EQUAÇÕES DIOFANTINAS LINEARES: UM VIÉS HISTÓRICO-EPISTEMOLÓGICO COMO RECURSO PARA INTRODUZIR DIFERENTES ESTRATÉGIAS DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS.

LINEAR DIOPHANTINE EQUATION: AN HISTORICAL AND EPISTEMOLOGICAL APPROACH AS RESOURCE TO INTRODUCE DIFFERENT SOLVING PROBLEMS STRATEGIES.

Wagner Marcelo Pommer

(Pós-graduação da FEUSP, wmpommer@usp.br)

Clarice Peres Carvalho Retroz Pommer

(Escola de Aplicação da FEUSP, claricepommer@usp.br)

Resumo

Este artigo discute a relevância da utilização de situações-problema envolvendo tópicos da teoria Elementar dos Números no ciclo básico, enfatizando aspectos da origem e desenvolvimento histórico-epistemológico das Equações Diofantinas Lineares. A proposta se embasou na apresentação de alguns problemas de indeterminação linear que surgiram no percurso da História da Matemática, que se constitui em recurso didático para introduzir estratégias de resolução que valorizem aspectos da teoria Elementar dos Números e que permite melhor entender seu papel para enriquecer o ensino da matemática.

Palavras-chave: Equações Diofantinas Lineares; Estratégias de resolução; Problemas de Indeterminação Linear; Teoria Elementar dos Números.

Abstract

This paper discusses the relevance on considering problem-situation involving aspects of Elementary Number Theory on basic school, emphasizing aspects from Linear Diophantine Equation creation and development. Our proposal is based on the presentation of some linear indeterminate problems that appeared across Mathematical History development, that constitutes itself as a didactical resource to introduce resolution strategies which make visible important aspects from Elementary Number Theory and that allow us better understand its significance to enrich mathematical education.

Keywords: Linear Diophantine Equation; Resolution Strategies; Linear Indeterminate Problems; Elementary Number Theory.

Introdução

Em certo sentido, a viabilização de problemas práticos no ensino de Matemática, valorizada e ressaltada pela Proposta Curricular, contemplada por São Paulo (2008), já era abordada pelos antigos egípcios e babilônios, através de charadas, adivinhações e problemas diversos, que foram sendo incorporados à cultura ocidental.

Dentre estes, os denominados problemas de indeterminação linear, pertencentes à Teoria Elementar dos Números[1], são raramente abordados no Ensino Básico brasileiro. Os autores Campbell e Zazkis (2002) questionam os motivos da pouca ênfase no estudo de temas da Teoria dos Números dentro da Matemática do ciclo básico. Esta área apresenta oportunidades que são:

> [...] interessantes, agradáveis e úteis. Estas explorações têm contribuições na resolução de problemas, no entendimento e desenvolvimento de outros conceitos matemáticos, em ilustrar a beleza da matemática e no entendimento dos aspectos humanos do desenvolvimento histórico dos números (CAMPBELL; ZAZKIS, 2002, p. 2).

O currículo de matemática do Ensino Fundamental apresenta tópicos da Teoria Elementar dos Números abordando os números naturais e inteiros: propriedades e operações básicas, decomposição em fatores primos, algoritmo da divisão, estudo da divisibilidade, múltiplos, divisores, máximo divisor comum, mínimo múltiplo comum, algoritmo de Euclides, números primos, critérios de divisibilidade e o Teorema Fundamental da Aritmética. Porém, após a apresentação destes tópicos, estes itens são raramente reutilizados no decorrer dos estudos do ciclo fundamental e médio.

Neste ponto, assumimos a posição de Machado (2009), que ressalta não ser o ensino de conteúdos a meta essencial das escolas, mas também o favorecimento de situações em que se desenvolvam competências essenciais. Como competência, Machado (2009) concebe a capacidade de uma pessoa tem, em determinado âmbito, em mobilizar recursos próprios para realizar algo dentro de um projeto.

Entendemos que, no ciclo básico, a aprendizagem de matemática pode ser posta na forma de um projeto de ensino, desde que possibilite a expressão e argumentação do aluno em diferentes linguagens (natural, numérica, algébrica, gráfica), ao enfrentar situações-problema e tomar decisões que extrapolem a capacidade do âmbito original, examinando e vislumbrando outras possibilidades de enfrentamento dos contextos e possibilitando outros pontos de vista, papeis ressaltados na proposta do ENEM, conforme Brasil (2009).

Nesse sentido, a Teoria Elementar dos Números é uma área na qual existem questões simples, cuja natureza essencialmente numérica no âmbito dos inteiros possibilita um entorno que facilita a mobilização do aluno para o desenvolvimento de várias estratégias sem necessariamente recorrer à aplicação de algoritmos, assim como favorece a interpretação dos enunciados e o desenvolvimento de conjecturas.

---

[1] Segundo Rezende (2007), a teoria Elementar dos Números é uma área de estudos que se situa no contexto dos números inteiros.

Ferrari (2002) aponta que dentre as diversas possibilidades é extremamente importante o uso da estratégia da tentativa e erro[2], a verificação direta através de cálculos numéricos (mentais ou por escrito), assim como o uso de propriedades e conceitos dos números, de modo a possibilitar que os objetos a serem estudados façam sentido para o aluno, incentivando o desenvolvimento e a valorização de heurísticas[3].

Um aspecto importante da Teoria Elementar dos Números é a possibilidade de trabalhar conceitos de modo articulado e complementar com a Álgebra, conforme destacam Maranhão, Machado e Coelho (2005). Estes aspectos apontados pelas autoras podem ser percebidos através da análise do desenvolvimento histórico destes campos, permitindo que no ensino sejam abordadas questões cuja solução completa requer manejo de conceitos de forma integrada.

Estas ponderações estão em conformidade com os PCNEM, Brasil (1998), que enfatizam a necessidade de contemplar estudos matemáticos envolvendo os números, suas operações e propriedades, tanto na Aritmética, como na Álgebra.

