COMPARAÇÃO DE LOTERIAS: UMA PROPOSTA DE AULA DE PROBABILIDADE

COMPARISON OF LOTTERIES - A PROPOSED OF CLASS OF PROBABILITY

Rogério César dos Santos

Universidade de Brasília, professorrogeriocesar@gmail.com

Resumo

A presente sugestão para a sala de aula pretende estabelecer uma comparação probabilística entre o jogo da Mega-Sena e o seu equivalente nos Estados Unidos, o Powerball, como sugestão de atividade para uma aula de Matemática. O intuito é incentivar, através desta aplicação em jogos de sorte, o estudo da Análise Combinatória entre os estudantes do Nível Médio da Educação Básica. O conceito de independência de eventos também será explorado. A metodologia sugerida para esta atividade é a instigação, isto é, o professor provoca o aluno a raciocinar através de perguntas referentes ao número de apostas que combinam com certos sorteios realizados pela loteria. A motivação para o presente trabalho é o relato de experiências e constatações de outros pesquisadores na área de ensino de matemática, como Erica Cavalcanti e Gilda Guimarães (2009), e Aparecida Francisco da Silva e Helia Matiko Yano Kodama (2004). Ressalta-se que não colocamos em prática as atividades aqui descritas. O presente trabalho tem o intuito apenas de oferecer sugestões de aulas dentro do assunto Análise Combinatória.

Palavras-chave: Probabilidade, Mega-Sena, Análise Combinatória, Loterias, Eventos independentes

Abstract

This article seeks to establish a probabilistic comparison between the game of the Mega-Sena and its equivalent in the United States, the Powerball, as a suggestion of activity for a math class. The aim is to encourage, through this application in games of chance, the study of Combinatorial Analysis between the students of School of Basic Education. The concept of independence of events will also be explored. The methodology suggested for this activity is instigating, ie, the teacher leads the student to think through questions regarding the number of bets that combine with certain raffles conducted by the lottery. The motivation for this work is to report experiences and findings of other researchers in mathematics education, as Erica Cavalcanti and Gilda Guimaraes (2009), and Francisco Aparecida da Silva and Helia Matiko Yano Kodama (2004). We emphasize that we did not put into practice the activities described here. This paper is intended only to provide suggestions for teaching the subject in Combinatorial Analysis.

Keywords: Probability, Mega-Sena, Combinatorial Analysis, Lotteries, Independent Events

Introdução

A Mega-Sena, o jogo de sorte da Caixa Econômica Federal mais conhecido no Brasil, apresenta uma probabilidade de vitória, com uma aposta simples, igual a 1 / 50.063.860, cujo cálculo é dado pela expressão $\frac{1}{C_{60,6}} = \frac{54!\times 6!}{60!} = \frac{1}{50.063.860} \cong 2 \times 10^{-8} = 0{,}000002\%$. O denominador da fração corresponde à quantidade de possíveis sorteios realizados pela Caixa, sendo que são sorteados aleatoriamente seis números dentre os números de 1 a 60. Seis também é a quantidade de números escolhidos pelo apostador para compor uma única aposta simples. Por isso, a chance de vitória é 1 em 50.063.860 possíveis sorteios.

Este cálculo combinatório já está bastante divulgado no meio acadêmico, como podemos ver no artigo de Flávio Wagner Rodrigues (2004), e não traz grandes dificuldades de entendimento para os alunos. A dificuldade surge quando se quer calcular a probabilidade de vitória na Quadra ou na Quina. A quadra é a coincidência de exatamente 4 números marcados no seu bilhete com os sorteados pela Caixa. E a quina é a coincidência de 5 números. A loteria dos Estados Unidos, o Powerball, possui cálculos bem semelhantes aos que se fazem para a Quadra e para a Quina, como veremos nesta sugestão de atividade.

