OS CONCEITOS DE INFINITESIMAL E DIFERENCIAL NAS REGRAS DE DERIVAÇÃO DE LEIBNIZ

THE CONCEPTS OF DIFFERENTIAL AND INFINITESIMAL ON THE LEIBNITZ'S RULES OF DERIVING

Raquel Anna Sapunaru
Institudo de Ciência e Tecnologia/Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri/Campus JK – Diamantina - Minas Gerais/raquel.sapunaru@ict.ufvjm.edu.br

Bárbara Emanuella Souza
Institudo de Ciência e Tecnologia/Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri/Campus JK – Diamantina - Minas Gerais/babydtna@hotmail.com

Débora Pelli
Departamento de Matemática/Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri Campus JK – Diamantina - Minas Gerais/debora.pelli@ufvjm.edu.br

Douglas Frederico Guimarães Santiago
Institudo de Ciência e Tecnologia/Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri/Campus JK – Diamantina - Minas Gerais/douglas.santiago@ict.ufvjm.edu.br

Resumo

Atualmente, a maioria das pesquisas realizadas em/sobre as Ciências Exatas e Tecnológicas tem como base os conceitos dos Cálculos Diferencial e Integral, cujas ideias, notações e formas de operação tiveram origem, em grande parte, na Filosofia de Leibniz. Por razões desconhecidas, Leibniz não deixou claro muitas informações sobre como ele estabeleceu algumas formas de operar esses Cálculos: faltam informações elementares sobre o método por ele utilizado na criação das regras de operações fundamentais da derivada. Por essa razão, especula-se que estas regras tenham sido simplesmente postuladas por Leibniz. Nessa perspectiva, o presente artigo tem por objetivo explicar como Leibniz lidava com o conceito do infinitamente pequeno e propor uma hipótese sobre como ele obteve as regras de diferenciação. A metodologia para atingir este objetivo se baseou nos métodos dedutivo e hipotético-dedutivo e envolveu uma pesquisa bibliográfica acurada.

Palavras-chave: Matemática, História, Infinitesimal.

Submissão: 16/05/2013. Aceite: 07/08/2013

Abstract

At present, most research in/on Exact Sciences and Technology is based on the concepts of calculations Differential and Integral, whose ideas, notations and forms of operation originated mostly in Leibniz's Philosophy. For unknown reasons, Leibniz did not make clear how much information he established certain forms of operating these calculations: they lack basic information about the method used by Leibniz in the creation of rules derived from the fundamental operations. Therefore, it is speculated that Leibniz has simply postulated these rules. From this perspective, the purpose of this article is to explain how Leibniz dealt with the concept of the infinitely small and propose a hypothesis of how he obtained the rules of differentiation. The methodology to reach the objective was based on deductive and hypothetical-deductive methods and involved accurate research at the available literature.

Keywords: Mathematics, History, Infinitesimal.

Introdução

É no texto intitulado "Novo método para máximos e mínimos, e também para tangentes, válido para quantidades irracionais", de 1684, que G. W. Leibniz estabeleceu as bases de um novo Cálculo. Com esta nova ferramenta, Leibniz finalmente encerraria o trabalho de inúmeros matemáticos, iniciado na Grécia antiga e, ajudaria a entender melhor a recém-criada geometria analítica de René Descartes. Assim, foi no intuito de apreender as novidades dessa nova Geometria cartesiana que esse filósofo e matemático alemão criou o conceito de diferencial, até então impensado. Vale lembrar que atualmente a maioria das pesquisas realizadas em/sobre ciências exatas e tecnológicas utiliza-se do conceito de Cálculo Diferencial.Contudo, no referido texto, a noção de diferencial é definida de maneira sumária, dando-nos inicialmente a falsa impressão de que Leibniz só pretendia apresentar uma nova notação e não um novo método: "Chamemos de dx um segmento de reta arbitrariamente escolhido; e; de dv (ou dw , ou dy , ou dz) a diferença de um segmento v (ou w , ou y, ou z) que esteja para dx, como v está para XB (ou mesmo XC, ou XD, ou XE)." (LEIBNIZ, GM V, 1971, p.220).

Negando de certo modo, suas próprias palavras, Leibniz de fato estava introduzindo uma nova operação, a "diferenciação" e sua inversa, a "integração". A diferenciação, foco deste trabalho, se apresenta nesse emblemático texto através de uma nova notação matemática.

No entanto, consideramos as regras de operação da diferenciação tão importantes quanto a própria diferenciação e sua notação, e é sobre elas que versa o presente artigo. Leibniz apresenta, sem maiores explicações, as regras de operação da diferenciação para todas as operações aritméticas conhecidas. Por razões desconhecidas, Leibniz não deixou claro muitas informações sobre como ele estabeleceu algumas formas de operar esses Cálculos. Assim, faltam informações elementares sobre o método por ele utilizado na criação das regras de operações fundamentais da derivada. De certo modo, contrariando sua própria Filosofia calcada numa razão suficiente para uma coisa ser deste modo e não de outro, ele lança, de súbito, as regras de operação do novo Cálculo, ao mesmo tempo em que inaugura um novo método. Na letra de Leibniz:

> Seja a uma constante dada, da será igual a 0, e $d\overline{ax}$ será igual a adx. Se y é igual a v (isto é, toda ordenada da curva YY é igual à ordenada correspondente a curva VV), dy será igual a dv. Adição e Subtração: se $z - y + w + x = v$, $d\overline{z - y + w + x}$ ·, dito de outro modo, dv será igual a $dz - dy + dw + dx$. Multiplicação: $d\overline{xv}$ é igual a $xdv + vdx$, isto é, sendo $y = xv$, nós teremos dy igual a $xdv + vdx$. (LEIBNIZ, GM V, 1971, p.220)