Campbell e Zazkis (2002) caracterizam a Teoria dos Números não só como o estudo dos tópicos básicos e usuais como, por exemplo, números inteiros, múltiplos, divisores, que pertencem ao currículo de Matemática do Ensino Básico, como também incluindo tópicos algébricos. Os autores acrescentam que a resolução de problemas envolvendo os tópicos de Teoria dos Números não envolve a aplicação direta de algoritmos, mas necessitam do desenvolvimento de habilidades como interpretar, conjecturar e incentiva a busca de heurísticas.

Neste ponto, posicionando o lugar das Equações Diofantinas Lineares[4] dentro do ensino da Matemática, faço referência a Resende (2007), que desenvolveu a análise epistemológica e histórica da Teoria dos Números. O citado tema pode ocorrer num quadro de reutilização de conceitos de múltiplos e divisores, assim como pela possibilidade de exploração de diferentes estratégias de resolução.

Além dos fatores já delineados, o estudo das equações diofantinas lineares[5] no ciclo básico favorece a superação da tensão bipolar entre a Matemática Discreta e a Matemática do Contínuo. Esse par se refere a duas ações fundamentais da Matemática, quais sejam: contar e medir. Assim, de modo geral, o discreto:

> [...] se revela por sinais separados, que se põe à parte. Vem do latim *discretus*, particípio passado do verbo *discernere* (discernir), que significa discriminar, separar, distinguir, ver claro. [...] Já *contínuo* vem de *com-tenere* (ter junto, manter unido, segurar). Contínuo é o que está imediatamente unido à outra coisa (BROLEZZI, 1996, p. 1).

---

[2] Pozo (1988) retrata a tentativa e erro como a estratégia mais utilizada pelos povos antigos e medievais.

[3] Segundo Pozo (1998), procedimentos heurísticos ou estratégias são planos e metas desenvolvidas pelos alunos que os guiam, de forma global, à busca de solução de problemas. Em oposição, procedimentos algorítmicos são baseados em regras e operações pré-determinadas, que viabilizam a solução de forma direta e específica.

[4] A equação diofantina é definida como "[...] uma equação algébrica com uma ou mais incógnitas e coeficientes inteiros, para a qual são buscadas soluções inteiras. Uma equação deste tipo pode não ter solução, ou ter um número finito ou infinito de soluções" (COURANT; ROBBINS, p.59, 2000).

[5] Os autores apontam outros possíveis temas a serem abordados num curso de Teoria Elementar dos Números, como congruência modular, frações contínuas e teoria de códigos.

Conforme Moura (2005), a transposição didática geralmente apresentada nos livros didáticos do ciclo básico favorece uma separação entre essas correntes. Nas séries iniciais do Ensino Fundamental há prevalência do discreto (estudo envolvendo os números naturais, inteiros e racionais não negativos), que se torna gradualmente uma ênfase na Matemática do contínuo no decorrer do Ensino Fundamental, enfatizado pela introdução dos números reais.

Brolezzi (1996) atenta para a necessidade de ocorrer um movimento no sentido de aproximá-las. Deste modo, a Matemática Discreta e a Matemática do Contínuo não são duas partes disjuntas, mas ao contrário, há entre essas duas correntes uma elegante e importante interação, que poderia e deveria ser mais explorada no ensino da Matemática Elementar.

Existem questões interessantes e simples envolvendo números inteiros, mas não são usualmente abordadas na Escola Básica, pois geralmente são resolvidas no conjunto dos números reais e ajustam-se as soluções particulares para os números inteiros. Acrescentadas as outras considerações já tecidas, as equações diofantinas lineares se abordadas não como tema curricular, mas em situações de ensino contextualizadas propícias e enriquecedoras para a aprendizagem da matemática do ciclo básico, permitem uma exploração da tensão inerente ao par discreto e contínuo.

Para melhor compreensão destes aspectos, este texto almejou realizar uma abordagem histórico-epistemológica do objeto matemático equação diofantina linear, delineando um breve percurso histórico para evidenciar a origem e desenvolvimento, através da utilização da resolução de problemas como recurso didático para introduzir estratégias de resolução que valorizem aspectos da teoria Elementar dos Números e que permitem entender melhor seu papel para enriquecer o ensino da matemática.

A utilização da História da Matemática como recurso didático tem como fundamento e concepção se ligada ao desenvolvimento de idéias e conceitos pelos povos antigos, trazidos à luz da época mais atual. Este enfoque permite entender como foi produzido o conhecimento, que, segundo Machado (1990), é necessário e permite em inúmeras situações revelar uma continuidade essencial em relação ao significado de temas tratados na escola básica.

> Ninguém pode ensinar qualquer conteúdo, das ciências às línguas, passando pela matemática, sem uma visão histórica de seu desenvolvimento. É na História que se podem perceber as razões que levaram tal ou qual relação, tal ou qual conceito, a serem constituídos, reforçados ou abandonados (MACHADO, 2004, p. 103).

Desvendando o papel de Diofanto em relação as equações indeterminadas

É impossível não se esclarecer o papel de Diofanto no desenvolvimento das equações diofantinas, devido à explícita menção nominal em tal tema. De Diofanto, matemático grego, pouco se sabe, presumindo-se que nasceu em cerca de 200 a.C. em Alexandria, no Egito, uma colônia grega e morreu em cerca de 284 a.C., também em Alexandria.

Nesta jornada, referencio Toynbee[6] (apud Lintz, 1999) que, na História da Matemática, define organismo como um objeto que se caracteriza por uma expressão manifestada e percebida no mundo exterior e que o distingue de outros objetos, possuindo três estágios de evolução: ornamentação primitiva, arte e ornamentação posterior.

O primeiro estágio, o da ornamentação primitiva, possui como características básicas o pioneirismo, a criação de formas expressivas, a tentativa de esboçar seus traços característicos, sem preocupação de estruturação, organização e sintaxe. Evoluindo para o estágio da arte, o material desenvolvido no estágio da ornamentação primitiva se organiza e se estrutura, numa sintaxe equilibrada de seus elementos. Por último, no estágio da ornamentação posterior ocorre um excesso de racionalismo, originando um tecnicismo e especialização, esgotando-se o valor simbólico dos objetos, indicando um envelhecimento dos elementos, seja através da tentativa de revitalização ou criando uma ilusão de progresso continuado. Nesses termos, Spengler (apud Lintz, 1999) considera como civilização àquela do estágio de ornamentação posterior de uma cultura histórica.

