ângulo “muda” para 299,99°, conforme mostra a Figura 10.

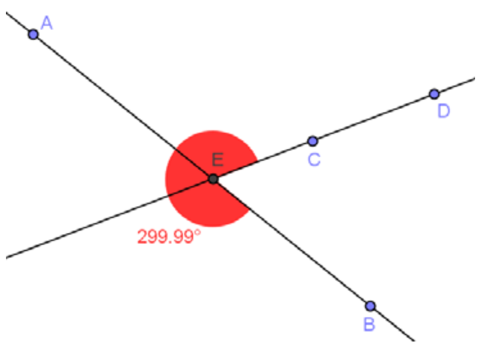


Figura 10 – ângulo CEB

Isso ocorre já que o Geogebra trabalha com marcações de ângulos até 360°. Para ele o ângulo *CÊB* é igual ao ângulo *DÊB*, e o programa entende que ambos são diferentes do ângulo *BÊD*. Quando o usuário marca o ângulo *DÊB*, seguindo o sentido horário, o Geogebra exibe o ângulo “externo”, ou seja, obtuso (Figura 11).

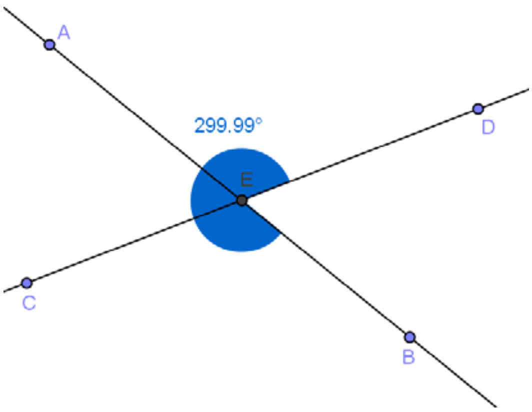


Figura 11 – ângulo DEB

Quando o usuário marca o ângulo *BÊD*, seguindo o sentido anti-horário, o programa exibe o ângulo “interno” (Figura 12). Dessa maneira o processo de marcação dos ângulos é diferenciado de um ponto para o outro. Por exemplo, para marcar o ângulo *DÊB* o usuário deve escolher a ferramenta “Ângulo” e clicar, nessa ordem, nos pontos *D, E* e *B*. Diferentemente, a marcação do ângulo *BÊD* é feita clicando, nessa ordem, nos pontos *B, E* e *D*.

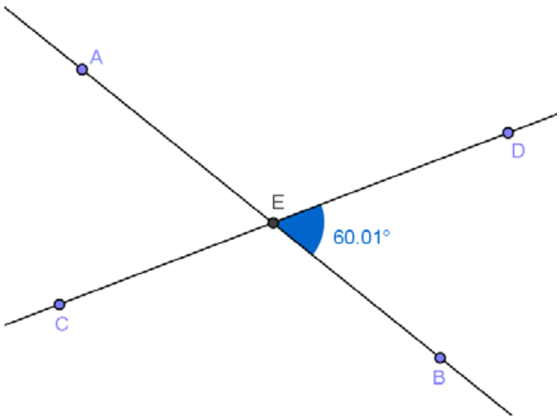


Figura 12 – ângulo BÊD

Conceitualmente falando, considero não existir falha nessa perspectiva dos programadores do *software*. Apesar disso, ao elaborar a atividade dos ângulos opostos pelo vértice, os participantes do grupo de estudos desconheciam essa característica do Geogebra e, de certa forma, acabaram entrando em uma zona de risco.

Mesmo ocorrendo os imprevistos em um ambiente de aprendizagem baseado na utilização das TIC, Penteado e Skovsmose (2008) valorizam que caminhando em direção à zona de risco o professor pode aperfeiçoar sua prática profissional, pois a incerteza e a imprevisibilidade geradas nesse podem trazer possibilidades para o desenvolvimento do aluno, do professor e de situações de ensino e aprendizagem. Além disso, uma zona de risco possui a potencialidade de provocar mudanças e impulsionar o desenvolvimento de todos os envolvidos. Dessa forma o professor que utiliza as TIC em seu cotidiano deve conhecer as potencialidades e limitações de cada programa no sentido de tornarem-se possibilidades de aprendizagem.

