A PRODUÇÃO DO CONHECIMENTO MATEMÁTICO: UMA ABORDAGEM GRÁFICA PARA A FUNÇÃO COMPOSTA

MATHMATICAL KNOWLEDGE PRODUCTION: A GRAPHICAL APPROACH TO COMPOSITION OF FUNCTIONS

Sandra Malta Barbosa

Universidade Estadual de Londrina/Departamento de Matemática/sbarbosa@uel.br

Resumo

Este artigo apresenta um recorte de uma pesquisa de doutorado com base na noção de coletivo pensante seres-humanos-com-mídias, cujo objetivo era responder à pergunta diretriz: *Como o coletivo, formado por alunos-com-tecnologias, produz o conhecimento acerca de função composta e regra da cadeia, a partir de uma abordagem gráfica?* Para tanto, é descrito um episódio, obtido de experimentos de ensino, que apresenta subsídios para responder parte da pergunta. Tal episódio indica que a produção do conhecimento matemático, dos alunos envolvidos, acerca de função composta, ocorreu por meio de elaborações de conjecturas formuladas durante o processo de visualização. Esse processo é potencializado pelas Tecnologias de Informação e Comunicação, levando-se em consideração o entrelaçamento das representações múltiplas e um coletivo pensante seres-humanos-com-mídias.

Palavras-chave: Educação Matemática, Seres-humanos-com-mídia, Função Composta, Tecnologias da Informação e Comunicação.

Abstract

This article presents part of a doctoral survey of which is based on the notion of thinking collectives of humans-with-media. The objective of this research was to answer the research question *How does a collective, composed of students-with-technologies, produce knowledge about the Composition of Functions and the Chain Rule using a graphical approach?* This article describes one episode, from teaching experiments, that is particularly informative with respect to the research question, and indicates that students' knowledge production regarding composition of functions occurred through the construction of conjectures formulated during the process of visualization enabled by Information and Communication Technologies, taking into account the intertwining of multiple representations that permeated all the activities, and a humans-with-media thinking collective.

Keywords: Mathematics Education, Humans-with-media, Composition of Functions, Information and Communication Technologies.

Introdução

Este artigo apresenta uma parte do resultado de uma pesquisa de doutorado, cujo objetivo foi responder a pergunta diretriz: *Como o coletivo, formado por alunos-com-tecnologias, produz o conhecimento acerca de função composta e regra da cadeia, a partir de uma abordagem gráfica?* Estes resultados são relativos à produção do conhecimento matemático desenvolvida pelo coletivo formado por alunos e pelas Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC). Neste artigo, o episódio apresentado faz referência à atividade relativa à função composta e ao levantamento de conjecturas a partir da variação de parâmetros. Desse modo, o objetivo é mostrar que o coletivo formado pelos alunos e pelas TIC produz conhecimento matemático visto como processo.

A metodologia adotada nesta investigação é a qualitativa (ALVES-MAZZOTTI, 1999; ARAÚJO; BORBA, 2004), pois trata-se de um estudo em que o objeto está pautado na perspectiva do indivíduo. Como procedimento de coleta dos dados foram utilizados experimentos de ensino (STEFFE; THOMPSON, 2000) com alunos ingressantes no Curso de Matemática, UNESP de Rio Claro (SP), que estavam cursando a disciplina Cálculo I.

Segundo Steffe e Thompson (2000), interpretar o que os alunos dizem e fazem, por meio de um diálogo desencadeado a partir das atividades e das questões elaboradas pelo pesquisador, é parte essencial em pesquisas desenvolvidas através de experimentos de ensino. Sendo assim, neste artigo será abordada uma atividade que analisa como o coletivo, formado pelos alunos e pelo *software* Winplot, explora as propriedades acerca de função composta.

Referencial Teórico

A abordagem visual de um conceito matemático pode ser considerada, atualmente, como um dos elementos que caracterizam novos modos ou estilos de produção do conhecimento. Para Guzmán (2002), o uso da visualização é benéfico do ponto de vista da apresentação para outros e da manipulação ao resolver problemas.

> Visualização surge deste modo, não só como algo absolutamente natural no nascimento do pensamento matemático, mas também na descoberta de novas relações entre objetos matemáticos e, também, no processo de transmissão e comunicação que é próprio à atividade matemática (GUZMÁN, 2002, p.2-3).

A visualização surge com um peso de interpretação, codificação e decodificação, o qual intervém em um mundo inteiro de intercâmbios pessoais e sociais. Em Villarreal (1999) e Borba e Villarreal (2005), pode-se encontrar uma vasta literatura sobre este tema. Para esses autores, o componente visual parece ser o principal foco desde que os computadores passaram a ter monitor de vídeo. A visualização, realçada pelas TIC, pode alcançar uma nova dimensão, onde a animação, proporcionada pelos recursos computacionais, constitui um elemento primordial, quando as imagens são vistas de forma dinâmica e interpretadas pelos alunos como outras formas de produzir o conhecimento. A abordagem gráfica, na produção do conhecimento acerca de função composta, constituiu uma alternativa à abordagem estritamente algébrica.