Na visão da História adotada por Lintz (1999) o caráter temporal cronológico das civilizações, usualmente considerado pela perspectiva cartesiana não é o fator preponderante, mas sim a evolução de certas características presentes em determinadas civilizações ou culturas. Assim,

> [...] história pode ser definida como o *estudo das culturas históricas* e suas relações, sendo *cultura histórica* definida como um organismo que se exterioriza através de formas expressivas inerentes a um grupo de povos com uma imagem comum de Universo (LINTZ, 1999, p. XXX).

Encontramos em Boyer (1991) e Rocque; Pitombeira (1991) menção de que as obras de Diofanto de Alexandria representaram um novo ramo, com metodologia própria de Diofanto e, em certa medida, estranha ao modo de pensar dos gregos antigos. Uma especificidade a se relatar é que Diofanto utiliza explicitamente um símbolo para a incógnita (ζ), porém sua problemática aparentemente segue a tradição clássica grega, ao estilo de Thales, Pitágoras e Euclides[7], que corresponde ao período de ornamentação primitiva da cultura grega.

Este dúbio aspecto se faz presente, ao serem encontrados muitos problemas abordados em Diofanto com motivação geométrica, porém a forma de resolvê-los não faz uso da Geometria, a moda clássica grega, mas utiliza palavras e manipulações algébricas, sem o recurso metodológico das figuras (Álgebra Geométrica).

Outro aspecto aparentemente grego da obra de Diofanto refere-se ao trabalho com números inteiros, sendo as equações apresentadas como casos numéricos particulares, provavelmente presumindo-se que o autor considera que nas outras situações numéricas o procedimento é análogo.

Nesse sentido, o que se destaca no aspecto algébrico:

---

[6] TONYBEE, A. **A Study of History**. Oxford Univ. Press, 1962-64.

[7] Struik (1992) ressalta que o raciocínio algébrico, presente em Euclides, é totalmente realizado numa forma geométrica (Livro II de Euclides: Álgebra Geométrica), sendo este modo de expressão remontando a teoria das proporções de Eudoxo (Livro V de Euclides).

> [...] da obra de Diofanto é o pioneirismo em que as soluções são encontradas para um problema particular e, com o correr da exposição, vão se acumulando regras de manipulação de equações, algumas altamente engenhosas, dependendo de artifícios sutis que demonstram a grande capacidade de seu autor (LINTZ, 1999, p. 365).

Assim, a obra de Diofanto contém uma maior proximidade com a álgebra babilônica[8] e se afasta da metodologia grega. Porém, uma diferença fundamental é que:

> [...] enquanto os matemáticos babilônicos se ocupavam principalmente com soluções aproximadas de equações determinadas [...], [a obra de] Diofanto de Alexandria é quase toda dedicada à resolução exata de equações, tanto determinadas como indeterminadas (BOYER, 1991, p. 132).

Assim, Lintz (1999) considera Diofanto inserido na cultura árabe, no período denominado de estágio da arte, pelo fato deste último evitar a problemática mais generalizada, preferindo a utilização do número conceitualmente aproximado da cultura mágica. Nesta concepção árabe, o número é sacramental, com ar de mistério, pois adquire a expressão e o sentido de substância, ou seja, aquilo que é oculto e necessita de uma liturgia para ser descoberto, regado de palavras, receitas, normas ou rituais para serem executados, de modo a se obter o número oculto[9], desvelando a realidade escondida através das manipulações algébricas[10], que é um traço característico da cultura árabe.

Com relação a *Arithmetica,* obra mais conhecida de Diofanto, que originalmente continha 13 livros, dos quais seis se preservaram, é uma coletânea de cerca de 150 problemas resolvidos de aplicação de álgebra[11], conforme Lins e Gimenez (2005), onde técnicas diversas iam sendo introduzidas, envolvendo equações subdivididas em dois grupos: as determinadas e as indeterminadas ou diofantinas. Porém, "[...] não é feita uma distinção clara entre problemas determinados e indeterminados, e mesmo para os últimos, para os quais o número de soluções é geralmente infinito, uma só resposta é dada" (ROCQUE; PITOMBEIRA, 1991, p. 46).

O mérito de Diofanto de Alexandria foi utilizar algumas abreviações introduzindo um tipo de simbolismo algébrico para as incógnitas, porém sem utilizar uma notação algébrica

---

[8] Struik (1992) ressalta que o tratamento altamente engenhoso da resolução das equações indeterminadas por Diofanto revela os traços da civilização babilônica na civilização grega e ainda, arrisca uma associação, ponderando que, talvez, Diofanto fosse um babilônio helenizado, já que sua origem é desconhecida!

[9] Em linguagem atual, o número oculto é a incógnita de uma equação. Linz associa a matemática árabe a concepção da mitologia árabe, que distingue três fases para o mundo: num primeiro instante, ocorre a criação do bem e do mal, numa segunda fase o confronto entre estes extremos e, por último, na terceira fase, a separação e a vitória do bem, quando a variável 'x', que estava de início oculta, através de rituais apropriados e por meio da palavra, é isolada e libertada.

[10] Segundo Aurélio (2003), o termo álgebra provém do árabe al-ğabāra (t), que significa a reintegração daquilo que se quebrou, como a restauração de ossos fraturados, donde deriva o substantivo algebrista. Posteriormente, apareceu na cultura árabe como forma de expressão para cálculos, denominada como a ciência da reintegração e equiparação.

[11] Porém, este livro não forma a base dos textos de Álgebra elementar dos nossos dias, pois Diofanto enfatizava resolver equações através de aplicações numéricas específicas, sem recorrer ao desenvolvimento axiomático ou a teorização. Porém, "[...] mesmo um matemático moderno encontra certa dificuldade para, estudadas as cem primeiras soluções de Diofanto, resolver o centésimo primeiro problema" (HANKEL, 1950 apud KARLSON, 1961, p. 176).

sofisticada. O método utilizado na *Arithmetica* para a resolução de problemas indeterminados tornou-se mais tarde conhecido como Análise Diofantina.