Tópicos históricos de Probabilidade, Estatística e suas aplicações

Os jogos de sorte foram a grande motivação ao estudo da probabilidade para matemáticos famosos como Tartagila, Cardano e Galileu Galilei – os três do século XVI, e Fermat, Bernoulli e Pascal – os três do século XVII. Bernoulli, em particular, foi quem iniciou o estudo da Distribuição Binomial, conteúdo hoje estudado no Ensino Médio.

Os jogos de extração de bolas foram os primeiros a serem examinados. O problema crucial era saber a probabilidade de se extrair uma bola branca de dentro de uma caixa contendo *x* bolas brancas e *y* pretas. Como se sabe, a probabilidade é $\frac{x}{x+y}$.

A Thomas Bayes devemos o conceito da probabilidade inversa. Laplace foi outro grande nome da época, associando a Astronomia à Probabilidade. Quetelet aplicou a Probabilidade em fenômenos sociais. Já no século XIX, houve grandes nomes na Probabilidade e na Estatística, como Pearson, que aplicou os seus estudos para aperfeiçoar a teoria de Charles Darwin sobre a evolução. Outro cientista da época foi Cournot, que aplicou a Probabilidade nas ciências econômicas.

Chebyshev, Markov e Lyapunov foram importantes no desenvolvimento da Teoria da Probabilidade aliada à Matemática.

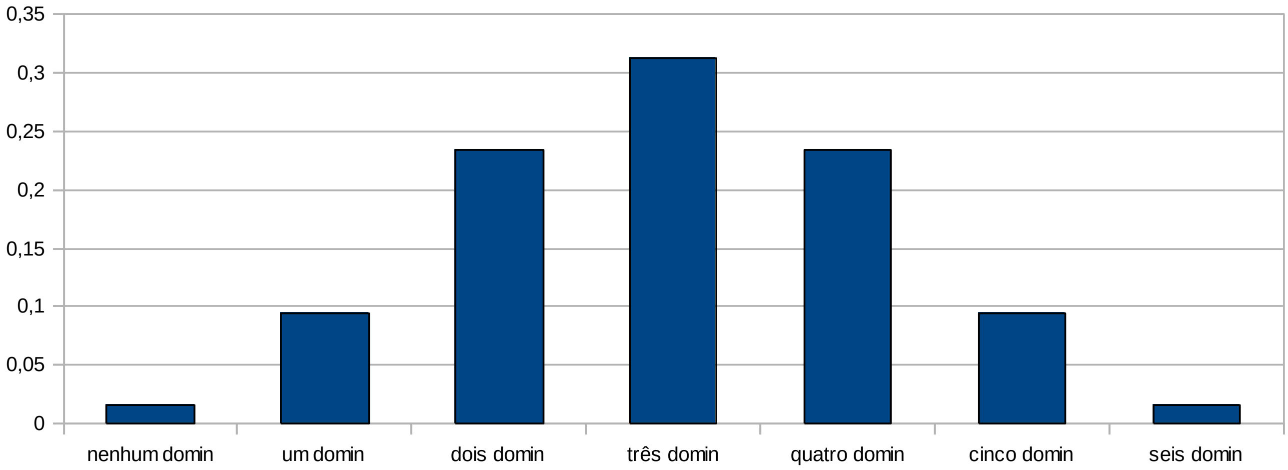
No século XX, o trabalho de Kolmogorov foi de suma importância por dar fundamento matemático rigoroso à Teoria da Probabilidade. Fisher se destaca por trabalhar a Estatística em Genética, aprofundando os trabalhos realizados por Mendel sobre o efeito dos genes uns sobre os outros.