Por que Leibniz não explicou como arrazoou a essas regras? O que o teria motivado a agir desse modo, antagônico às suas próprias crenças? Não pretendemos, de modo algum, responder a essas questões, pois não há literatura suficiente para isto. Todavia, a exemplo de grandes pensadores da obra de Leibniz, tais como Michel Fichant, Michel Serres, André Robinet, entre outros, isso não nos impede de apresentar nossas hipóteses e tentar prová-las da melhor maneira possível, sempre dentro de nosso escopo de atuação. De fato, nossos objetivos neste artigo são: a) entender de forma mais aprofundada como Leibniz lidava com o conceito de infinitesimal e b) entender como este conceito se apresenta em sua definição de diferencial, isto é, como, a partir destes conhecimentos, Leibniz poderia ter deduzido as regras de derivação conforme as conhecemos e propor hipóteses que tentem explicar os motivos de Leibniz ter apresentado as regras sem dedução de como chegar a elas, que pensamos ser uma tentativa de provar que Leibniz inaugurou uma nova forma de pensar a Matemática, sem a Geometria, mas com Álgebra, no rastro da geometria analítica de Descartes. A metodologia usada se baseou nos métodos dedutivo e hipotético-dedutivo e, no que diz respeita a pesquisa em si, empregaremos os modelos tradicionais de pesquisa bibliográfica ou documental, combinado com a pesquisa acadêmica que visa a melhoria do ensino/aprendizado.

A Filosofia por trás do Cálculo Infinitesimal

Um novo modo de compreensão do mundo matemático e, porque não dizer, da natureza, foi proposto por G. W. Leibniz através do Cálculo Infinitesimal, adotado mais frequentemente em função de sua maior adequação notacional se comparado àquele desenvolvido por Isaac Newton. Diferentemente da forma como o Cálculo Diferencial e Integral moderno se apresenta, firmado sob a teoria de limites formalizada por Augustin-Louis Cauchy, no final do século XIX, Leibniz buscou fundamentar aquele por ele desenvolvido baseado no conceito de "infinitesimal", cuja concepção está fortemente associada à lógica e à metafísica. De maneira breve e desprezando certas sutilezas que distinguem suas diferentes concepções, o infinitesimal pode ser considerado, conforme John L. Bell em seu livro *A primer of infinitesimal analysis*, como "[...] a menor parte na qual se poderia fracionar um continuum – como, por exemplo, a linha reta". (BELL apud CARVALHO; D'OTTAVIANO, 2006). Dessa forma, as magnitudes infinitesimais

REnCiMa, v.4, n.2, p. 1-15 , 2013
Submissão: 16/05/2013. Aceite: 07/08/2013

referem-se ao que poderíamos entender como números infinitamente pequenos, menores do que qualquer número real.

Embora seu uso não interferisse na correção dos resultados finais e, por muitas vezes agir como um simplificador de cálculos e teoremas, os infinitesimais de Leibniz pareciam apresentar uma falta excessiva de rigor matemático. Essa deficiência se destacava no processo de diferenciação onde o infinitesimal é inicialmente tratado como “não zero” ao ser utilizado como denominador e mais tarde descartado. Tal negligência não poupou o Cálculo leibniziano de críticas. Além disso, as inconsistências que surgiam quando se pensava em elementos infinitamente pequenos com uma existência real acentuaram o número de pensadores contrários à nova teoria.

Concomitantemente ao surgimento dos opositores, simpatizantes do novo instrumento matemático também se revelavam. Dentre estes, é importante destacar Pierre Varignon que, perante as críticas feitas por Michel Rollé às novas ideias, pediu a Leibniz que deixasse claro o que ele queria precisamente dizer com o infinitamente pequeno. A resposta veio em forma de uma carta, redigida em fevereiro de 1702, sob a qual se baseia esta parte do presente trabalho. Inicialmente, Leibniz buscou esclarecer que não é necessário fazer uso de análises matemáticas para certificar-se que na natureza existem coisas que são infinitamente pequenas quando comparadas com as outras com as quais convivemos. Na ideia leibniziana, o infinito pode ser definido de forma simples como sendo algo incomparável, não importando pensarmos em realidades muito maiores ou muito menores que a nossa. Nos texto “História crítica da República das Letras tanto antigas quanto modernas”, de 1705, Leibniz aponta o infinito como um dos supostos labirintos da Filosofia, devido aos inúmeros paradoxos que tornam sua compreensão tão complicada. Em primeiro lugar, Leibniz negava o número infinito, apesar de admitir que sempre seja possível alcançar um número ainda maior a partir de um preexistente. Leibniz expõe sua ideia dizendo que “Apesar do meu Cálculo Infinitesimal, não admito nenhum número verdadeiramente infinito, ainda que eu confesse que a multiplicidade de coisas ultrapassa qualquer número finito, ou antes, todo número.” (LEIBNIZ, GP VI, 1978, p.629). Em outras palavras, de acordo com Leibniz, não havia o maior dos números, pois não há no mundo um número infinito de coisas, por mais que a quantidade das mesmas seja muito grande. Leibniz admitia ainda que o “verdadeiro infinito” existe na divisão infinita das coisas, ou seja, é representado pelo infinito atual. Resumidamente, o infinito pode ser compreendido como uma tendência, mas nunca como um número. De certa forma, infinitos e infinitesimais são parecidos quando os consideramos como grandezas infinitamente imensuráveis. A diferença resulta então no fato do primeiro evoluir em direção a algo imensuravelmente grande e o segundo ao imensuravelmente pequeno, ambos impossíveis de serem alcançados. Em suma: um é o inverso do outro.