Para compreendermos o papel da obra de Diofanto de Alexandria dentro das fases evolutivas da linguagem algébrica, encontramos três momentos no desenvolvimento da Álgebra:

- a primeira é constituída da fase retórica, onde "[...] não se fazia uso de símbolo nem de abreviações para expressar o pensamento matemático" (FIORENTINI, MIORIM; MIGUEL, 1993, p. 79), sendo considerada a álgebra pré-diofantina.

- a segunda etapa, denominada fase sincopada, iniciada com a obra *Arithmetica,* de Diofanto de Alexandria, onde ele fazia uso de "um símbolo para a incógnita - a letra sigma do alfabeto grego - e utilizou uma forma mais abreviada e concisa para expressar suas equações" (ibidem, p. 80). Posteriormente, os hindus seguiram a forma sincopada desenvolvida inicialmente por Diofanto de Alexandria.

- a terceira, denominada fase simbólica, corresponde "ao momento em que as idéias algébricas passam a ser expressas somente através de símbolos, sem recorrer ao uso de palavras" (ibidem, p. 80). Assim, Viète (1540-1603) introduziu novos símbolos na álgebra e Descartes (1596-1650) consolida esta fase introduzindo as últimas letras do alfabeto $(x, y, z, ...)$ como as quantidades desconhecidas (incógnitas), sendo as letras iniciais do alfabeto $(a, b, c...)$ utilizadas para as quantidades conhecidas (parâmetros).

Diofanto de Alexandria, segundo Milies e Coelho (2003), procurava soluções inteiras ou racionais não negativas em equações indeterminadas[12], atualmente designadas por equações diofantinas, em homenagem póstuma a Diofanto. As equações diofantinas são expressões na forma polinomial onde são procuradas todas as soluções no âmbito do conjunto dos inteiros ou racionais[13]. Atualmente, na maioria dos livros textos, as soluções são procuradas somente na forma de números inteiros, devido à possibilidade de se determinar uma solução equivalente, pois se "[...] uma dada equação tem soluções racionais, uma equação correspondente com soluções inteiras pode ser achada multiplicando a primeira equação por uma constante inteira" (ZERHUSEN; RAKES; MEECE, 2005, p.2).

Em particular, segundo Zerhusen; Rakes; Meece (2005), muitos problemas tratados no livro *Arithmetica*, de Diofanto de Alexandria, são relacionados ao que atualmente denominamos equações diofantinas. Porém, a obra não contém problemas envolvendo as equações indeterminadas de primeiro grau, por que Diofanto de Alexandria não lhes atribuía qualquer importância.

Zerhusen, Rakes e Meece (2005) citam muitos historiadores que pressupõem o não desenvolvimento de um método algébrico geral por Diofanto se deve principalmente as limitações do estilo sincopado de sua notação. Porém, o mesmo texto contrapõe o discurso de Isabella Bashmakova, no livro *Diophantus and Diophantine Equation*, ao ponderar:

[12] Segundo Struik (1992), Diofanto considerava impossível solução envolvendo números irracionais.

[13] Fermat foi o primeiro matemático a tratar questões envolvendo as equações indeterminadas estritamente no âmbito do conjunto dos números inteiros.

> [...] que muitas das técnicas eram mais gerais que os críticos pensam, mas não são reconhecidas como tais devido a limitações em sua notação. Por exemplo, Diofanto não introduz variáveis adicionais num problema, mas prefere introduzir um inteiro arbitrário. Lendo [um] problema [...], encontrado no Livro Arithmetica, tomo 2, pode ser visto que ele [Diofanto] está ciente que qualquer inteiro servirá (ZERHUSEN; RAKES; MEECE, 2005, p.3).

Os problemas de indeterminação linear

Enquanto que situações envolvendo as equações determinadas remontam aos mais antigos textos, como os babilônios, problemas envolvendo equações indeterminadas lineares de duas variáveis, do tipo $ax + by = c$, parecem ter sido abordados somente num período mais recente.

Segundo Dias (2000), problemas de indeterminação linear apareceram em Aryabhata, um matemático hindu que viveu em cerca de 500 d.C. Porém, foi Brahmagupta, outro matemático hindu[14], que viveu em 628 d.C., na Índia central, que trouxe contribuições em um nível elevado na Álgebra ao ter a primazia em propor um método para encontrar as soluções gerais das equações diofantinas lineares. Em particular, transpondo para uma linguagem mais atual, Brahmagupta:

> [...] foi o primeiro a dar uma solução geral da equação linear diofantina [do tipo] ax + by = c, onde *a*, *b* e *c* são inteiros. Para que essa equação tenha soluções inteiras, o máximo divisor comum de *a* e *b* deve dividir *c*; e Brahmagupta sabia que se *a* e *b* são primos entre si, todas as soluções da equação são dadas por x = p + m.b e y = q - m.a, onde *m* é um número inteiro arbitrário (BOYER, 1991, p. 161).

Este método é utilizado atualmente na Análise Diofantina, baseando-se no algoritmo de Euclides e consiste numa série de reduções. Este procedimento, denominado de *cuttaca* ou *pulverizador,* foi abordado por Brahmagupta no livro Brahma-Sphuta-Siddhanta (o sistema correto de Brahma), datado em cerca de 598 d.C., onde o autor resolvia problemas de Astronomia em que se comparavam períodos de revolução de corpos espaciais e também se determinava a posição relativa entre estes. Ore (1988) observa que este método de resolução de equações determinadas antecede em quase um milênio o surgimento em manuais europeus.

Essas ponderações revelam que "[...] Brahmagupta merece muito louvor por ter dado todas as soluções inteiras da equação linear diofantina[15], enquanto que Diofanto de Alexandria havia se contentado em dar uma solução particular de uma equação indeterminada" (BOYER, 1991, p. 161).

Struik (1992) acrescenta que enquanto Diofanto somente admitia soluções positivas das equações indeterminadas, Brahmagupta admitia soluções negativas, mas parece que não é um mérito dele, mas sim de seus predecessores, os astrônomos hindus.

[14] Lintz (1999) coloca que a obra hindu está imersa dentro da cultura árabe.