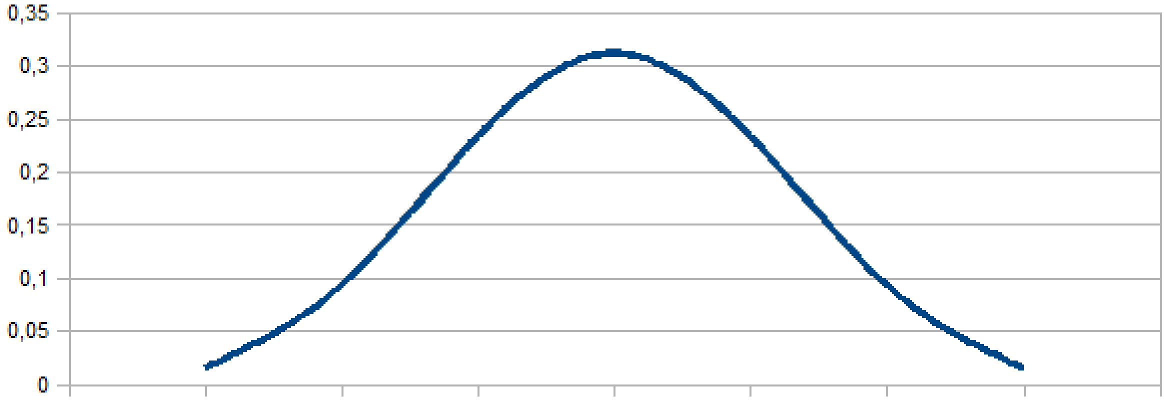
Gauss foi outro grande nome na teoria Estatística, ao se empenhar, dentre outros assuntos, na Distribuição Normal de Probabilidade, a mais usada em quase todos os ramos das Ciências. Os livros de Biologia do Ensino Médio trazem a Distribuição Normal tratada por Gauss no contexto com que foi aproveitada no estudo da herança genética.

Como este é um assunto que liga substancialmente a Matemática à Biologia, vale a pena nos determos em alguns pormenores. A história nos mostra que os dois ramos das ciências se encontraram de maneira singular, assim: imaginemos um cruzamento entre indivíduos de genótipos AABBCC e aabbcc, ou seja, entre um indivíduo que tem todos os genes dominantes (letras maiúsculas), e o outro que não possui genes dominantes. Consideremos a herança quantitativa (ou poligênica), isto é, o que importa é a quantidade de genes dominantes ou recessivos, e não a sua natureza. A primeira geração, chamada F_1, é formada por indivíduos de genótipo AaBbCc, pois esse indivíduo herda um gene do pai e outro da mãe, de cada tipo de letra. Agora, se dois indivíduos da geração F_1 cruzam, isto é, dois do tipo AbBbCc, os resultados variam em aabbcc, Aabbcc, AAbbcc, aaBbcc, aaBBcc, aabbCc, aabbCC, etc, até o último AABBCC. Fazendo uma tabela com todos os 64 possíveis tipos de genótipos dessa geração F_2, e agrupando esses indivíduos em quantidade de genes dominantes (letras maiúsculas), obtemos os seguintes resultados (na herança poligênica, cada um dos oito resultados abaixo corresponde a um único fenótipo, por exemplo, cor de pele, da mais clara – todos os genes recessivos, até a mais escura – todos os genes dominantes):

- nenhum gene dominante: apenas um indivíduo (isto é, 1 em 64);
- um gene dominante: 6 indivíduos (isto é, 6 em 64);
- dois genes dominantes: 15 indivíduos (isto é, 15 em 64);
- três genes dominantes: 20 indivíduos (isto é, 20 em 64);
- quatro genes dominantes: 15 indivíduos (isto é, 15 em 64);
- cinco genes dominantes: 6 indivíduos (isto é, 6 em 64);
- todos os seis genes dominantes: apenas um indivíduo (isto é, 1 em 64).