Ao se constituir um ambiente com computador, existem várias maneiras de usá-lo na produção do conhecimento. Para Borba e Villarreal (2005), os computadores e os humanos não são considerados separadamente, constituindo-se unidades disjuntas. Para os autores, os computadores não são apenas assistentes dos humanos, ao se fazer Matemática, pois eles mudam a natureza do que é feito, sugerindo que diferentes coletivos de humanos com mídias produzem diferentes matemáticas. Por exemplo, a Matemática produzida por humanos com papel e lápis é qualitativamente diferente da produzida por humanos com computadores, a partir de simulações e experimentações. Borba e Villarreal (2005), ao proporem que a produção do conhecimento ocorre a partir da noção de coletivo pensante seres-humanos-com-mídia, fundamentam-se nas ideias de reorganização de Tikhomirov (1981) e na visão de coletivo pensante de Lévy (1993).

A teoria de reorganização, proposta por Tikhomirov (1981), baseia-se na ideia de que a ferramenta não é simplesmente adicionada à atividade humana, mas transforma-a. O autor defende que os processos mentais, no ser humano, mudam quando os processos da atividade prática mudam. “Como resultado do uso do computador, a transformação da atividade humana ocorre e novas formas de atividade emergem” (TIKHOMIROV, 1981, p.271). Argumenta ainda que o computador proporciona novas possibilidades à atividade humana, como *feedbacks* e resultados intermediários que não podem ser observados externamente e, assim, o processo de produção do conhecimento matemático é modificado. A estrutura da atividade intelectual humana é alterada pelo uso do computador, reorganizando os processos de criação, de busca e de armazenamento de informações.

Para Lévy (1993), o conhecimento é produzido pela simulação e pela experimentação. A manipulação dos parâmetros e a simulação de todas as circunstâncias possíveis dão ao usuário de um programa uma espécie de intuição, e de imaginação, sobre as relações de causa e efeito presentes em um determinado modelo. O autor enfatiza que, à medida que a informatização avança, melhorando suas interfaces, novas habilidades aparecem e a cognição se transforma. Para ele, nenhum tipo de conhecimento é independente do uso das tecnologias intelectuais (oralidade, escrita e informática) e só é possível pensar dentro de um coletivo, pois o pensamento já é a realização desse coletivo.

Para Moran (2006; 2007), o conhecimento se dá no processo de interação e de comunicação, e conhecer é relacionar, integrar, contextualizar e fazer nosso o que vem de fora. Conhecer é ir além da superfície, do previsível e da exterioridade, aprofundando os níveis de descoberta. Segundo esse autor, o conhecimento se dá no rico processo, externo e interno, de interação. Por externo, ele entende que é tudo o que nos rodeia, com suas mensagens e informações, e, por interno ou interiorização, entende que é a síntese pessoal, uma reelaboração de tudo o que captamos por meio da interação. O conhecimento acontece quando algo faz sentido, quando é experimentado, quando pode ser aplicado de alguma forma ou em algum momento. Sem interligação, o conhecimento dividido em fatias favorece a organização administrativa, não a aprendizagem, que é vista cada vez mais como interdisciplinar. O conhecimento não se impõe, constrói-se.

Ter conhecimento não é apenas ter informação, muito embora a informação seja o primeiro passo para se conhecer. “O conhecimento não se dá pela quantidade de acesso [à informação], mas pelo olhar integrador, pela forma de rever com profundidade as mesmas coisas” (MORAN, 2007, p.50).

Segundo Steinbring (2005), uma resposta comum, quando emerge uma questão sobre o caráter ou a natureza epistemológica do conhecimento matemático, é que

> a Matemática representa um corpo de conhecimento lógico e objetivo, o qual é produzido ou descoberto na realidade, de acordo com leis internas e objetos ideais pelos pesquisadores matemáticos. Tal visão entende Matemática como um objeto ideal e já existente, e quaisquer influências efetivas de pesquisadores neste ideal são negadas (STEINBRING, 2005, p.7).

Contrariamente a essa declaração, para o autor, a produção do conhecimento matemático ocorre, fundamentalmente, no contexto da construção social e no processo de interpretação individual. O conhecimento matemático não é previamente dado, mas construído por meios de atividades sociais e interpretações individuais. O conhecimento matemático está conectado com o contexto social da pesquisa ou da aprendizagem. A prática do ensino e da aprendizagem matemática é caracterizada pela variedade de construções e de interpretações matemáticas. A natureza do conhecimento matemático é sempre olhada no contexto cultural, onde são desenvolvidos os sinais e os símbolos, tanto quanto sua interpretação.

Para Steinbring (2005), na cultura dos profissionais matemáticos, os sinais matemáticos são usados pelos participantes na comunicação de modo bem definido. Já na cultura do ensino, os estudantes têm de ser introduzidos nesse uso e, portanto, uma diversidade de comunicação matemática no processo de ensino e aprendizagem pode ser observada. Sinais e símbolos matemáticos têm dupla função para o processo comunicativo de ensino e aprendizagem: eles são portadores do conhecimento matemático (eles ajudam a matemática a ser escrita e representada) e são elementos centrais da comunicação na cultura da escola (com suas diferentes formas e modos de uso e interpretação). Os sinais matemáticos adquirem seu próprio significado apenas por meio de uma relação com o contexto. De acordo com o autor, a Matemática, como qualquer outro conhecimento teórico, sempre precisa de um contexto específico no qual se desenvolve, organiza-se, torna-se sistematizada e conecta-se ao significado. A matemática científica e a escolar são semelhantes com relação aos seus contextos sociais e seus *status* epistemológicos fundamentais, mas elas diferem consideravelmente com respeito ao grau de formalização e de suas propostas de aprendizagem na Educação Matemática.