[15] Boyer (1991) ressalta que Brahmagupta utilizou alguns exemplos de equação indeterminada de Diofanto, dando indícios da influência grega na Índia ou a possibilidade da fonte comum dos babilônios. Outra característica comum em ambos é o uso de linguagem sincopada.

Outro exemplo envolvendo este tipo de problema encontra-se em Mahaviracarya, matemático hindu, no livro Ganita-Sara-Sangraha, de cerca de 850 d.C.

> Problema 1: Nas brilhantes e refrescantes cercanias de uma floresta possuindo inúmeras árvores com seus galhos curvados ao pesar das flores e frutos, árvores como árvores o jambu, a data-palma, a hintala, a palmeira, a punaga e a mangueira – entremeadas com o som dos bandos de papagaios e cucos encontrados perto das fontes de lótus com abelhas zunindo em volta – um número de viajantes entrou com alegria. Havia 63 quantidades iguais de bananas e sete frutas simples. Estas frutas estavam divididas igualmente entre os 23 viajantes. Diga-me, qual é o número de frutas em cada monte?[16] (ORE, 1988, p. 123, tradução nossa).

Passando agora a um manuscrito redigido na Europa do século X, escrito por um autor conhecido somente como Alcuin, encontra-se o seguinte problema:

> Problema 2: Quando 100 'bushels' de grãos são distribuídos entre 100 pessoas de modo que cada homem recebe 3 'bushels', cada mulher recebe 2 'bushels', e cada criança recebe metade de um 'bushel', quantos homens, mulheres e crianças haviam?[17] (ORE, 1988, p. 121, tradução nossa).

Recorrendo a um manuscrito árabe, copiado em cerca de 1200 d.C., mas supostamente com origem anterior a esta data, há o seguinte problema:

> Problema 3: Um pato pode ser comprado por 5 dracmas, uma galinha por 1 dracma, e 20 estorninhos por 1 dracma. Você possui 100 dracmas e deseja comprar 100 aves. Quantas aves de cada tipo você pode adquirir?[18] (ORE, 1988, p. 121, tradução nossa).

No *Líber Abaci*, livro mais conhecido de Leonardo de Pisa, de cerca de 1200 d.C., que se inspirou nos textos árabes, encontram-se problemas dessa natureza. Também, em *Flos,* obra de 1225 d.C., do mesmo autor, há problemas indeterminados do tipo de Diofanto.

Outro tipo de problema encontrado no Lilavati e nos textos hindus se refere a quantidades de flores. Um exemplo retirado deste livro diz:

> Problema 4: A quantidade de rubis sem falhas, safiras e pérolas pertencentes a uma pessoa são 5, 8 e 7 respectivamente; o número de

[16] Problema 1: "Into the bright and refreshing outskirts of a forest which were full of numerous trees with their branches bent down with the weight of flowers and fruits, trees such as jambu trees, date-palms, hintala trees, palmyras, punnaga trees and mango trees – filled with the many sounds of crowds of parrots and cuckoos found near springs containing lotuses with bees roaming around them – a number of travellers entered with joy. There were 63 equal heaps of plantain fruits put togheter and seven single fruits. These were divided evenly among 23 travellers. Tell me now the number of fruits in each heap". Modelando este problema, obtém-se a equação $63x + 7 = 23y$, onde x é o número de bananas a serem igualmente distribuídas e y é o número de viajantes.

[17] Problema 2: "When 100 bushels of grain are distributed among 100 persons so that each man receives three bushels, each woman two bushels, and each child half a bushel, how many men, women, and children are there?". Bushel é uma medida de capacidade volumétrica de grãos de cereais, utilizada ainda hoje em dia, correspondendo a 35,238 litros nos E.U.A. e 36,367 litros na Inglaterra.

[18] Problema 3: "One duck may be bought for 5 drachmas, one chicken for 1 drachma, and 20 starlings for 1 drachma. You are given 100 drachmas and ordered to buy 100 birds. How many will there be each kind?". Um dracma é uma moeda e peso da Grécia antiga, equivalente a 1/6 da onça inglesa (1,772 g).

> gemas do mesmo gênero pertencente a uma outra pessoa são 7, 9 e 6", respectivamente; ainda, um deles tem 92 moedas, o outro 62 moedas, sendo ambos igualmente ricos. Diga-me rapidamente, amigo inteligente, que lida com a arte da Álgebra, qual é o preço de cada espécie de gema?.[19] (ORE, 1988, p. 123, tradução nossa).

Também, em um manual germânico de Rydolff, escrito em torno de 1526 d.C., encontram-se situações como as apresentadas acima:

> Problema 5: Num restaurante, uma festa de 20 pessoas paga uma conta de 20 'groschen'. Na festa encontram-se homens (x), mulheres (y) e donzelas (z), cada homem qual pagando 3, cada mulher pagando 2, e cada donzela pagando ½ 'groschen'. Qual era a composição de homens, mulheres e donzelas da festa?[20] (ORE, 1988, p. 122, tradução nossa).

Foi *Regiomontanus* que chamou a atenção para a obra de Diofanto na Europa, no século XV, ao mencionar que não havia até aquela época uma tradução latina da obra de Diofanto, que somente foi publicada no século XVI, por Holzmann (também conhecido como Xylander).

Na Europa, demorou a tardar o surgimento da resolução pelo método pulverizador. O uso deste método parece ter surgido pela primeira vez por volta de 1612, numa coleção de charadas de Claude-Gaspar Bachet, conhecido como o senhor de Méziriac. Esta obra fez tanto sucesso, que proporcionou uma segunda edição em 1624. Um dos problemas desta coleção diz:

> Problema 6: Uma festa tem 41 pessoas (homens, mulheres e crianças), fazendo uma refeição em um restaurante. A conta a ser paga é 40 'sous' e cada homem paga 4 'sous', cada mulher 3, e cada criança 1/3 'sous'. Quantos homens, mulheres e crianças havia?[21] (ORE, 1998, p.120, tradução nossa).