Ainda no campo do infinito, Leibniz afirma que o que é incomparavelmente menor não tem valor em relação a magnitudes que são incomparavelmente maiores. Em outras palavras, o infinitesimal leibniziano, tratando-se de uma magnitude de valor tão pequeno, quando é subtraído ou adicionado a qualquer outra magnitude, não traz mudanças significativas, ao ponto de serem consideradas. Nesse sentido, podemos compreender porque muitas vezes no processo de diferenciação Leibniz despreza o chamado infinitesimal, negligenciando-o ou desconsiderando-o nos cálculos, como se representassem um valor nulo. Isso porque, como já dito, o infinitesimal é incomparavelmente menor a qualquer outra magnitude, podendo ser desprezado. Além disso, Leibniz se ampara no fato de que qualquer erro proveniente de tal procedimento poderia ser deixado de lado, visto que tal magnitude é capaz de assumir valores infinitamente pequenos, fazendo de tal erro tão pequeno quanto a própria magnitude. Assim, Leibniz, em carta a Varignon datada de 2 de fevereiro de 1702, argumenta que "[...] nesse sentido que uma porção da matéria magnética que passa através do vidro não é comparável a um grão de areia, ou este grão de areia para o globo terrestre, ou o globo para o firmamento." (LEIBNIZ, GM IV, 1971, p. 91-92). Portanto, uma vez que a Matemática é caracterizada como uma ciência de padrões abstratos, torna-se fácil compreender no que Leibniz se baseou ao afirmar que as magnitudes infinitesimais não são fixas, nem tão pouco determinadas. O filósofo deixa claro que estas magnitudes podem ser tão pequenas quanto desejarmos, a fim de realizar algum tipo de raciocínio geométrico, levando ao infinitamente pequeno no sentido rigoroso.

Por exemplo: se tomarmos a Via Láctea como um espaço utilizado para comparação, um m^3 poderia gerar uma representação razoável para a noção de infinitesimal, na medida em que é incomparavelmente menor ao espaço representado pela Via Láctea. No entanto, se o espaço tratado for uma caixa de fósforos, um mm^3 também poderia expressar essa mesma noção. O fato é que o infinitesimal se apresenta como um conceito ideal, puramente matemático que se molda de acordo com as nossas necessidades. Vale ressaltar que o conceito do infinitesimal na Matemática leibniziana apresentava-se fortemente relacionado ao "Princípio de Continuidade" que é exposto claramente na introdução dos *Novos Ensaios*, no qual Leibniz afirma:

> Nada se faz de repente, e uma das minhas grandes máximas, e das mais comprovadas, é que a natureza nunca faz saltos: o que eu denominei Lei da Continuidade [...] ela significa que se passa sempre do pequeno ao grande, e vice-versa, através do médio, tanto nos graus como nas partes, e que jamais um movimento nasce imediatamente do repouso nem se reduz, a não ser por um motivo menor. (LEIBNIZ, 1988, p.10).

Esse princípio permitia tratar a tangente a uma curva como um tipo especial de secante. De acordo com Leibniz, este tipo peculiar de secante se diferenciava das demais pelo fato da distância entre os pontos em que a mesma cortava a curva ser infinitamente pequena. Assim, como no caso da tangente, Leibniz no texto "Sobre a descoberta das formas dimensionais", de 1684, arrojadamente assevera que podemos considerar a curva como equivalente a um polígono de infinitos lados. (LEIBNIZ, GM V, 1971, p.126).

REnCiMa, v.4, n.2, p. 1-15 , 2013
Submissão: 16/05/2013. Aceite: 07/08/2013

Tais afirmações são legitimadas pelo “Princípio de Continuidade” que autoriza admitir algo como “[...] um equivalente a uma instância particular do seu próprio contraditório [...].” (LEIBNIZ, GM IV, 1971, p.93) Isto significa que pode~~r~~mos tomar o repouso como um movimento infinitamente pequeno, o paralelismo como um caso de convergência, a coincidência como uma distância infinitamente pequena, a igualdade como a última das desigualdades e, porque não, a curva como um polígono de infinitos lados. A questão é que, de fato, não há o absoluto no pensamento de Leibniz, nos moldes de Newton. Tudo o que existe são graus do “ser”, relativizados por relações de todo o tipo. No que concerne a esta questão, de acordo com Leibniz, pode-se dizer que repouso, igualdade e círculo, entre outros, são, respectivamente, terminações do movimento, das desigualdades e dos polígonos regulares, que se transformam uns nos outros por uma mudança contínua, livre de saltos. Sendo assim, no pensamento leibniziano é possível, de acordo com a ciência dos infinitos e infinitesimais, transformar, através de movimentos contínuos, os polígonos em círculo sem realizar saltos. Por conseguinte, podemos estabelecer uma curva como um polígono infinitangular e, o tratamento da tangente dado por Leibniz no “Novo método para máximos e mínimos, e também para tangentes, válido para quantidades irracionais”, pode ser entendido como: “[…] encontrar a tangente é traçar uma reta unindo dois pontos de uma curva tendo [entre si] uma distância infinitamente pequena, ou seja, produzindo o lado de um polígono infinitangular que, para nós, equivale à curva.” (LEIBNIZ, GM V, 1971, p. 223).

De certa forma, a distância existente entre os pontos da curva cortados pela tangente, bem como o comprimento de um dos lados do polígono infinitangular que aqui é equivalente a esta curva, representam magnitudes de ordem infinitesimal. No entanto, a continuidade que fornece suporte a essa concepção do infinitesimal é algo idealizado, uma vez que não há na natureza nada composto de partes perfeitamente uniformes. Desse modo, na concepção leibniziana, o infinitesimal, bem como o espaço, o tempo, a Geometria, o contínuo, etc., são entes mentais e por isso, só acessíveis pela inteligência humana. Embora estes entes mentais sejam ideais, não significa que não se apliquem ao real, da mesma forma como a Matemática, constituída de entes ideais, pode modelar a natureza. Não só para o infinitesimal, como em outros campos da Matemática isso já se mostra claro. Exemplificando: por mais difícil que seja sua materialização, ou até mesmo impossível, os números imaginários não deixam de se apresentar como uma “ferramenta” de grande utilidade para resoluções de problemas de ordem do mundo real, ou seja, da natureza. Apesar da idealidade do infinitesimal, Leibniz não desiste da concepção real do infinitamente divisível que demonstra a sua crença no infinito atual. Nesse sentido, Leibniz, em carta a Simon Foucher, possivelmente datada de 1692, confessa:

> Eu sou tão a favor do infinito atual que, ao invés de admitir que a natureza o abjura, como se diz frequentemente, sustento que a natureza o produz onde quer que seja, a fim de melhor assinalar as perfeições do seu Autor. Assim, acredito que não haja parte alguma da matéria que não seja, não direi divisível, mas realmente

REnCiMa, v.4, n.2, p. 1-15 , 2013
Submissão: 16/05/2013. Aceite: 07/08/2013

dividida; e consequentemente a última partícula deve ser concebida como um mundo pleno de uma infinidade de criaturas diferentes. (LEIBNIZ, GP I, 1978, p. 416).