> Todo conhecimento matemático, seja ele científico ou escolar, necessita do contexto de referência, e, neste sentido, todo conhecimento é um contexto específico. Sobre esta base, a diferença entre matemática científica e escolar encontra-se nos diferentes tipos de contextos de referências usados nestes diferentes contextos de desenvolvimentos sociais. Uma diferença importante diz respeito ao contexto de referência na matemática escolar, a qual deve ser ajustada para a necessidade da aprendizagem e do desenvolvimento cognitivo dos estudantes (STEINBRING, 2005, p.13).

Segundo o autor, a Matemática é usualmente considerada como uma ciência por excelência, com resultados universais e definitivos expressos como verdades incontestáveis. A unidade da matemática científica é o resultado do processo de comunicação interativa e histórico-social entre matemáticos, a qual é, de algum modo, orientada na direção de um produto coerente, a matemática uniforme. A esse respeito, distingue-se entre o processo de desenvolvimento e o produto (matemática uniforme). Na pesquisa da matemática científica, o correto é o produto matemático universalmente válido. No entanto, outros desenvolvimentos e campos de aplicação da Matemática podem focar diferentes características, como o processo de desenvolvimento do produto matemático. O deslocamento do produto matemático para o processo matemático é um tema importante na aprendizagem e na apropriação ativa do conhecimento matemático, especialmente no contexto de mediação do conhecimento na sala de aula.

Steinbring (2005), apoiado na perspectiva de Freudenthal (1973), enfatiza que o caráter do desenvolvimento da Matemática, visto como uma atividade, implica que a aprendizagem torna-se um processo ativo na construção do conhecimento.

> O oposto à matemática pronta é a matemática *em status nascente*. Isto é o que Sócrates ensinou. Hoje, desejamos que isso seja um começo real ao invés de ser estilizado; o educando deve, por ele mesmo, reinventar matemáticas... O processo de aprendizagem tem que incluir fases de invenções dirigidas, isto é, de invenções não no sentido objetivo, mas no senso subjetivo, visto da perspectiva do estudante (FREUDENTHAL, 1973, p.114, *apud* STEINBRING, 2005, p.15, grifo do autor).

Dessa forma, para Steinbring (2005), os processos de desenvolvimento da Matemática não são nem uniformes, nem universais, nem homogêneos. As características subjetivas da manutenção do processo, tanto quanto as representações, as notações e as interpretações do conhecimento matemático, são múltiplas, divergentes e parcialmente heterogêneas. No processo do desenvolvimento do conhecimento matemático, o contexto cultural, as influências subjetivas e as dependências são efetivas e inevitáveis e são as razões para uma diversidade observável e uma não uniformidade do conhecimento emergente. Para o autor, aprender Matemática requer olhar a Matemática como um processo ativo de construção, pelo qual, por meio da interpretação interativa dos conceitos e das notações matemáticas, se desenvolve um novo conhecimento. Assim, a aprendizagem do estudante não pode ser comparada com a do profissional matemático.

Steinbring (2005) argumenta ainda que a unidade do conhecimento matemático científico não pode ser transferida para a matemática escolar. Pois, dessa forma, a matemática escolar perderia seu fundo cultural e a Matemática se tornaria meros sinais formalísticos e fórmulas. O autor entende que sinais matemáticos, símbolos, princípios e estruturas só podem ser significativamente interpretados em uma cultura emergente, que questiona a unidade da matemática no processo de ensino e aprendizagem. “Se o conhecimento matemático (sinais, símbolos, princípios, estruturas, etc.) puder apenas ser interpretado significativamente a partir de um ambiente cultural específico, então não existe apenas uma simples, mas muitas e diferentes formas de matemática” (STEINBRING, 2005, p.16).

Essas muitas e diferentes formas de matemática, à qual Steinbring (2005) se refere, com a interpretação interativa dos conceitos e das notações matemáticas, que são caracterizadas pelas representações múltiplas, no caso específico de funções, podem ser potencializadas por um ambiente escolar em que os alunos e professores utilizam as TIC. Dessa forma, o processo de produção do conhecimento, especificamente do conhecimento matemático, modifica-se qualitativamente. A Matemática produzida pelos alunos, quando utilizam papel e lápis, é diferente daquela produzida com a utilização das TIC, como já foi mencionado por Borba e Villarreal (2005). Essa noção de matemáticas distintas, utilizando as TIC, é um dos princípios resultantes do constructo teórico seres-humanos-com-mídias.

Borba e Villarreal (2005) enfatizam ainda que as TIC, com diferenças qualitativas em relação às outras mídias (oralidade e escrita), alteram a linearidade do raciocínio. Os autores adotam a perspectiva de “que humanos são constituídos por tecnologias que transformam e modificam seu raciocínio e, ao mesmo tempo, esses humanos são constantemente transformados por essas tecnologias” (BORBA; VILLARREAL, 2005, p.22). A partir dessa perspectiva, os autores entendem que a visão dicotômica entre seres humanos e tecnologias não faz sentido. Dessa forma,

> o conhecimento é produzido junto com uma dada mídia ou tecnologia da inteligência. Por esta razão, adotamos a perspectiva teórica que sustenta a noção que conhecimento é produzido por um coletivo composto de seres-humanos-com-mídias, ou seres-humanos-com-tecnologias, e não, como outras teorias sugerem, por apenas um ser humano individual, ou coletivo composto apenas de humanos (BORBA; VILLARREAL, 2005, p.23).