Ore (1998) relata que muitos destes problemas podem ser resolvidos por tentativa e erro, como era usualmente feito nos tempos medievais, pois na maioria dos casos era possível encontrar as soluções em poucas tentativas, que sempre existiam[22]. Porém, a

[19] Problema 4: "The quantity of rubies without flaw, sapphires, and pearls belonging to one person is five, eight, and seven respectively; the number of like gems appertaining to another is seven, nine and six; in addition, one has ninety-two coins, the other sixty-two and they are equally rich. Tell me, quickly then, intelligent friend, who art conversant with algebra, the prices of each sort of gem". A equação modeladora deste problema é dada por: $5x+ 8y + 7z + 92 = 7x+ 9y + 6z + 62$.

[20] Problema 5: "At a inn, a party of 20 persons pay a Bill for 20 groschen. The party consists of men (x), woman (y), and maidens (z), each man paying 3, each woman 2, and each maiden ½ groschen. How was the party composed?". A equação modeladora é $x+y+z=20$ e $3x+2y+z/2=20$, com 1 única solução: $x=1$, $y=5$ e $z=14$. 'Groschen' era uma moeda de prata comum na Idade Média, equivalendo na época a uma dúzia de denares, pesando entre 3.5 e 3.7 g. Atualmente, tal moeda é utilizada somente na Áustria.

[21] Problema 6: "A party of 41 persons, men, women, and children, take part in a meal at a inn. The bill is for 40 sous and each man pays 4 sous, each woman 3, and every child 1/3 sous. How many men, women, and children were there?". A equação do problema é dada por $x+y+z=41$ e $4x+3y+z/3=40$. 'Sous', conhecida antigamente também como 'solidus', foi uma moeda lançada no ano de 123 d.C., na região de Florença e utilizada no sistema monetário francês, na dinastia Carolíngia. Essa moeda deixou de ser cunhada por volta de 1330 d.C.

[22] A existência de solução, a quantidade finita e limitada, assim como a escolha dos valores numéricos incentivavam o uso quase exclusivo desta estratégia.

falta de uma escrita algébrica adequada dificultava o desenvolvimento do método para problemas com maior número de soluções[23].

Nos problemas de equações indeterminadas com mais de duas incógnitas, o tipo mais freqüente envolvia duas equações com três incógnitas. Alguns desses problemas eram conhecidos na idade medieval como *problema coeci*, cuja origem etimológica é desconhecida, outros por *problema potatorum*, denominação esta se referindo a problemas que envolvem bebidas, como também a classe de situações designada por *problema virginum,* pelo fato de certos problemas se referirem à mitologia grega.

Resolvendo problemas indeterminados

Os problemas de indeterminação linear podem ser abordados por diferentes estratégias. A seguir, serão apresentadas as resoluções de dois, dentre os problemas propostos, baseando-se nas propriedades dos números e na análise diofantina.

A abordagem inicial para a procura de soluções será realizada através do problema 3: “Um pato pode ser comprado por 5 dracmas, uma galinha por 1 dracma, e 20 estorninhos por 1 dracma. Você possui 100 dracmas e deseja comprar 100 aves. Quantas aves de cada tipo você pode adquirir?”. A modelagem resulta nas equações x+ y + z = 100 e 5x + y +z/20= 100, onde x, y e z são os valores de patos, galinhas e estorninhos.

$$\begin{cases} 5x + \ \ y + 0{,}05z = 100 \\ \quad x + y + z = 100 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 100x + 20y + z = 2000 \\ \quad x + \quad y + z = 100 \end{cases}$$

$$95x + 19y = 1900 \ \rightarrow \ 5x + y = 100$$

Na Análise Diofantina, inicialmente estabelecem-se as condições de contorno, que podem ser estabelecidas como: (a) os valores das incógnitas são inteiros (ou naturais, neste problema); b) seja conhecido o domínio de pelo menos uma das incógnitas.

O primeiro passo é isolar a incógnita de menor coeficiente: y = 100 – 5x.

A seguir, como não há coeficientes fracionários, a partir da parametrização elementar y = t e x = 100 -5 t, estuda-se o domínio. Como y ≥ 0, em y = 100 – 5x, então: 100- 5x ≥ 0 e x ≤ 20. Esta condição delimita os valores de x no intervalo 0 ≤ x ≤ 20. Na figura 1 foram indicadas as vinte e uma soluções do problema.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
y	100	95	90	85	80	75	70	65	60.	55	50	45	40	35	30	25	20	15	10	5	0
z	0	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48	52	56	60	64	68	72	76	80

Figura 1: Soluções do problema 3

Este problema é interessante de ser abordado no ciclo básico, pois a quantidade de soluções inibe ou restringe o uso da estratégia da tentativa e erro, muito utilizada pelos alunos. Além disso, a utilização inicial deste problema pela Análise Diofantina fica viabilizada pela escolha das variáveis didáticas[24], que restringe o grau de dificuldade.

[23] Mais tarde, Euler, no seu livro Álgebra, devotou várias considerações sobre a Análise Diofantina.
[24] Segundo Brousseau (1996), as denominadas variáveis didáticas são aquelas escolhidas pelo professor de modo a provocar modificação nas estratégias de resolução de problemas e que permitirão o surgimento do conhecimento almejado em situações de ensino.

Consideramos que esta viabilização seja propícia para um primeiro contato do aluno com tais tipos de problema.

A seguir, apresentamos a resolução do problema 2: “Quando 100 ‘bushels’ de grãos são distribuídos entre 100 pessoas de modo que cada homem recebe 3 ‘bushels’, cada mulher recebe 2 ‘bushels’, e cada criança recebe metade de um ‘bushel’, quantos homens, mulheres e crianças haviam?”

A equação modelizadora é 3x + 2y + 0,5z = 100 e x + y + z = 100, onde x é o número de homens, y é o número de mulheres e z é o número de crianças. A partir do sistema de duas equações obtém-se uma única equação:

$$\begin{cases} 3x + 2y + 0{,}5z = 100 \\ x + y + z = 100 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x + 4y + z = 200 \\ x + y + z = 100 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x + 4y + z = 200 \\ x + y + z = 100 \end{cases}$$
$$\overline{\quad 5x + 3y = 100 \quad}$$

Este problema apresenta maior dificuldade por apresentar uma relação fracionária entre as variáveis envolvidas. Em face a tal situação, ponderamos inicialmente uma possibilidade alternativa.