Após o fato ocorrido durante a aplicação da atividade de ângulos opostos pelo vértice, o grupo de estudos se reuniu novamente e refletiram juntos até encontrarem uma solução para o problema apresentado na atividade. Concordando com Penteado e Skovsmose (2008) são atitudes como essas que fazem a zona de risco propiciar uma possibilidade para aprendizagem.

Outro fato a se destacar é a importância do professor conhecer diferentes *softwares* para tratar do mesmo tema. No caso dessa última atividade apresentada, o imprevisto não ocorreria se os futuros professores tivessem usado o Cabri-Géomètre. Dessa forma, a opção dos programadores do *software* acaba influenciando na maneira que cada usuário trabalha com o ambiente de geometria dinâmica. Nesse caso o imprevisto não ocorreria pois o Cabri-Géomètre trabalha com marcações de ângulos menores ou iguais a 180°. Isso pode ser notado na Figura 13, onde foi elaborada a mesma atividade sobre ângulos opostos pelo vértice no Cabri.

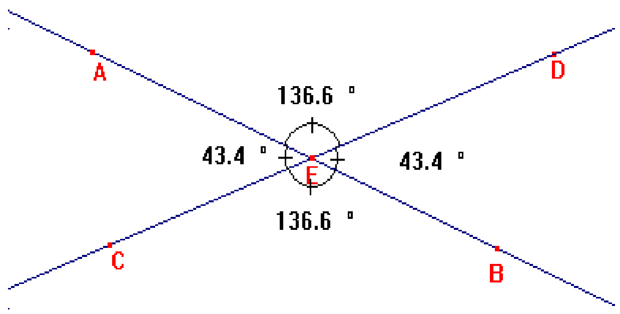


Figura 13 – Atividade de ângulos opostos construída no Cabri

Arrastando os pontos da mesma forma que na atividade elaborada no Geogebra a marcação do ângulo AÊC fica igual ao ângulo AÊD, conforme mostra a Figura 14. O mesmo ocorre com os ângulos *CÊB* e *DÊB*. Para o Cabri, não importa a ordem de marcação dos ângulos, ou seja, o ângulo DÊB é igual ao ângulo BÊD.

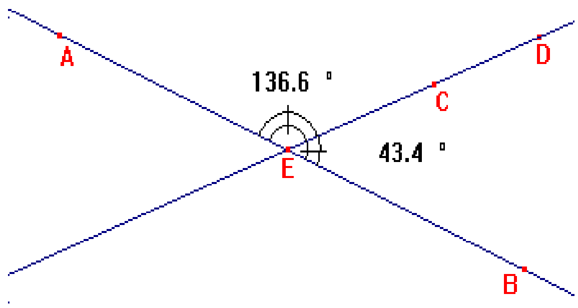


Figura 14 – Atividade de ângulos opostos construída no Cabri

Considerações Finais

Neste artigo defende-se a concepção de que utilizar *softwares* de geometria dinâmica nas aulas de matemática deixa o professor mais vulnerável a se deparar com situações imprevistas. Isso caracteriza o que Penteado (2001) define como zona de risco. Apesar disso, fundamentado em Penteado (ibidem) e Skovsmose e Penteado (2008) considero que é o movimento entre uma zona de conforto e uma zona de risco que trará maior possibilidade de aprendizagem aos estudantes.