Considerando as visões dos autores apresentados, sintetiza-se uma conexão entre esses autores. Segundo Moran (2006), a produção do conhecimento ocorre no processo rico de interação externo e interno. O autor entende por externo tudo que nos rodeia e por interno as sínteses pessoais. Para Steinbring (2005) aprender Matemática requer olhá-la como um processo ativo de construção, através da interpretação interativa dos conceitos e notações matemáticas, para se desenvolver um novo conhecimento. Para Borba e Villarreal (2005), o conhecimento é produzido por um coletivo pensante seres-humanos-com-mídias.

Com apoio em Steinbring (2005), entende-se que a Matemática é um produto social e que a presumida coerência do conhecimento matemático está relacionada ao tipo de comunicação que os pesquisadores matemáticos mantêm sobre esse conhecimento. Um exemplo disso é a prova formal que ajuda os pesquisadores matemáticos a terem um entendimento em relação às “verdades” matemáticas de modo inequívoco. No entanto, esses processos de comunicação não são comparáveis àqueles da sala de aula de matemática. Os estudantes têm sua forma própria de comunicarem e argumentarem matematicamente, podendo, muitas vezes, mostrar, por exemplo, com um gesto a concavidade de uma parábola, ou seja, para o estudante, a produção do conhecimento não ocorre da mesma forma abstrata que nas comunicações formais do pesquisador matemático.

De acordo com Steinbring (2005), a prática do ensino e da aprendizagem Matemática é caracterizada pela variedade de construções e interpretações matemáticas, pois o conhecimento matemático não é previamente dado, mas socialmente construído. No contexto da sala de aula, os estudantes têm que ser introduzidos ao uso dos sinais e dos símbolos matemáticos e, portanto, pode-se observar uma diversidade de comunicação matemática no processo de ensino e aprendizagem. As representações múltiplas, com as suas diferentes formas e modos de usos e interpretações, são elementos centrais na comunicação matemática no contexto da sala de aula.

Dessa forma, a Matemática não é um produto acabado, mas um processo em desenvolvimento, com interpretações múltiplas e divergentes, que inclui fases de invenções vistas da perspectiva do estudante. O conhecimento matemático não pode ser concebido por uma mera leitura dos sinais, símbolos e princípios, mas esses têm que ser interpretados de forma interativa. Assim, se o conhecimento matemático puder ser apenas interpretado em um ambiente cultural específico, por exemplo, em um ambiente utilizando as TIC, então não existe apenas uma única maneira de se produzir Matemática, mas diferentes formas de sua produção.

Participar do processo da sala de aula de matemática é fazer parte de uma cultura específica, na qual se podem observar as muitas habilidades e interpretações que os alunos fazem da Matemática. Com a inserção das TIC, essas interpretações são modificadas pelo uso da animação, ou da simulação. Portanto, as TIC não têm um papel secundário na produção do conhecimento matemático, mas são partes integrantes do ambiente de ensino e de aprendizagem.

Desse modo, a produção do conhecimento matemático, que é dinâmico e pautado no processo, ocorre quando existe uma interação "externo-interno", e essa interação pode ser apresentada quando se sintetiza externamente o que se pensa, por exemplo, oralmente, pela escrita em uma folha de papel, ou na tela do computador. A Matemática pode ser modificada quando as TIC são inseridas no ambiente de ensino e aprendizagem de modo interativo pela simulação. O conhecimento matemático é produzido por um coletivo que envolve alunos e professor, com todo o seu arcabouço histórico-cultural, representações matemáticas, por símbolos, por gráficos, por números e pelas tecnologias intelectuais, como a oralidade, a escrita e a informática, caracterizando um coletivo pensante.

O conhecimento matemático é produzido diferentemente para cada indivíduo, em um coletivo formado não só por humanos, como também, com todas as representações e interfaces permeadas pela informatização. Nessa produção, os alunos, por terem modos diferenciados de aprender, não são passivos diante das mídias e interagem com o computador.

Metodologia

Para além das questões sobre como proceder e o que enfocar, há outra de fundo que é a visão de conhecimento que o investigador concebe. Os procedimentos adotados e a concepção de conhecimento devem estar em consonância, como afirmam Lincoln e Guba (1985). Particularmente na pesquisa em Educação, "é também necessário que haja uma visão de Educação que esteja coerente com a de conhecimento e a de metodologia" (ARAÚJO; BORBA, 2004, p.42).

Entendendo que a pesquisa qualitativa alia a visão de conhecimento matemático do investigador aos procedimentos adotados na elaboração de atividades e na coleta dos dados, procurou-se trazer para a produção do conhecimento acerca de função composta uma abordagem gráfica. A produção do conhecimento matemático, que é dinâmico e pautado no processo, pode ser modificada quando as TIC são inseridas no ambiente de ensino e aprendizagem de modo interativo. Assim, a visão de produção do conhecimento, nesta pesquisa, é consistente com a noção de seres-humanos-com-mídias (BORBA; VILLARREAL, 2005), a qual entende que os seres humanos produzem conhecimento junto com determinadas mídias.

Deste modo, os procedimentos adotados na elaboração das atividades e na coleta dos dados estão em sintonia com a noção de um coletivo seres-humanos-com-mídias que produz conhecimento. A elaboração de atividades foi desenvolvida com as mídias disponíveis, no caso o *software* Winplot, e com o grupo de pesquisa. Os procedimentos adotados para a coleta dos dados serão agora descritos.