Considerando-se que 5 é divisor de 5 e 100, e também pelo fato de 3 e 5 serem primos entre si, então 5 deve ser divisor de y. Assim, os possíveis valores de y são: y = {0, 5, 10, ...}. O máximo valor possível de y é obtido através da equação 5x+ 3y = 100. Se x for 0, então y = 100/3, o que permite elaborar uma tabela, a partir dos valores de y e calcular os valores de x (figura 2).

x	20	17	14	11	8	5	2
y	0	5	10	15	20	25	30

Figura 2: Cálculo dos valores de ‘x’ no problema 2

A partir dos possíveis valores dos pares x e y, podem ser determinados os valores de z.

x	20	17	14	11	8	5	2
y	0	5	10	15	20	25	30
z	80	78	76	74	72	70	68

Figura 3: As sete soluções do problema 2

Resolvendo-se este problema pela Análise Diofantina, inicialmente estabelecem-se as condições de contorno, que são:

a) os valores das incógnitas são inteiros (ou naturais, neste problema);

b) seja conhecido o domínio de pelo menos uma das incógnitas.

O primeiro passo é isolar a incógnita de menor coeficiente:

$$5x + 3y = 100 \Rightarrow y = \frac{100 - 5x}{3}.$$

O segundo passo é separar a parte inteira da parte fracionária no segundo membro, por excesso e por falta, de modo a obter o menor coeficiente possível, neste caso de ‘x’ (em módulo), da parte fracionária:

$$y=\frac{100-5x}{3}\rightarrow y=\frac{99}{3}+\frac{1}{3}-\frac{6x}{3}+\frac{x}{3}=33+\frac{1}{3}-2x+\frac{x}{3}\ (por\,excesso),\ ou$$

$$y=\frac{100-5x}{3}\rightarrow y=\frac{99}{3}+\frac{1}{3}-\frac{3x}{3}-\frac{2x}{3}=33+\frac{1}{3}-x-\frac{2x}{3}\ (por\ \ falta).$$

Escolhe-se $y=33+\frac{1}{3}-2x+\frac{x}{3}=33-2x+\frac{1}{3}+\frac{x}{3}=33-2x+\frac{x+1}{3}$.

A seguir, como x e y são inteiros, então $\frac{x+1}{3}$ tem que ser inteiro. Escolhe-se um parâmetro t e faz-se: $t=\frac{x+1}{3}$, o que implica: $x=3t-1$.

Como não aparecem frações na expressão que relaciona ‘x’ com ‘t’, o processo se encerra. O próximo passo é expressar ‘y’ em função do parâmetro ‘t’.

$$y=33-2x+\frac{x+1}{3}=33-2.(3t-1)+t=35-6t+t=35-5t\cdot$$

Após este passo, realizamos o estudo do domínio. Como $5x+3y=100\Rightarrow y=\frac{100-5x}{3}$, se y é natural, então: $100-5x\geq 0\Rightarrow x\leq 20$. Deste modo, $0\leq x\leq 20$.

$$0\leq x\leq 20\Rightarrow 0\leq 3t-1\leq 20\Rightarrow 1\leq 3t\leq 21\Rightarrow \frac{1}{3}\leq t\leq 7\Rightarrow t=1,2,3,4,5,6,7.$$

Aplicando-se estes valores de t, podem ser obtidos os valores de x e y. Daí, faz-se o cálculo dos possíveis valores de z, conforme destaca a figura 3.

t	1	2	3	4	5	6	7
x = 3t-1	2	5	8	11	14	17	20
y =35-5t	30	25	20	15	10	5	0
z = 100-x-y	68	70	72	74	76	78	80

Figura 3: As sete soluções do problema 2 através da Análise Diofantina

Este problema apresenta uma excelente possibilidade de utilização de propriedades dos números: múltiplos, divisores E números primos entre si, que se configura numa estratégia otimizadora. Por outro lado, o uso da Análise Diofantina neste problema permite apresentar esta ferramenta no seu domínio característico - o conjunto dos números racionais - se configurando numa oportunidade pois exige o uso mais sofisticado de conhecimentos presentes no ciclo básico, o que valoriza mais o currículo.

Considerações Finais

A abordagem de problemas indeterminados do tipo linear permite mobilizar uma diversidade de estratégias de resolução, o que viabiliza localizar o âmbito de pertinência, validade e otimização da possível escolha de cada uma delas. Também, estas questões possibilitam (de modo bem simples) a manipulação de grandezas discretas como soluções, descartando as eventuais soluções de natureza contínua, assim como a exploração de situações com mais de uma solução ou com infinitas soluções, não comum nesta faixa de ensino.

Geralmente, os alunos utilizam inicialmente a tentativa e erro como estratégia espontânea, que, num certo paralelismo histórico, se revela uma importante via de acesso inicial para a resolução desses problemas. Isto abre espaço para o aluno procurar outras estratégias, pois os problemas ilustrados apresentam dificuldades diferentes em relação as variáveis escolhidas. O caminho que propusemos ilustra uma possibilidade de percorrer uma evolução de estratégias diversificadas, que podem ser descobertas pela ação exploratória dos próprios alunos frente a situações de ensino propícias, como também pela intervenção do professor para explicar alguns conceitos que os alunos não percebem, como, por exemplo, a propriedade da paridade e o uso do divisor de um número inteiro como ferramenta facilitadora na busca de soluções inteiras.

Assim, acreditamos que inicialmente o aluno deve interagir com os problemas propostos, sem interferência do professor. Isto permite a exploração das estratégias mais básicas, possibilitando ao professor uma ambientação e motivação mais adequada para a apresentação das 'novas' estratégias, oferecendo condições aos alunos de perceber a otimização procedimental e organizadora para a resolução dos problemas propostos.

Devemos lembrar que o objetivo da abordagem desses tipos de problemas não é aprender o algoritmo para se obter as soluções das equações diofantinas lineares, desprezando-se as outras estratégias. Frente a tal temática, o professor pode valorizar uma abordagem dialética entre procedimentos e conhecimentos, de modo a propriciar ambientação aos alunos para favorecer a atribuição de sentido aos conhecimentos.