Construindo então o gráfico de Distribuição destas Probabilidades, obtemos:
Gráfico 1: a Distribuição de Probabilidades segundo a quantidade de genes dominantes

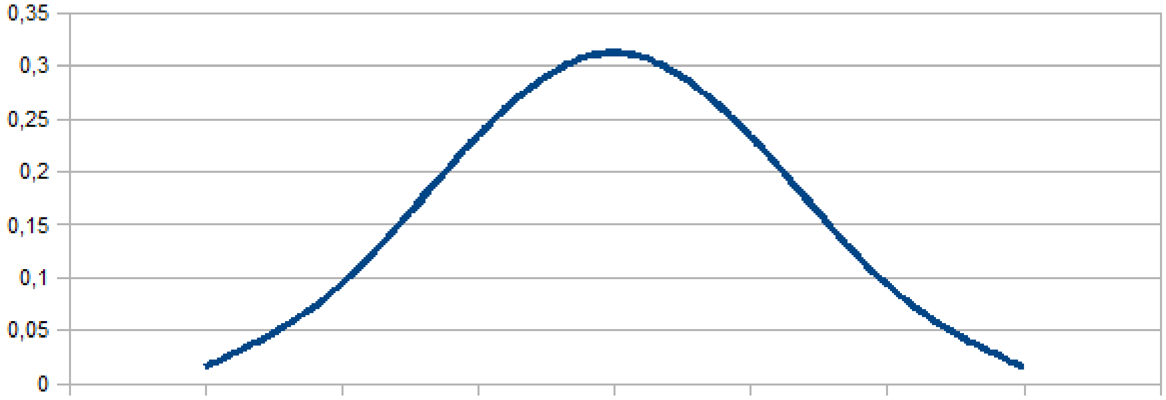




Fonte: Gráfico produzido no software livre BrOffice

Se aproximarmos esse gráfico por uma linha, obtemos a forma de sino, que caracteriza os indivíduos da geração F_2 :

Gráfico 2: A curva de Gauss



Fonte: Gráfico produzido no software livre BrOffice

Em homenagem ao matemático, esse gráfico em forma de sino levou o nome de Curva de Gauss.

Cabe acrescentar que escolhemos neste exemplo uma configuração genética com 8 genes, mas pode-se trabalhar com configurações genéticas com menos ou mais genes, em todo caso, a geração F_2 sempre terá uma distribuição de probabilidades aproximada por uma curva Normal, em relação ao número de genes dominantes. Estes detalhes podem ser encontrados em livros de Ensino Médio de Biologia, de José Luis Soares (1997). Professores de Biologia e de Matemática têm aqui a oportunidade de trabalharem juntos os seus conteúdos – Genética e Probabilidade.

Hoje, na Estatística Moderna, alguns dos tópicos de interesse na área são inferência de médias de populações, testes de hipóteses, ajustamento de curvas, etc. E em todas elas a teoria da Probabilidade está por trás. Suas aplicações são inúmeras e atingem praticamente todas as áreas das Ciências, como Sociologia, Física, Astronomia, Agronegócio, Medicina, Biologia, Engenharia, Política, etc. Um medicamento só é lançado no mercado quando passado por testes estatísticos modernos. Previsões metereológicas também são baseadas em análises estatísticas. Empresas definem estratégias de ação baseadas em estatísticas conseguidas com pesquisas de opinião. Produtos são fabricados seguindo um padrão de controle de qualidade baseado em estatísticas. E assim por diante.

A Quina da Mega-Sena

Vamos dar a seguir uma sugestão de atividade que mostra uma aplicação da Análise Combinatória e da Probabilidade em jogos de sorte. Iremos supor aqui que toda a teoria de Combinações, Arranjos, Permutações, Probabilidade, Eventos Independentes, Probabilidade da União e da Intersecção já tenham sido abordados nas aulas. A atividade sugerida é a seguinte: o professor de Matemática pede para os alunos comporem possíveis combinações de seis números que sejam vitoriosos na Quina, dado que os números sorteados pela Caixa foram, por exemplo: 6, 12, 22, 23, 40, 50. É possível que, desta forma, eles cheguem, sozinhos, à fórmula da quantidade de jogos que são vitoriosos na Quina, que trabalharemos logo abaixo. Como o aluno pensaria em compor a sua aposta? Provavelmente, ele saberá que, para se criar uma aposta vitoriosa na Quina, destes seis números, escolhem-se cinco, por exemplo 12, 22, 23, 40 e 50 (o 6 está de fora). Já dos cinquenta e quatro não sorteados pela Caixa, escolhe-se um, por exemplo, 42, completando a aposta de seis números.