O Experimento de Ensino é um procedimento metodológico de coleta dos dados, que consiste em uma série de encontros entre os estudantes e o pesquisador por um determinado período de tempo. Nesses encontros, o pesquisador promove uma investigação sobre o modo como os estudantes produzem seus conhecimentos no processo de exploração de atividades pré-elaboradas. Steffe e Thompson (2000) denominam de episódios os encontros que acontecem durante um experimento de ensino. Cada episódio supõe que exista, além da presença do agente de ensino, nesse caso o pesquisador, um método de registro dos dados. Nesta pesquisa, foram utilizados, além do *software* Camtasia Studio, que grava todos os movimentos feitos na tela do computador, sons e imagens captadas por uma *webcam* e uma filmadora fixa, pois a *webcam* poderia perder algum gesto dos alunos devido à sua pouca abertura visual. Assim, houve a possibilidade de registrar todo o processo de cada dupla, capturando as ações realizadas no computador, as imagens e os diálogos entre os alunos e o pesquisador.

Os experimentos propiciam situações em que estudantes e pesquisador podem interagir. Isso faz com que o pesquisador deixe de ser apenas um observador para se envolver e participar de forma efetiva do processo e não apenas tentar explicar a matemática dos alunos por meio de sistemas matemáticos conhecidos. Interpretar o que os alunos dizem e fazem, por meio de um diálogo desencadeado a partir das atividades e questões elaboradas pelo pesquisador, em uma tentativa de entender como eles elaboram seus conceitos matemáticos, é parte essencial no experimento de ensino (STEFFE; THOMPSON, 2000).

Embora as atividades sejam pré-elaboradas com perguntas abertas, os alunos podem fazer algumas conjecturas que vão além das questões propostas. Desse modo, o importante não é apenas verificar se uma determinada hipótese é válida, mas também investigar novas hipóteses que podem surgir durante a realização do experimento.

Por exemplo, uma das atividades propostas consistiu em, dadas as funções $f(x) = ax^2$ e $g(x) = bx + c$, verificar padrões quando os coeficiente *a*, *b* e *c* sofriam variações, além de identificar semelhanças e diferenças entre os gráficos das funções compostas $f(g(x))$ e $g(f(x))$. Essa atividade foi trabalhada pelos alunos A1 e A2, que exploraram as propriedades de composição de funções a partir de seus gráficos. Embora fossem alunos do primeiro ano do curso de Matemática e soubessem operar algebricamente com composição de funções, ainda não tinham visto os fundamentos acerca das propriedades dessa operação, que normalmente são vistos em outras disciplinas desse curso. Apesar disso, A1 identificou, a partir dos gráficos, que, ao animar os parâmetros *a* e *c*, e fixar $b = 0$, as funções $g(x)$ e $f(g(x))$ eram constantes, conforme se pode evidenciar na fala de A1:

A1: *Deu uma reta constante* [referindo-se aos gráficos das funções $g(x)$ e $f(g(x))$]. *Mas por que deu uma constante?... Você tá botando a função g em f... O a e b são os coeficientes da... entendi agora por que dá uma constante.*

Além dessa propriedade, o *software* Winplot possibilitou aos alunos fazerem conjecturas acerca da função identidade e sua propriedade como elemento neutro e a não comutatividade para a composição de funções. O *software* possibilitou ainda, por meio da animação dos parâmetros *a*, *b* e *c*, a verificação de um padrão entre os gráficos das funções compostas, $f(g(x)) = a(bx+c)^2$ e $g(f(x)) = bax^2 + c$. Os gráficos dessas funções compostas interceptavam o gráfico da função linear $g(x) = bx + c$ nos eixos *x* e *y*, respectivamente, conforme observação de A1 e A2:

A1: *Olha isso. Essa* [$g(f(x)) = bax^2 + c$] *vai atingir o eixo y onde a reta* [$g(x) = bx + c$] *atinge y e, essa* [$f(g(x)) = a(bx+c)^2$] *atinge o eixo x, onde a reta* [$g(x) = bx + c$] *atinge o eixo x.*

A2: *Onde a reta cruza tanto o eixo do x quanto o eixo do y.*

Pesquisadora: *Isso vale para qualquer a, qualquer b e qualquer c?*

A1 constatou, usando o recurso de animação do *software*, que essa hipótese era válida para qualquer que fosse a variação dos parâmetros *a*, *b* ou *c*, buscando uma generalização do padrão observado. Com a animação dos parâmetros, A1 pôde observar que o gráfico da função composta $g(f(x)) = bax^2 + c$ interceptou o eixo *y* no mesmo ponto em que esse eixo é interceptado pelo gráfico da função $g(x) = bx + c$. O mesmo raciocínio é válido para o gráfico da função composta $f(g(x)) = a(bx+c)^2$ em relação ao eixo *x*. Ou seja, o gráfico da função composta $f(g(x)) = a(bx+c)^2$ intercepta o eixo *x* no mesmo ponto em que esse eixo é interceptado pelo gráfico da função $g(x) = bx + c$, conforme se pode observar na sequência de ilustrações presentes na Figura 1.