Apesar de ter apresentado os problemas na concepção de sua criação histórica, algumas destas situações descritas apresentam dificuldade na resolução. Deste modo, estes prescindem de mudança nos valores numéricos para o aluno do ciclo básico, de modo que ele obtenha algumas das soluções ou eventualmente todas. Deve ser lembrado que não é pelo fato destes problemas pertencerem a História da Matemática que necessariamente devem ser apresentados aos alunos tal como foram concebidos.

Porém, é importante a apresentação de situações que os alunos não consigam resolver na totalidade, de modo a poder surgir ambientação para a criação e apresentação de novos conhecimentos, pois se ele souber realizar todas as atividades com relativa facilidade, qual seria o papel da aula de matemática?

Devemos salientar que este papel do professor em mapear as relevâncias, abrindo possibilidades para o desenvolvimento de competências diversificadas, descritas em Machado (2009), consideram que é possível abordar qualquer assunto nas aulas, desde que respeitando a escala, o âmbito e o projeto de ensino do professor e da escola.

Em síntese, este texto procurou propor a utilização do tema equações diofantinas lineares, não como componente curricular, mas inserido dentro da possibilidade de disponibilizar diferentes estratégias de resolução de situações-problema de natureza linear e indeterminada, que foram historicamente se constituindo e que dialeticamente organizaram o próprio conhecimento do assunto em pauta, permitindo o desenvolvimento de competências essenciais no ciclo básico.

As Equações Diofantinas Lineares complementam os temas usuais do currículo, na medida que viabilizam e reavivam a utilização dos mesmos, numa postura de valorização da interdisciplinaridade, inserido na ideia que o conhecimento é um bem que está cada vez mais vivo na medida em que mais conexões são estabelecidas para favorecer a rede de significados dos temas matemáticos, dentro da própria Matemática, conforme propõe Machado (2004).

Referências Bibliográficas

AURÉLIO. **O Dicionário da Língua Portuguesa**. Rio de Janeiro: Editora Nova Fronteira, 2003. CD-ROOM.

BRASIL. Secretaria de Educação e Tecnologia do Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio.** Brasília: SEMT/MEC, 1998.

______. Ministério da Educação. **Matriz de Referência para o ENEM**. Brasília, 2009.

BOYER, C. B. **História da Matemática.** 9. ed. São Paulo: Editora Edgard Blücher, 1991.

BROLEZZI, A. C. **A Tensão entre o Discreto e Contínuo na História da Matemática e no Ensino da Matemática.** 1996. Tese (Doutorado em Educação), Universidade de São Paulo, São Paulo.

BROUSSEAU, G. Fundamentos e Métodos da Didáctica da Matemática. In: BRUN, J. **Didática das Matemáticas.** Tradução de: Maria José Figueiredo. Lisboa: Instituto Piaget, 1996a. Cap. 1. p. 35-113.

CAMPBELL, S.; ZAZKIS, R. Toward Number Theory as a Conceptual Field. In: CAMPBELL, S.; ZAZKIS, R. (org.). **Learning and Teaching Number Theory**. London: Ablex Publishing, 2002. Cap. 1. p. 1-14.

COURANT, R.; ROBBINS, H. **O que é Matemática?** Tradução de: Adalberto da Silva Brito. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2000.

DIAS, R. **Hindus.** Disponível em <http://www.prof2000.pt/users/renatodias/Textos/Hindus.doc>, 2000. Acesso em: 14 jun. 2006.

FERRARI, P. L. Understanding Elementary Number Theory at the Undergarduate Level: A Semiotic Approach. In: CAMPBELL, S.; ZAZKIS, R. (org.). **Learning and Teaching Number Theory**. London: Ablex Publishing, 2002. Cap. 5. p. 97-115.

FIORENTINI, D.; MIORIM, M. Â.; MIGUEL, A. **Contribuição para um repensar … a Educação Algébrica Elementar.** Pro-Posições v. 4. n. 1. mar/1993. p. 78- 91.

KARLSON, P. **A Magia dos Números**. São Paulo: Ed Globo, 1961.

LINS, R. C.; GIMENEZ, J. **Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o Século XXI.** 5. ed. Campinas, SP: Papirus, 2005. 176p.

LINTZ, R. G. **História da Matemática**. Blumenau: Editora FURB. v. 1, 1999. ISBN 85-7114-064-2

MACHADO, N. J. **Conhecimento e Valor**. São Paulo: Editora Moderna, 2004.

_____________. **Educação:** Competência e Qualidade. São Paulo: Escrituras, 2009.

_____________. **Matemática e Língua Materna.** São Paulo: Editora Cortez, 1990.

MARANHÃO, M. C. S. A.; MACHADO, S. D. A.; COELHO, S. P. **O que se entende por Álgebra?** Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2005.

MOURA, L. O. G. **O contínuo e o discreto no ensino da Matemática:** Conceitos Dicotômicos ou Complementares? 2005. 141 f. Dissertação (Mestrado em Educação), Universidade de São Paulo, São Paulo.

ORE, O. **Number Theory and Its History**. New York, Dover Publications Inc, 1988. Cap 6-8, p.116-207.

POZO, J. I. Introdução. In: POZO, J. I. (org). **A Solução de problemas**: Aprender a resolver, resolver para aprender. Porto Alegre: ArtMed, 1998. p. 9-11.

RESENDE, M. R. (2007). **Re-significando a Disciplina Teoria dos Números na Formação do Professor de Matemática na Licenciatura.** Tese (Doutorado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

ROCQUE, G. de La ; PITOMBEIRA, J. B. **Uma equação diofantina e suas resoluções**. Revista do Professor de Matemática, São Paulo, 1991. v. 19, p. 39-47.

SÃO PAULO. **Proposta Curricular do Estado de São Paulo**: Matemática/ Ensino Fundamental (Ciclo II) e Médio. São Paulo: SEE, 2008.

STRUIK, D. J. **História Concisa das Matemáticas**. 2. ed. Trad: João Cosme Santos Guerreiro. Lisboa: Gradiva, 1992.

ZERHUSEN, A.; RAKES, C.; MEECE, S. **Diophantine Equations.** Disponível em: <http://www.ms.uky.edu/~carl/ma330/projects/diophanfin1.html>. Acesso em: 02 nov. 2005.