Uma outra possibilidade de aposta seriam os números 6, 22, 23, 40, 50 e 2 (o 12 ficaria de fora e o 2 entraria). Como se constroem estas apostas que são vitoriosas na Quina? Da seguinte forma: dos seis números sorteados pela Caixa, cinco devem ser escolhidos, e dos demais cinquenta e quatro não sorteados, um deve ser escolhido, completando assim a aposta. Sabe-se que a ordem de escolha não interfere no resultado, então, com uma aposta simples de seis números marcados na cartela, existem $C_{6,5} \times C_{54,1} = \frac{6!}{1! \times 5!} \times \frac{54!}{53! \times 1!} = 6 \times 54 = 324$ jogos que são vitoriosos na Quina. Assim, a probabilidade de se ganhar uma Quina é de $\frac{324}{50.063.860} \cong 6{,}5 \times 10^{-6} = 0{,}00065\%$. Este resultado consta de forma aproximada no site da Caixa (2012), em forma de fração: 1 chance em 154.518, ou seja $\frac{1}{154.518} \cong 0{,}00065\%$.

A Quadra da Mega-Sena

A Quadra se ganha acertando quatro e errando dois números. Mais uma vez, o professor pode sugerir aos alunos que busquem compor seis números que sejam ganhadores na Quadra, dada uma combinação específica de seis números que correspondem ao sorteio realizado pela Caixa. Desta forma, tentando compor os sorteios ganhadores na Quadra, os alunos poderão se convencer da fórmula que calcula a quantidade de jogos vitoriosos.

Fazendo a mesma análise anterior, chega-se à conclusão de que existem $C_{6,4} \times C_{54,2} = 21.465$ jogos vitoriosos na Quadra com uma aposta simples de seis números. Ou seja, dos seis números sorteados pela Caixa, quatro devem ser escolhidos, e dos cinquenta e quatro restantes, dois devem ser escolhidos para a composição de uma aposta que seja vitoriosa na Quadra. Assim, com uma única cartela simples, a chance de vitória é de $\frac{21.465}{50.063.860} \cong 4{,}3 \times 10^{-4} = 0{,}043\%$. Este resultado também consta de forma aproximada no site da Caixa em forma de fração: 1 chance em 2.332, ou seja, $\frac{1}{2.332} \cong 0{,}043\%$.

Nos Estados Unidos – o Powerball

Débora Rumsey (2010) mostra, como um exemplo de aplicação da Probabilidade em jogos de sorte, o Powerball, uma das principais loterias dos Estados Unidos. É um jogo no qual o apostador deve escolher cinco números entre 1 e 59, e também um número à parte entre 1 e 35, chamado powerball. No dia do sorteio, cinco números são sorteados entre 1 e 59, e também o número powerball entre 1 e 35. É, portanto, um jogo de *duas partes, independentes entre si*.

Se o jogador tiver acertado os cinco números, não importando a ordem, e mais o powerball, ele ganha o prêmio principal. Porém, há outros prêmios, como veremos adiante.