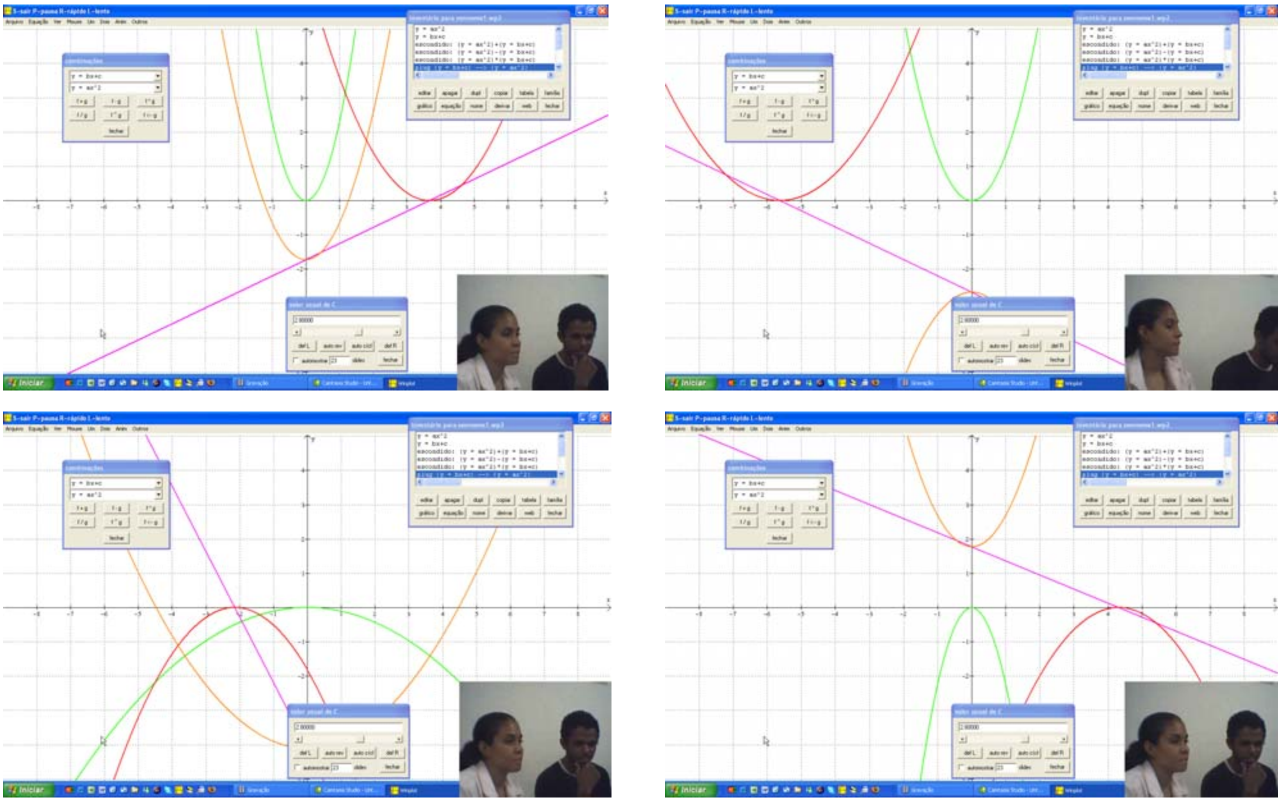

Figura 1 – Sequência de ilustrações com a animação do Winplot[1].

A Figura 1 mostra uma sequência de imagens estáticas produzidas pelo *Camtasia Studio*, no qual os gráficos foram gerados pelo Winplot e os alunos estavam sendo filmados. Os gráficos das funções compostas $f(g(x)) = a(bx+c)^2$ e $g(f(x)) = bax^2 + c$ interceptam a reta $g(x) = bx + c$ nos eixos *x* e *y*, respectivamente, para quaisquer que sejam os valores dos parâmetros *a*, *b* e *c*.

A experimentação deste padrão gráfico possibilitou a generalização de uma abordagem algébrica. Pode-se dizer que, embora o objetivo dessa atividade fosse a familiarização com um comando do *software*, outras conjecturas foram levantadas e posteriormente confirmadas.

Embora a visualização tenha seu papel de destaque, algumas duplas sentiram-se mais seguras quando, em suas interpretações, relacionavam os gráficos gerados às suas expressões algébricas.

Por exemplo, em uma das atividades eram dados os gráficos de duas funções $f(x)$ e $g(x)$, como na Figura 2, e pedido o gráfico da função composta de *f* com *g*.

[1] O uso das imagens foi autorizado pelos alunos participantes desta pesquisa.

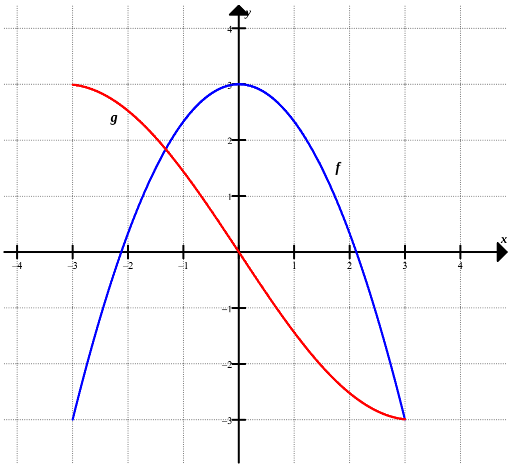

Figura 2 – Gráfico das funções *g* e *f*.

Para obter os gráficos das funções compostas, A1 tentou desenvolver uma aproximação para as expressões algébricas das funções $f(x)$ e $g(x)$.

A1: *Vou fazer uma parecida.*

A1: *Vou tentar jogando uma parecida com as duas... tentar aproximar esses valores aqui...*

Para a função *f*, A1 inseriu uma função quadrática completa, $y = ax^2 + bx + c$, sem animar os parâmetros, e, para a função *g*, inseriu $y = sen(x)$.