Resumidamente, Leibniz admitia que a matéria, discreta e extensa, era composta por uma infinidade de unidades descontínuas, proporcionando uma divisão *ad infinitum.* A título de esclarecimento, imaginemos uma folha de papel que possui determinadas dimensões que a tornam um corpo finito. Segundo Leibniz, esta mesma folha finita poderia ser dividida em infinitas partes que caracterizariam o “verdadeiro infinito”. Essas ideias se contrapõem às teorias atomísticas que remontam da época de Leucipo de Mileto e de seu discípulo Demócrito de Abdera até à Física das Partículas atualmente estudada. No entanto, a cada dia se descobrem mais e mais subpartículas de dimensões cada vez menores que nos fazem pensar se a matéria não seria realmente infinitamente divisível. Contudo, não estamos aqui para julgar a correção das teorias leibnizianas e sim, para tentar compreendê-las.

Justificação do Cálculo Infinitesimal por meio da Álgebra Comum

Sob a luz da discussão que estabelecemos na seção anterior faremos agora uma defesa da argumentação leibniziana em pró do Cálculo Infinitesimal. Propondo-se a realizar uma justificativa formal para o Cálculo Infinitesimal e levando a termo da Geometria e da Álgebra, Leibniz formulou um diagrama geométrico que se encontra representado na Figura 1. Para formulação deste diagrama, inicialmente, foram traçados os segmentos de reta AX e EY que se interceptam no ponto C. Partindo dos pontos E e Y, foram traçados EA e YX, perpendiculares a AX. Os segmentos AC, AE, AX e XY foram nomeados, respectivamente, como c, e, x e y.

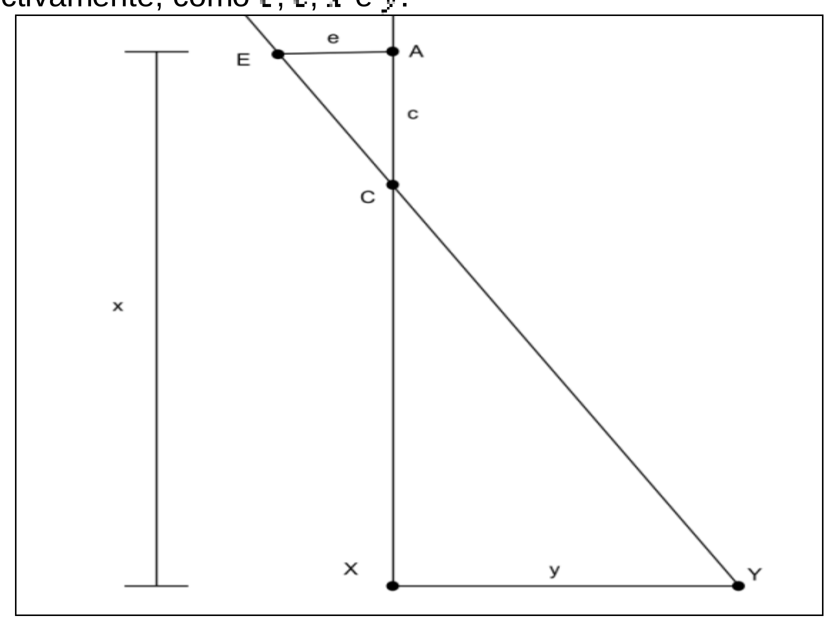

Figura 1 - Infinitesimal de Leibniz

REnCiMa, v.4, n.2, p. 1-15 , 2013
Submissão: 16/05/2013. Aceite: 07/08/2013

Sabemos que pela Proposição 15 do livro 1 de *Os Elementos* de Euclides, os ângulos internos dos dois triângulos retângulos formados no diagrama, CAE e CXY, em C apresentam igual valor por serem opostos pelo vértice. Já a Proposição 27, também do livro 1, nos dá suporte para afirmar ainda que os ângulos em Y e em E, ou seja, os ângulos alternos determinados pela transversal EY, juntamente com e e y, também apresentam o mesmo valor, uma vez que os dois últimos segmentos mencionados são paralelos. Como todos os ângulos correspondentes são iguais nos dois triângulos, podemos dizer que os mesmo são semelhantes, conforme reafirmou Leibniz. Vale notar ainda que a proporção entre os lados correspondentes em CAE e CXY se manterá à medida que um triângulo tiver sua área aumentada e o outro tiver a sua diminuída pelo deslocamento do segmento EY, ocorrendo concomitantemente com a não alteração dos ângulos.