Por exemplo, se ele tiver acertado os cinco números, mas tiver errado o powerball, ele terá ganho o segundo melhor prêmio. Existem ainda outras maneiras de se ganhar prêmios na loteria Powerball, como está mostrado abaixo (tirado do site oficial do Powerball, dia 19 de março de 2012):

- acertar os cinco números e mais o powerball – prêmio máximo – variável;
- acertar os cinco números e errar o powerball – 1 milhão de dólares;
- acertar quatro dos cinco números e mais o powerball – 10 mil dólares;
- acertar quatro dos cinco números e errar o powerball – 100 dólares;
- acertar três dos cinco números e mais o powerball – 100 dólares;
- acertar três dos cinco números e errar o powerball – 7 dólares;
- acertar dois dos cinco números e mais o powerball – 7 dólares ;
- acertar um dos cinco números mais o powerball – 4 dólares;
- acertar apenas o powerball – 4 dólares.

Podemos observar que não há prêmio acertando apenas dois dos números sorteados tendo errado o powerball. E muito menos acertando apenas um dos cinco números tendo errado o powerball.

Em figuras, vamos estabelecer a legenda, para facilitar a análise:

○ simboliza número coincidente com um dos cinco sorteados.

≠ simboliza número não coincidente com nenhum dos cinco sorteados.

● simboliza o número powerball correto.

□ simboliza o número powerball errado.

Assim, as possibilidades de prêmios são, na mesma ordem apresentada acima (observa-se que a ordem em que os símbolos "○" e "≠" aparecem em cada prêmio não importa para o sorteio):

○○○ ○○ ●; ○○○ ○○ □; ○○○ ○≠ ●; ○○○ ○≠ □; ○○○ ≠≠ ●; ○○○ ≠≠ □;

○○≠ ≠≠ ●; ○≠≠ ≠≠ ●; ≠≠≠ ≠≠ ●

Vamos contabilizar a chance de se ganhar cada prêmio, na ordem em que está aí. Todos os cálculos serão baseados na aposta simples, isto é, o jogador escolhe cinco números, e mais o número powerball. Entretanto, o professor pode, primeiro, compor um sorteio de cinco números e mais o powerball, e pedir para que os alunos montem apostas que sejam vitoriosas em cada um dos prêmios acima, para que eles mesmo possam chegar às probabilidades, cujos cálculos serão mostrados a seguir.

Obviamente, a chance de se acertar o número powerball é 1 em 35, isto é, 1 / 35. Agora, observa-se que existem $C_{59,5}$ maneiras de se sortearem cinco números entre 1 e 59. Além disso, estamos considerando a aposta única formada por cinco números escolhidos pelo apostador. Logo, a chance de se obter o prêmio ○○○ ○○ ● é:

$\frac{1}{C_{59,5}} \times \frac{1}{35} \cong 5{,}71 \times 10^{-9}$, ou 1 em 175 milhões aproximadamente, onde usamos aqui o fato de as duas fases da aposta serem independentes. Este e os demais resultados aparecem no site oficial do Powerball, como veremos mais adiante. Continuemos os cálculos.

Analogamente ao caso anterior, a chance de se obter ○○○ ○○ □ é:

$\frac{1}{C_{59,5}} \times \frac{34}{35} \cong 1{,}94 \times 10^{-7}$, ou 1 em 5 milhões aproximadamente.

As próximas probabilidades são bem semelhantes às que são calculadas para a Quina e para a Quadra da Mega-Sena. Vamos responder então à nossa próxima questão: qual é a chance de se obter ○○○ ○≠ ●? Dos cinco números sorteados, quatro devem coincidir com quatro dos escolhidos pelo apostador, e dos cinquenta e quatro restantes, um deve coincidir. Assim, existem $C_{5,4} \times C_{54,1} = 270$ jogos favoráveis, ou seja, 270 maneiras de se acertarem quatro dos cinco números sorteados, e consequentemente errar um deles. Logo, a chance de se obter o prêmio ○○○ ○≠ ● é

$$\frac{C_{5,4} \times C_{54,1}}{C_{59,5}} \times \frac{1}{35}$$, ou 1 em 649 mil aproximadamente.

Analogamente, a chance de se obter ○○○ ○≠ □ é $\frac{C_{5,4} \times C_{54,1}}{C_{59,5}} \times \frac{34}{35}$, ou 1 em 19 mil aproximadamente.