A1: *Parece um seno.*

Levando em consideração a pergunta de pesquisa, procurou-se construir episódios que evidenciavam aspectos para respondê-la. Em Barbosa (2009), no Capítulo 6, optou-se por apresentar os dados, compostos pelas atividades e pelas discussões de algumas duplas, de forma a não tornar enfadonha a leitura, com o propósito de contribuir para que o leitor pudesse discordar das interpretações. Dessa forma, os episódios foram organizados a partir das atividades, mescladas com as discussões das duplas que, de alguma forma, chamaram a atenção por conter respostas que vinham ao encontro da literatura apresentada e do objetivo da pesquisa.

Resultados

Este episódio mostrou que o recurso de animação do Winplot teve um papel fundamental na verificação do padrão, pois a imagem pôde ser manipulada de forma dinâmica. Esta dinamicidade possibilitou aos alunos generalizar um padrão, a partir de uma função em particular. Pode-se notar que a observação e a análise desse padrão foram feitas junto com o computador, sugerindo que o conhecimento, acerca das propriedades de composição de funções, foi produzido por um coletivo seres-humanos-com-mídias assim como sustentam Borba e Villarreal (2005).

Algumas situações emergiram para responder à pergunta norteadora da pesquisa, pois os alunos estavam envolvidos em um ambiente em que as características relacionadas às TIC estão presentes na produção do conhecimento, tais como visualização e representações múltiplas. A visualização exerceu um papel fundamental desde a elaboração, permeando a coleta dos dados nos experimentos de ensino e no desenvolvimento das atividades pelos alunos, com a utilização das TIC.

Nota-se que o aluno A1 não conseguiu pensar nas funções utilizando apenas seus gráficos. Esse fato pode ter origem nas tendências formalistas, o que, talvez, apoie-se na cultura dos cursos de licenciaturas que têm uma visão mais algébrica que, consequentemente, levou a visualização a uma posição inferior.

Além disso, percebe-se que os estudantes, embora já soubessem a definição de função composta, foram confrontados em um processo ativo de construção, no qual, através da interpretação interativa dos conceitos e notações matemáticos, desenvolveram um novo conhecimento, assim como defende Steinbring (2005).

O entrelaçamento entre as representações múltiplas, proporcionadas pelas TIC, pela escrita e pela oralidade, esteve presente no decorrer da elaboração das atividades e nos episódios construídos. Um resultado do deslocamento entre essas representações foi a formulação de conjecturas, decorrente das discussões dos alunos ao trabalharem com as TIC e a escrita. O processo de respostas rápidas, proporcionadas pelo *feedback* do *software* Winplot, levou, muitas vezes, à refutação ou à confirmação dessas conjecturas. Outras vezes, algumas ideias, ou crenças, foram desconstruídas, quando os alunos comparavam os gráficos com as suas expressões algébricas ou quando envolvia uma generalização da notação matemática que os alunos estavam acostumados a manipular.

A dinamicidade, presente no contexto do uso do *software* Winplot, desencadeou interpretações de padrões e estabeleceu uma ligação com propriedades sobre determinados tópicos de que os alunos ainda não tinham conhecimento. Outras vezes, os alunos relacionavam o tópico abordado com um conhecimento prévio, interligando-o com outros tópicos de diferentes disciplinas, formando um todo característico da interdisciplinaridade. A produção do conhecimento matemático ocorreu nas discussões com o parceiro e, fundamentalmente, no processo de interpretação individual, expresso na forma oral, na forma escrita, ou na ação de trabalhar com o computador.

Conclusões

O objetivo era que, com as atividades, o aluno produzisse seu próprio conhecimento acerca de função composta, a partir de uma abordagem gráfica. Com isso, cada aluno, que tem todo um arcabouço histórico-cultural, poderia interpretar e produzir seu conhecimento diferentemente, de forma interativa em um coletivo, que é formado não apenas por seres humanos, como também por interfaces e representações matemáticas permeadas pelo *software* Winplot. Nesse coletivo, as TIC são protagonistas e não meras figurantes na produção do conhecimento matemático.

Em concordância com Borba e Villarreal (2005), entende-se que não é o ser humano sozinho que pensa, mas o coletivo, formado por humanos e mídias. Assim, todo o ambiente físico, as pessoas, as TIC e o conteúdo interagem na produção do conhecimento. Nesse processo, muitas vezes, existe uma mudança, qualitativamente diferente para cada mídia e, dependendo do *feedback*, novamente repensa-se tudo, em um movimento, retorna-se às conjecturas e tenta-se prová-las. Essa mudança, como proposta por Tikhomirov (1981), é entendida como uma reorganização, que transforma toda a atividade humana e, consequentemente, a produção do conhecimento acerca da composição de funções.

O pesquisador deve estar atento para enfrentar situações que não estavam previstas anteriormente e que podem emergir quando se realiza um experimento de ensino. As ideias e os procedimentos dos alunos devem ser respeitados, e o pesquisador deve procurar agir como se ele próprio fosse um dos estudantes, colocar-se no lugar deles, tentando perceber de que forma agem e pensam em relação aos fatos apresentados. Isso não quer dizer que o pesquisador não tenha algumas hipóteses pré-estabelecidas, porém elas devem ser deixadas de lado durante o desenvolvimento do experimento de ensino. Esse processo individual não significa um indivíduo sozinho, mas imbricado de todo um coletivo que pensa junto com ele.

Borba e Confrey (1996) afirmam que no estudo das funções tem sido dada maior ênfase à manipulação algébrica e defendem que a coordenação das representações múltiplas (gráficas, numéricas e algébricas) pode ser usada como um recurso para os estudantes que rejeitam a hegemonia da álgebra. Para Villarreal (1999), as representações múltiplas são de suma importância na produção de novos conhecimentos e são usadas pelos alunos para confirmarem ou refutarem suas conjecturas, atribuindo novos significados aos tópicos estudados a partir das interações com as mídias.