Utilizando a tangente dos ângulos alternos anteriormente mencionados, Leibniz descreve a proporcionalidade entre os lados pela relação $\frac{(x-c)}{y} = \frac{c}{e}$. Ele afirma que à medida que o segmento EY seja deslocado, aproximando-se mais e mais do ponto A, sempre preservando os mesmo ângulos, os segmentos e irão diminuir de forma constante, sendo que a razão de c para e permanecerá constante. Conforme afirma Leibniz, tal razão é diferente de 1 e o ângulo ao qual a tangente se refere é, então, diferente de 45°. Isso se faz claro, uma vez que lidamos com triângulos retângulos onde os três lados apresentam diferentes valores, conforme é possível verificar através da Figura 1. Sendo assim, c e e e representam segmentos de comprimentos diferentes, sendo impossível que a razão entre ambos resulte em 1. Se prosseguirmos deslocando o segmento EY até o momento em que o mesmo encontre-se muito próximo do ponto A, levando conjuntamente os pontos C e E a também se aproximarem de A, os segmentos c e e se tornarão infinitamente pequenos e a razão $\frac{(x-c)}{y} = \frac{c}{e}$ poderá ser expressa como $\frac{x}{y} = \frac{c}{e}$, se considerarmos $x - c = x$. Leibniz afirma ainda que, caso pontos C, E e A coincidissem, os segmentos c e e não possuiriam mais um comprimento mensurável, tornando-se zero e a proporção $\frac{x}{y} = \frac{c}{e}$ passaria a ser escrita como $\frac{x}{y} = \frac{0}{0} = 1$. Consequentemente, pensaríamos que $x = y$ e, segundo Leibniz isto seria um absurdo, pois tal resultado só é possível caso o ângulo a partir do qual determinamos a tangente fosse 45°, condição que presumimos inicialmente não ser verdade. A título de ilustração, a questão do $\frac{0}{0}$ é polêmica no que concerne a Filosofia leibniziana. Assim, ao estudarmos os escritos sobre o Cálculo consideramos que Leibniz parecia aceitar que $\frac{0}{0} = 1$, apesar disto ser falso para a matemática atual. A título de esclarecimento, não buscamos outra forma de justificar os infinitesimais que excluíssem a necessidade de considerar $\frac{0}{0} = 1$ porque o objetivo deste artigo, nesta questão particular, é avaliar a visão de Leibniz sobre os infinitesimais, tal qual ele a concebeu.

Afinal, o que Leibniz apresentou foi nada mais que uma “redução ao absurdo”, tal qual as fazia Arquimedes; e, o reconhecimento deste absurdo leva a

REnCiMa, v.4, n.2, p. 1-15 , 2013
Submissão: 16/05/2013. Aceite: 07/08/2013

concluir que e não podem ser tomados como zero nos cálculos realizados, exceto quando comparados com e y que apresentam magnitudes muito superiores a estes. No entanto, a relação existente entre ambos não pode ser desconsiderada. Dessa forma, Leibniz os concebe como infinitesimais, exatamente como os elementos presentes no Cálculo Diferencial. Leibniz acredita que até mesmo em Cálculos Algébricos, encontramos traços do infinitesimal. A Álgebra, então, não pode evitá-los se pretende manter sua universalidade. Esta universalidade implica em abarcar todos os casos nos quais ela é utilizada. Ainda segundo Leibniz, seria absurdo não aceitar a indiscutível universalidade da Álgebra e, assim, privar-nos de um dos seus maiores usos. Por tudo isso, em 1703, após sua correspondência com Varignon, Leibniz escreve uma nota initulada “Justificativa da Álgebra comum pelo Cálculo infinitesimal”, encerrando sua digressão sobre o infinitesimal, a diferencial e as regras de derivação. Nesta, o filósofo afirma que não existiriam razões para lamentar as dores que fossem necessárias para justificar toda a análise referente ao seu Cálculo Infinitesimal, para todos os tipos de mentes capazes de compreendê-la. (LEIBNIZ, GM IV, 1971, p.106). Mesmo que os céticos tenham lutado contra os princípios de Geometria e outros tenham tentado colocar por terra os melhores fundamentos da Álgebra, tais campos do conhecimento sobreviveram e era o que Leibniz esperava que ocorresse também com o infinitesimal, pois, afinal, para a ciência, o mundo é muito mais do que os olhos podem ver.

A Diferencial de Leibniz

Assim, com o raciocínio anteriormente apresentado, Leibniz apresenta sua diferencial, dv. A introdução deste conceito se dá através do entendimento intuitivo do que seria uma reta tangente à uma curva passando por um ponto. Vale lembrar que atualmente usamos o conceito de limite para explicar a operação de derivação. Existe uma diferença entre o Cálculo definido por Leibniz e o Cálculo estudado nas universidades, que se baseia principalmente no estudo do limite (THOMAS, 2009, p.85-95), que usa a ideia do infinitesimal para dar introdução à derivada, no ensino atual. O limite de uma função $f(x)$ definido em um intervalo ao redor de x_0 é dado por L, conforme x se aproxima de x_0 e escreve-se $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ se para cada número $\varepsilon > 0$ existir um número correspondente $\delta > 0$, tal que, para todos os valores de x, $0 < |x - x_0| < \delta \to |f(x) - L| < \varepsilon$. Por exemplo: tomemos a função $f(x) = \begin{cases} 2x + 1, se\ x \neq 1 \\ 1, se\ x = 1 \end{cases}$. Quando x aproxima de 1, a função $f(x)$ aproxima de três. Logo o limite dessa função, quando x tende a 1, será 3. Dessa definição de limite determinamos a derivada a partir da inclinação da reta tangente em um ponto. Para tanto, observamos primeiro uma reta secante a uma curva. A inclinação da reta secante a uma curva é dada a partir do coeficiente angular m da reta, determinada pela tangente do ângulo de inclinação, nesse caso: $m = \frac{f(x_0 - h) - f(x_0)}{h}$. A derivada da função é dada pela inclinação da reta tangente. Logo a reta teria que tocar em um único ponto da curva, o que podemos obter pensando em um h cada vez mais próximo de zero. Logo: $f'(x) = \lim_{h \to 0} \left(\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}\right)$. Porém, o conceito de limite consolidou-se

REnCiMa, v.4, n.2, p. 1-15 , 2013
Submissão: 16/05/2013. Aceite: 07/08/2013

posteriormente à ideia de Leibniz, no século XIX. Nesse sentido, este trabalho vem ao encontro do resgate do pensamento matemático original de Leibniz.