Foram apresentados episódios que aconteceram com um grupo de estudos formado por alunos de licenciatura em matemática destacando como o estudo teórico serviu de apoio para a atuação durante o desenvolvimento de oficinas com alunos do ensino médio. Além disso, os ambientes de geometria dinâmica apresentam grande potencial para que atividades investigativas sejam elaboradas. O modo arrastar permite que o estudante crie e teste suas próprias conjeturas. Porém, é muito importante que as atividades elaboradas nesse ambiente sejam bem direcionadas. No caso da oficina elaborada pelos participantes da pesquisa, a abordagem realizada foi baseada em Skovsmose (2008) e Ponte, Brocardo e Oliveira (2006), onde os autores, mesmo não necessariamente utilizando um ambiente computacional, apresentam diversos recursos para que o professor crie um ambiente de aprendizagem que facilite a aprendizagem. Concordando com Valente (1993) os ambientes de geometria dinâmica não podem ser uma extensão do que já ocorre tradicionalmente na sala de aula.

Outro fato importante é a necessidade do professor conhecer as limitações do *software* que utiliza em suas aulas, pois a maneira de pensar dos programadores acaba influenciando a maneira de lidar com o programa. O artigo mostrou o passo a passo de como o Geogebra trata a marcação dos ângulos, enfatizando assim a necessidade de adaptar as atividades, diminuindo a margem para outras interpretações das mesmas. O fato é que as TIC estão presentes em todos os ramos e na educação apresentam uma infinidade de recursos. Utilizar um ambiente de geometria dinâmica de uma forma investigativa é apenas uma, das várias abordagens que as TIC propiciam para professores.

Os dados da pesquisa mostraram que mais importante do que dominar as ferramentas de um software, é preciso ter condições de, pedagogicamente, elaborar atividades que atingiam a curiosidade e o senso crítico dos estudantes. O emprenho dos futuros professores em desenvolver a oficina e os estudos realizados por eles acerca da investigação matemática em sala de aula e do uso das novas Tecnologias da informação e comunicação contribuiu positivamente para a futura prática profissional dos envolvidos, propiciando um aumento no repertório dos futuros professores, colaborando para que os mesmos criassem autonomia na procura de formas alternativas para o ensino da matemática.

A iniciativa da formação do grupo de estudos com licenciandos pode ser uma iniciativa também adotada nas escolas com professores em serviço, visto que as discussões e avaliações realizadas pelos participantes do grupo de estudos foram fundamentais para o sucesso das oficinas na escola pública. Consideramos que, quando o professor está inserido num grupo ele tem o estímulo e condições para refletir sobre todas as situações ocorridas em sala de aula, principalmente encarar os imprevistos decorrentes de um ambiente computacional, fato que impulsiona o movimento para o desenvolvimento profissional.

Outra consideração importante na formação do professor é o fato do mesmo assumir responsabilidades que vão além da teoria em sala de aula. Os participantes tiveram essa oportunidade, já que eles lideraram uma oficina pedagógica, além de trabalharem com alunos de uma escola pública, encarar momentos imprevistos durante a aula e, principalmente, utilizar as TIC em sua prática docente. Essa é uma maneira de quebrar paradigmas e pré-conceitos a cerca do uso de diferentes mídias em sala de aula. Outro fato é que os licenciandos puderam lidar com situações imprevistas que ocorrem no cotidiano em sala de aula e perceberam que o caminhar em direção a zona de risco é capaz de promover o crescimento profissional dos envolvidos (SKOVSMOSE, PENTEADO, 2008). Para encerrar, baseado nos dados da pesquisa, considero que a apropriação do software Geogebra e da perspectiva de investigação matemática em sala de aula foram contribuições muito importantes propiciadas pela participação dos licenciandos no grupo pesquisado e tal apropriação ocorreu naturalmente no decorrer dos encontros.

Referências Bibliográficas

BAULAC, Y., BELLEMAIN, F., LABORDE, J.M. (designers); CABRI: The interactive geometry notebook Cabri-Géomètre**. [Computer software]. Pacific Grove, CA: Brooks-Cole, 1992.**

BORBA, M.C.; PENTEADO, M.G. **Informática e Educação Matemática** – 2.Ed. Belo Horizonte – Autêntica, 2001.