Os demais casos são similares. Vamos ao prêmio ○○○ ≠≠ ●.

Pensando na mesma forma que antes, a chance de se obter este prêmio é:

$$\frac{C_{5,3} \times C_{54,2}}{C_{59,5}} \times \frac{1}{35}$$, ou 1 em 12 mil aproximadamente.

E, consequentemente, a chance de se obter o prêmio ○○○ ≠≠ □ é:

$$\frac{C_{5,3} \times C_{54,2}}{C_{59,5}} \times \frac{34}{35}$$, ou 1 em 360 aproximadamente.

A seguir, as chances de se obterem os prêmios restantes são as seguintes:

○○≠ ≠≠ ● → $\frac{C_{5,2} \times C_{54,3}}{C_{59,5}} \times \frac{1}{35}$, ou 1 em 706 aproximadamente.

○≠≠ ≠≠ ● → $\frac{C_{5,1} \times C_{54,4}}{C_{59,5}} \times \frac{1}{35}$, ou 1 em 111 aproximadamente.

≠≠≠ ≠≠ ● → $\frac{C_{54,5}}{C_{59,5}} \times \frac{1}{35}$, ou 1 em 55 aproximadamente. Aliás, o site oficial do Powerball (2012) possui uma seção na qual se pergunta porque a probabilidade de se ganhar o último prêmio, ≠≠≠ ≠≠ ●, é de 1 em 55, e não de 1 em 35, já que neste prêmio nenhum número coincide com os cinco sorteados, apenas a bola powerball. A explicação é que, no cálculo da probabilidade de se acertar a bola powerball, que é de 1 / 35, deve-se levar em conta todas as possibilidades para as cinco bolas, e não apenas o caso em que se errem todos os cinco números.

No site oficial do Powerball as probabilidades são mostradas de maneira aproximada, em forma de fração. Por exemplo, a chance de se ganhar o segundo prêmio é, segundo o site, de 1 em 5.153.632,65. O prêmio principal é o único cuja chance é inteira: 1 em 175.223.510. Para obter todas estas e as demais probabilidades no site, deve-se clicar em *How to Play*, e depois em *9 Ways to Win*, no corpo do texto.

Uma outra questão interessante no Powerball que pode ser abordada é: qual é a chance se ganhar *algum* desses prêmios com uma aposta simples? É uma boa horar para se trabalhar eventos excludentes, e também probabilidade da união de eventos. De fato, como eles são excludentes, basta que se somem as chances obtidas acima, resultando em 3,1%, ou 1 em 32 aproximadamente.

Existe também um site brasileiro, no qual é possível fazer apostas no Powerball de forma on-line, o <http://pt.trillonario.com/powerball.php>. Lá também se encontram as probabilidades de cada prêmio, bem como as instruções do jogo. Além disso, na página principal deste site é possível conhecer outras loterias pelo mundo, inclusive a Mega Millions, também dos Estados Unidos, cujas apostas e prêmios são bem semelhantes ao Powerball. Por isso, seria de grande interesse didático se os alunos também pudessem calcular as probabilidades de se ganhar cada prêmio no Mega Millions.

Comparando chances – uma sugestão de experimento

Mas, como interpretar um resultado do tipo 1 / 50 milhões, que é o caso da Mega-Sena? Existe um experimento bem simples que pode ajudar o aluno a entender com que tipo de probabilidade ele está lidando, que é o seguinte: o professor pede para que os alunos lancem uma moeda por vinte e duas vezes seguidas, desafiando-os com que todos os lançamentos sejam cara (ou coroa), sem recomeçar. É muito provável que ninguém consiga obter apenas cara em todos os lançamentos, no máximo alguém pode conseguir seis ou sete seguidas.