Dessa forma, em Barbosa (2009), essas situações que surgiram no decorrer de todo o processo, desde a elaboração das atividades até o final da coleta dos dados, e que estão presentes nos episódios construídos foram aprofundadas: a visualização proporcionada pelas TIC, o entrelaçamento entre as representações múltiplas e a produção do conhecimento matemático como um processo coletivo.

Um dos objetivos da pesquisa foi incorporar a visualização ao ensino e aprendizagem da função composta, entendendo que essa seja uma alternativa ao aspecto estritamente algébrico. No entanto, a abordagem algébrica tem ainda um papel preponderante junto aos alunos, embora, algumas vezes, esses se desloquem entre as representações múltiplas. Não se quer com isso desmerecer a representação algébrica, mas outorgar à abordagem gráfica pelo menos o mesmo *status*.

Ainda que não seja o foco deste estudo, as concepções dos alunos relacionadas às funções como uma lei de formação também foram mencionadas na análise. Entende-se que essa concepção está arraigada na cultura da sala de aula, por isso o aluno sente dificuldade em analisar um gráfico ou uma tabela quando não se tem uma expressão algébrica.

No decorrer da pesquisa, outras indagações acerca das atividades propostas e do papel da pesquisadora foram surgindo. A partir dessas indagações, apresentaram-se algumas considerações procurando enfatizar o papel do professor-pesquisador e das atividades como uma sugestão para outros professores em sua prática da sala de aula, no Ensino Superior. As contribuições de uma tese não se restringem ao seu resultado final, mas a um repertório de assuntos, desde os tópicos matemáticos abordados, perpassando pelos procedimentos metodológicos e as atividades propostas que, embora tenham um objetivo intrínseco à tese, também é um produto de compartilhamento para que outros professores possam adaptá-las à sua sala de aula.

Referências Bibliográficas

ALVES-MAZZOTTI, A. J. O método nas ciências sociais. In: ALVES-MAZZOTTI, A. J.; GEWANDSZNAJDER, F. **O método nas ciências naturais e sociais**: pesquisa quantitativa e qualitativa. 2.ed. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 1999. Parte II, p. 107-188.

ARAÚJO, J. L.; BORBA, M. C. Construindo pesquisas coletivamente em educação matemática. In: BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. (Org.) **Pesquisa qualitativa em educação matemática.** Belo Horizonte: Autêntica, 2004. Cap.1, p.25-45. 120 p. (Coleção Tendências em Educação Matemática).

BARBOSA, S. M. **Tecnologias da Informação e Comunicação, Função Composta e Regra da Cadeia.** 2009. 199 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Rio Claro, 2009.

BORBA, M.; CONFREY, J. A student's construction of transformations of functions in a multiple representational environment. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, v.31, n.3, p.319-337, 1996.

BORBA, M. C.; VILLARREAL, M. E. **Humans-with-media and the reorganization of mathematical thinking**: information and communication technologies, modeling, experimentation and visualization. New York: Springer, 2005. 232 p. (Mathematics Education Library, 39).

FREUDENTHAL, H. **Mathematics as an educational task**. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company, 1973.

GUZMÁN, M. The role of visualization in the teaching and learning of mathematical analysis. In: International Conference on the Teaching of Mathematics at the Undergraduate Level, 2., 2002, Hersonissos. **Proceedings of 2nd International Conference on the Teaching of Mathematics at the Undergraduate Level**. Hersonissos: University of Crete, 2002. p.1-24. Disponível em: <http://www.math.uoc.gr/~ictm2/>. Acesso em: 9 mai. 2007.

LÉVY, P. **As tecnologias da inteligência**: o futuro do pensamento na era da informática. Tradução de C. I. Costa. Rio de Janeiro: Editora 34, 1993. 208 p. (Coleção Trans).

LINCOLN, Y. S.; GUBA, E. G. **Naturalistic inquiry**. California: Sage Publications, 1985.

MORAN, J. M. Ensino e aprendizagem inovadores com tecnologias audiovisuais e telemáticas. In: MORAN, J. M.; MASETTO, M. T.; BEHRENS, M. A. **Novas tecnologias e mediação pedagógica**. 12.ed. Campinas: Papirus, 2006. Cap.1, p.11-65. 173 p. (Coleção Papirus Educação).

MORAN, J. M. **A educação que desejamos**: novos desafios e como chegar lá. Campinas: Papirus, 2007. 174 p. (Coleção Papirus Educação).

STEFFE, L. P.; THOMPSON, P. W. Teaching experiment methodology: underlying principles and essential elements. In: LESH, R.; KELLY, A. E. **Research Design in Mathematics and Science Education**. Hillsdale: Erlbaum, 2000. p.267-307.

STEINBRING, H. **The construction of new mathematical knowledge in classroom interaction**: an epistemological perspective. Dordrecht: Springer, 2005. 236 p. (Mathematics Education Library, 38).

TIKHOMIROV, O. K. The psychological consequences of computerization. In: WERTSCH, J. V. (Ed.) **The concept of activity in sovietc psychology**. New York: M. E. Sharpe, 1981. p.256-278.

VILLARREAL, M. E. **O pensamento matemático de estudantes universitários de cálculo e tecnologias informáticas**. 1999. 402 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Rio Claro, 1999.