BROCARDO, J. As investigações na sala de aula de matemática: um projeto curricular no 8º ano**. 2001. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade de Lisboa: APM.**

CLEMENTS D.H., SARAMA, J., YELLAND N.J., GLASS, B.; Learning and teaching geometry with computers in the elementary and middle school. In: BLUME G.W., HEID, M.K., (Eds). Research on technology and the teaching and learning of Matematics: Volume 1. Research Systheses**. Charlotte, North Carolina, USA: Information Age Publishing, Inc., 2008, p.109-154.**

GOLDENBERG, E.P., SCHER, D., FEURZEIG, N.; What lies behind dynamic interactive geometry software? In: BLUME G.W., HEID, M.K., (Eds). Research on technology and the teaching and learning of Matematics: Volume 2. Cases and Perspectives. **Charlotte, North Carolina, USA: Information Age Publishing, Inc., 2008, p.53-88.**

HOHENWARTER, M. (designer); **Geogebra - Dynamic Mathematics for Schools,** versão 3.0, [computer software] 2007; Departamento de Matemática Aplicada da Universidade de Salzburgo, Áustria.

HOLLEBRANDS, K., LABORDE, C., STRÄBER, R.; Technology and the learning of geometry at the secondary level. In: BLUME G.W., HEID, M.K., (Eds). Research on technology and the teaching and learning of Matematics: Volume 1. Research Systheses. **Charlotte, North Carolina, USA: Information Age Publishing, Inc., 2008, p.155-206.**

LÉVY, P.; Cibercultura. **Tradução de Carlos Irineu da Costa. São Paulo: Ed.34, 1999, 264p. (Coleção TRANS);**

OLIVEIRA, H., PONTE, J. P., SANTOS, L., & BRUNHEIRA, L. Os professores e as atividades de investigação. In P. Abrantes, J. P. Ponte, H. Fonseca, & L. Brunheira (Eds.), Investigações matemáticas na aula e no currículo **(pp. 97-110). Lisboa: Projecto MPT e APM, 1999.**

PENTEADO, M.G. Computer-based learning environments: risks and uncertainties for teacher. **Ways of knowing Journal,** 1 (2), 23–35, 2001.

PONTE, J.P.; OLIVEIRA, H.; CUNHA, M.H.; SEGURADO, M.I.; Histórias de investigações matemáticas; **Lisboa: Instituto de Inovação Educacional, 1998, 142 p.**

PONTE, J. P., FERREIRA, C., VARANDAS, J., BRUNHEIRA, L. e OLIVEIRA, H. (1999). A relação profesor-aluno na realização de investigações matemáticas. **Lisboa: Projecto Matemática Para Todos e Associação de Professores de Matemática.**

PONTE, J.P.; BROCARDO, J.; OLIVEIRA, H. Investigações Matemáticas na sala de aula. **(Coleção Tendências em Educação Matemática, 7). Belo Horizonte: Autêntica, 2006, 152 p.**

PORFÍRIO, J. & OLIVEIRA, H. Uma reflexão em torno das tarefas de investigação. In: P. ABRANTES, J. P. PONTE, H. FONSECA, & BRUNHEIRA (Eds), Investigações matemáticas na aula e no currículo**. Lisboa: Projecto MPT e APM, 1999, p.111-118.**

ROCHA, A.; PONTE, J.P.; Aprender matemática investigando. Revista Zetetikê**, v. 14, n. 26. p. 29-54; 2000**

SKOVSMOSE, O.; **Desafios da reflexão em educação matemática crítica;** coleção Perspectivas em Educação Matemática; tradução: Orlando de Andrade Figueiredo, Jonei Cerqueira Barbosa. – Campinas – SP: Papirus, 2008, 138 p.

VALENTE, J.A.; Computadores e conhecimento: repensando a educação**. Campinas, SP: UNICAMP, 1993.**

WINTERLE, P., **Vetores e Geometria Analítica.** São Paulo, Markron Books, 2000.