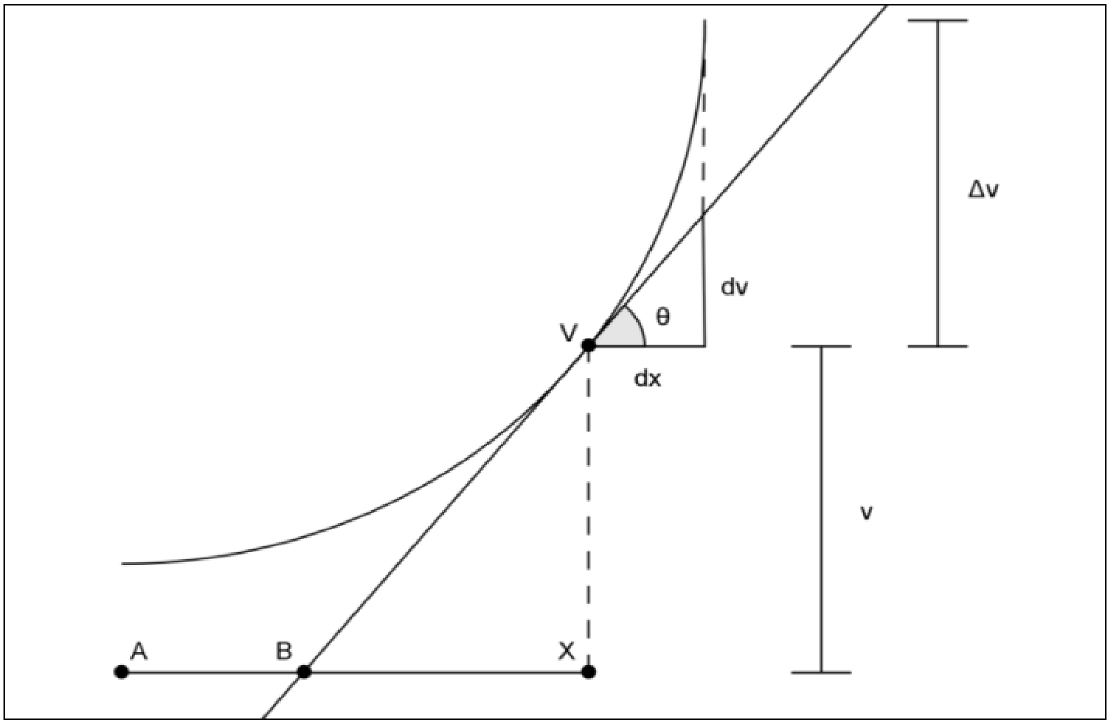

Figura 2 - Diferencial de Leibniz

Leibniz define sua diferencial da seguinte forma: consideremos, como na Figura 2, o eixo AX e a curva passando pelo ponto V. Consideremos ainda uma reta tangente à curva passando por V, interceptando o eixo AX no ponto B. De acordo com a Figura 2, a distância do ponto X ao ponto V é denominada v. Dado um segmento arbitrário de comprimento dx, a diferencial dv é definida usando a relação de semelhança entre triângulos retângulos. O menor de lados *dv* e dx e o maior de lados v e BX, através da fórmula.

$$\frac{dv}{dx} = \frac{v}{BX}$$

É possível observar que definindo dessa forma, enxergamos dv/dx como uma fração cujo valor é uma constante para qualquer dx diferente de 0. Essa fração não faz sentido quando $dx = 0$, pois teríamos uma divisão $0/0$. Com essa definição em mente, podemos fazer algumas observações, em vista da forma atual que a derivada é considerada:

1) A razão dv/dx é o coeficiente angular da reta tangente no ponto V, isto é, $tg(\theta)$.
2) O valor dx representa um segmento variável e dv é uma função linear de dx.
3) Quanto menor dx, mais próximo estará o segmento ΔV do segmento dv; e, mais próximo o valor $\Delta V/dx$ estará de dv/dx.

REnCiMa, v.4, n.2, p. 1-15 , 2013
Submissão: 16/05/2013. Aceite: 07/08/2013

Na verdade, essas observações só fazem sentido em termos atuais, caso exigirmos que a curva seja passível de ser diferenciada ou de sofrer diferenciação em V.

Regras de Derivação de Leibniz

Tendo em vista o que já foi discutido, é possível que Leibniz tenha elocubrado, durante a elaboração da sua ideia, dada uma curva arbitrária, como calcular o valor de dv/dx, Observamos que esse problema é facilmente resolvido se soubermos onde a reta tangente corta o eixo AX, isto é, se soubermos qual é o valor de BX. Contudo, só conheceremos o valor de BX se conhecermos a disposição da reta tangente. Afinal, é esta disposição que queremos descobrir. Assim sendo, para descobrir dv/dx e consequentemente somente dv, é preciso aproximar a diferencial dv, dependente de *dx*, de ΔV, um valor que também depende de dx. Outrossim, conhecendo-se qual a curva V, conforme Figura 2, é possível calcular ΔV. Formalmente, ΔV pode ser definido como a variação vertical que a curva sofre ao se variar horizontalmente no valor dx, a partir do ponto V.

A ideia básica para encontrarmos as diferenciais é então, como na verdade é feito hoje em dia, utilizar aproximações de retas secantes à curva. A questão que se coloca é como através dessa ideia, Leibniz formulou as diferenciais e, como ele chegou às regras de diferenciação, entre elas, as regras das operações aritméticas gerais, a regra da cadeia e as fórmulas de diferenciação de algumas funções específicas, como as funções polinomiais. Essas regras são descritasmas não demonstradas no “Novo método para máximos e mínimos, e também para tangentes, válido para quantidades irracionais”. Entretanto, baseando-se no texto “Justificativa do Cálculo Infinitesimal através da Álgebra Comum”, no qual Leibniz defende a ideia de infinitesimal com muita propriedade, usando argumentos bem refinados, pensamos que ele de fato demonstrou todas essas expressões.