Então, o professor pode pedir para que os alunos calculem a probabilidade de se obterem vinte e duas caras nos vinte e dois lançamentos. Pela independência dos lançamentos, a probabilidade é $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2^{22}}=\frac{1}{4.194.304}$, bem mais fácil do que a Mega-Sena, que é $\frac{1}{50.063.860}$. Os alunos perceberão, jogando as moedas, que é quase impossível obter as vinte duas caras seguidas. O que dirá então da Mega-Sena? A probabilidade se ganhar no jogo da moeda é quase 12 vezes a chance de se ganhar na Mega-Sena, pois $\frac{1}{2^{22}}\cong 12\cdot\frac{1}{50.063.860}$, e mesmo assim é muito pequena. Uma brincadeira que se pode fazer é: se você quer jogar na Mega-Sena, primeiro jogue uma moeda por vinte e duas vezes seguidas, sem recomeçar. Se todos os lançamentos derem cara (ou coroa), você está com uma pequena fração da sorte necessária para se ganhar na Mega-Sena.

Metodologia

O professor pode provocar o aluno a fazer as contas por si só. Ele propõe um sorteio específico, e pede para que a turma construa apostas que resultam em algum prêmio.

Só então, após apresentadas todas as conclusões obtidas pelos alunos, o professor poderá então usá-las para iniciar a apresentação de uma fórmula que calcula o número de sorteios ganhadores de um determinado prêmio.

Até mesmo a demonstração da fórmula da Combinação pode ser dada nesse momento de investigação. É possível que os próprios alunos cheguem a ela, caso o professor forneça o tempo necessário para a sua formulação.

É como um jogo, no qual o aluno deve encontrar o máximo de sorteios premiados. O jogo, como afirmam Aparecida Francisco da Silva e Helia Matiko Yano Kodama (2004) propicia o estímulo do prazer, a superação da frustração, o que pode causar no aluno um incentivo maior nos estudos, no nosso caso, da Análise Combinatória.

Conclusão

Existe um universo muito rico de jogos de sorte no Brasil e no mundo que podem ser explorados pelo professor de Matemática do Ensino Médio em suas aulas de probabilidade e análise combinatória. O cálculo das chances de vitória de cada jogo e a comparação entre eles mostram o encontro da Matemática com a vida real e com o lúdico. Esta percepção pode levar o estudante a encontrar uma motivação para os seus estudos.

Erica Cavalcanti e Gilda Guimarães (2009) afirmam que, quando os estudantes estão envolvidos com os dados, o aprendizado se torna mais incisivo, facilitando a interpretação dos números, conceitos e fórmulas envolvidos no conteúdo ministrado. No nosso trabalho, acreditamos estar bem próxima da realidade do aluno a questão da aposta em loterias.

Referências

CAVALCANTI, E. e GUIMARÃES, G. Quem gostaria de receber um livro de presente de Natal? **Educação Matemática em Revista** Ano 14, nº 27, p. 9, SBEM, 2009

<http://pt.trillonario.com/powerball.php>. Acesso em: 19 mar. 2012

<http://www.brasilescola.com/matematica/chances-ganhar-na-mega-sena.htm>. Acesso em: 15 mar. 2012.

<http://www.powerball.com>. Acesso em: 19 mar. 2012.

<http://www1.caixa.gov.br/loterias/loterias/megasena/probabilidades.asp>. Acesso em: 16 mar. 2012

RODRIGUES, F. W. A mídia e a mega-sena acumulada **Coleção Explorando o Ensino da Matemática**. Vol. 1. Brasília: MEC, Secretaria de Educação Básica, 2004

RUMSEY, D. **Estatística para leigos.** Rio de Janeiro: Alta Books, 2010

SILVA, A. F. e KODAMA, H. M. Y. **Jogos no Ensino da Matemática**. II Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática, UFBA, p. 3, 2004

SOARES, J. L. **Biologia.** Vol. Único. São Paulo: Scipione, 1997