Leibniz, de forma consistente com o modo que a diferencial foi formulada, poderia ter feito isso de modo semelhante ao que será exposto usando os argumentos que seguem.

Tendo em mente a Figura 2 e, chamando o erro na aproximação de ΔV em relação a dv de *e*, isto é, $dv = \Delta V - e$ temos:

$$\frac{dv}{dx} = \frac{\Delta V - e}{dx} = \frac{\Delta V}{dx} - \frac{e}{dx}$$

Escrevendo de outra forma:

$$\frac{\Delta V}{dx} = \frac{dv}{dx} + \frac{e}{dx}$$

Estabelecer que $\Delta v/dx$ se aproxime do número dv/dx quando dx se aproxima de 0, equivale a exigir que e/dx se aproxime de 0. Isso corresponde a nossa noção atual de diferenciabilidade. Com esta idéia, podemos inferir que

Submissão: 16/05/2013. Aceite: 07/08/2013

Leibniz poderia ter chegado à diferencial de uma curva e as regras da soma e do produto do seguinte modo:

a) Caso a seja uma constante, então $\Delta a/dx = 0$ para qualquer $dx \neq 0$ e, consequentemente, o mesmo ocorrerá para $dx \neq 0$, $e = 0$ e $e/dx = 0$. Logo, $da/dx = 0$ e, portanto:

$$da = 0$$

b) Para a regra da diferencial da soma, considere as curvas diferenciáveis v e w, a variação vertical em função de dx $\Delta(v+w)$, as respectivas diferenciais, dv, dw e os respectivos erros e e f. Ao se variar horizontalmente dx, a variação vertical $\Delta(v+w)$ é dada pela fórmula $\Delta(v+w) = (v+\Delta v+w+\Delta w)-(v+w)$. Assim, para todo $dx \neq 0$ temos:

$$\frac{\Delta(v + w)}{dx} = \frac{\Delta v+\Delta w}{dx} = \frac{dv+e+dw+f}{dx} = \left(\frac{dv}{dx}+\frac{dw}{dx}\right)+(\frac{e}{dx}+\frac{f}{dx})$$

A expressão $\left(\frac{dv}{dx}+\frac{dw}{dx}\right)=\left(\frac{dv-dw}{dx}\right)$ é uma constante e a expressão $\frac{e}{dx}+\frac{f}{dx}=\frac{e+f}{dx}$ se aproxima de 0 quando dx se aproxima de 0, portanto:

$$d(v+w) = dv+dw$$

c) Para a regra da diferencial do produto, ao se variar horizontalmente dx, variação vertical $\Delta(vw)$ é dada pela fórmula $\Delta(vw) = (v+\Delta v)(w+\Delta w)-(vw)$. Assim, para todo $dx \neq 0$ temos:

$$\frac{\Delta(vw)}{dx} = \frac{v\Delta w+w\Delta v+\Delta v\Delta w}{dx} = \frac{v(dw+f)+w(dv+e)+(dv+e)(dw+f)}{dx} =$$
$$= \left(v\frac{dw}{dx}+w\frac{dv}{dx}\right)+\left(\frac{e}{dx}w+\frac{f}{dx}v+e\frac{dw}{dx}+f\frac{dv}{dx}+dv\frac{dw}{dx}+\frac{e}{dx}f\right)$$

A expressão $\frac{dw}{dx}+w\frac{dv}{dx}=\frac{vdw+wdv}{dx}$ é uma constante. Todavia, analisando a expressão $\left(\frac{e}{dx}w+\frac{f}{dx}v+e\frac{dw}{dx}+f\frac{dv}{dx}+dv\frac{dw}{dx}+\frac{e}{dx}f\right)$, cada termo se aproxima de 0 quando dx se aproxima de 0, logo:

$$d(vw) = vdw+wdv$$

Algumas regras são definidas usando as três anteriormente demonstradas. Consideremos, por exemplo, a curva v e a constante k. Combinando a primeira e terceira regras, obtemos:

$$d(kv) = kdv$$

a) Para achar $d(1/v)$, em função de dv podemos agora usar as regras anteriormente numeradas. Tomemos $w = 1/v$, isto é, $w.v = 1$. Como $d(v.w) = d(1) = 0$, temos $vdw+wdv = 0$, logo $dw = -(w/v)dv$ e, portanto:

$$d\left(\frac{1}{v}\right) = -\frac{dv}{v^2}$$

REnCiMa, v.4, n.2, p. 1-15 , 2013
Submissão: 16/05/2013. Aceite: 07/08/2013

b) Da mesma forma, a regra do quociente que escreve $d(v/w)$ em função de dv e dw pode ser deduzida considerando $(v/w) = v(1/w)$. Usando a regra do produto, obteremos:

$$d\left(\frac{v}{w}\right) = \frac{wdv - vdw}{w^2}$$

c) Para a regra da cadeia, considere a curva v passível de ser diferenciada ou de sofrer diferenciação no ponto X, assim como descrito na Figura 2 e, uma curva w passível de ser diferenciada ou de sofrer diferenciação no ponto v. Do modo que foi formulado a diferencial, podemos facilmente demonstrar que a regra da cadeia funciona só como uma simplificação de frações e, para qualquer $dx = 0$, podemos encontrar:

$$\frac{dw}{dx} = \frac{dw.dv}{dv.dx}$$

d) Usando a mesma ideia de aproximações, podemos imaginar como Leibniz chegou às diferenciais de funções específicas como os polinômios. $w = x^n$. Neste caso, Δw assume a expressão $\Delta w = (x + dx)^n - x^n$. O argumento no qual construímos nossa hipótese remonta ao fato que Leibniz tinha conhecimentos de análise combinatória suficientes para conseguir expandir a expressão acima. Então:

$$\Delta w = C_{n,1}x^{n-1}dx^1 + C_{n,2}x^{n-2}dx^2 + \cdots + C_{n,n}dx^n$$

Onde $C_{n,p}$ é o número de combinações possíveis de termos em grupos de *p*. De acordo com o que foi pesquisado no texto intitulado “Dissertação sobre a arte da combinação”, de 1666, estas combinações seriam as ““complecções”” de “expoente” *p*. Como já comentamos anteriormente, Leibniz conhecia uma forma geral de se calcular $C_{n,2}$ e, uma fórmula recursiva para se calcular uma “complecção” geral $C_{n,p}$. Sendo assim, faz-se então:

$$\frac{\Delta w}{dx} = C_{n,1}x^{n-1} + C_{n,2}x^{n-2}dx^1 + \cdots + C_{n,n}dx^{n-1}$$

O primeiro termo é uma constante e os outros se aproximam de 0 quando *dx* se aproxima de 0. Se consideramos que *Cn,1 = n*, temos:

$$dw = nx^{n-1}\,dx$$

Considerações Finais

Retomando nossos objetivos iniciais, isto é, entender melhor como Leibniz lidava com o conceito de infinitesimal e como este conceito se apresenta em sua definição de diferencial, argumentamos que podemos ter chegado a algumas conclusões interessantes. Sobre o infinitesimal, ao contrário do que os livros de Cálculo modernos definem (PISKUNOV, 1969, p.42-43), observamos que Leibniz fez questão de dar a ele um valor quantitativo indefinido. Essa definição que oscila entre o qualitativo e o quantitativo, apesar de se aproximar de zero, não era zero. Daí, para conhecer melhor o papel do infenitesimal na operação de diferenciação foi somente uma questão metodológica, na qual os passos foram demonstrados principalmente ao longo do tópico anterior.

De fato, ao analisarmos alguns trabalhos de Leibniz, como aquele no qual ele argumenta sobre as “complecções” e, também analisando suas ideias apuradas e acuradas sobre o infinitesimal, que podem ser contempladas na carta resposta à Varignon quando questionado sobre o referido assunto, pensamos que Leibniz, de forma coerente com sua definição de diferencial, possa ter usado de argumentos mais rigorosos para demonstrar as regras de derivação, seguindo uma linha similar ao que foi apresentado neste artigo. Como, em linhas gerais, a razão pela qual o filósofo não divulgou o raciocínio que o levou ao estabelecimento das regras de derivação permanece como objeto de especulação entre historiadores e filósofos da matemática. Pensamos ser apropriado inferir as seguintes hipóteses, a saber:

a) Leibniz não divulgou seus resultados com medo de roubos intelectuais.
b) Leibniz achou as deduções muito óbvias.
c) Leibniz quis promover a nova geometria analítica, proposta por Descartes.

Em suma, historicamente falando, foi somente no início do século XVII, com Descartes, que conseguimos transformar problemas geométricos em problemas algébricos. Nessa nova perspectiva da álgebra, o estudo analítico de funções que existiam desde o tempo dos babilônicos e pitagóricos tornou-se rotineiro. (KATZ, 2010, p.59-61). A seu turno, Leibniz, ao mesmo tempo que algebrizou o infinitamente pequeno, introduziu os conceitos de variável, constante e parâmetro, bem como a notação $\frac{dv}{dx}$, possibilitando ainda mais o entendimento e desenvolvimento de inúmeras funções.

Referências

CARVALHO, Tadeu Fernandes de e D’OTTAVIANO, Itala Loffredo. **Sobre Leibniz, Newton e infinitésimos, das origens do cálculo infinitesimal aos fundamentos do cálculo diferencial paraconsistente.** Educação. Matemática. Pesquisa. São Paulo, v. 8, n. 1, p.13-43, 2006.

KATZ, V. J. **História da Matemática**. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 2010.

LEIBNIZ, Gottfried Wilhelm. 1666. **Dissertatio de Arte Combinatoria**. Em: G. W. Leibniz Die Philosophischen Schriften (GP IV). Hildesheim: Georg Olms Verlag, 1978.

______. 1684. **Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, qua nec irrationales quantitates moratur.** Em: GERHARDT, C. I. (org.) G. W. Leibniz Die Mathematische Schriften (GM V). Hildesheim: Georg Olms Verlag, 1971.

REnCiMa, v.4, n.2, p. 1-15 , 2013
Submissão: 16/05/2013. Aceite: 07/08/2013

______. 1684. **De dimensionibus figurarum inveniendis.** Em: GERHARDT, C. I. (org.) G. W. Leibniz Die Mathematische Schriften (GM V). Hildesheim: Georg Olms Verlag, 1971.

______. 1692. **Leibniz an Foucher.** Em: G. W. Leibniz Die Philosophischen Schriften (GP I). Hildesheim: Georg Olms Verlag, 1978.

______ .1702. **Leibniz an Varignon**. Em: GERHARDT, C. I. (org.) G. W. Leibniz Die Mathematische Schriften (GM IV). Hildesheim: Georg Olms Verlag, 1971.

______. 1703. **Novos Ensaios sobre o Entendimento Humano**. Volumes I e II. Em: Os Pensadores. São Paulo: Nova Cultural, 1988.

______. 1703. **Justification du Calcul des infinitesimales para celuy de l'Algebre ordinaire**. Em: GERHARDT, C. I. (org.) G. W. Leibniz Die Mathematische Schriften (GM IV). Hildesheim: Georg Olms Verlag, 1971.

______. 1705 **Histoire Critique de la Republique des Lettres tant Ancienne que Moderne**. Em: GERHARDT, C. I. (org.) G. W. Leibniz Die Philosophischen Schriften (GP VI). Hildesheim: Georg Olms Verlag, 1978.

PISKUNOV, N. **Differential and Integral Calculus**. Moscou: Mir Publishers, 1969.

THOMAS, G.B. **Cálculo:** Volume 1. São Paulo: Pearson, 2009.

REnCiMa, v.4, n.2, p. 1-15 , 2013
Submissão: 16/05/2013. Aceite: 07/08/2013