A LINGUAGEM EM ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA: CARACTERIZAÇÕES NOS "TRÊS MUNDOS DA MATEMÁTICA"

LANGUAGE IN MATHEMATICAL MODELING ACTIVITIES: CHARACTERIZATIONS ON THE "THREE WORLDS OF MATHEMATICS"

Bárbara Nivalda Palharini Alvim Sousa Robim

Universidade Estadual do Norte do Paraná, barbara.palharini@uenp.edu.br

Emerson Tortola

Universidade Tecnológica Federal do Paraná, emersontortola@utfpr.edu.br

Lourdes Maria Werle de Almeida

Universidade Estadual de Londrina, lourdes@uel.br

Resumo

Neste artigo argumentamos sobre as diferenciações da linguagem em atividades de modelagem matemática e como essas diferenciações conduzem a caracterizações nos Três Mundos da Matemática da teoria de David Tall. As análises apresentadas estão associadas a uma pesquisa qualitativa e os dados foram coletados com alunos do Ensino Superior, no contexto de uma disciplina de introdução à modelagem matemática. A análise dos dados sugere que o conjunto de ações envolvidas em uma atividade de modelagem matemática conduz os alunos ao uso de linguagens associadas aos Três Mundos da Matemática, delineados por David Tall, e, por meio dessas linguagens, é possível vislumbrar o trânsito dos alunos pelos Mundos da Matemática.

Palavras-chave: Modelagem matemática; Três mundos da matemática; Linguagem.

Abstract

In this paper we argue about the differences of language in mathematical modeling activities and how these differences lead to characterizations in the Three Worlds of Mathematics regarding David Tall's theory. Analyzes presented are related with a qualitative approach and data were collected with students of higher education, in the context of a mathematical modeling course. Data analysis suggests that the set of actions involved in an activity of mathematical modeling leads students to the use of languages associated to the Three Worlds of Mathematics, designed by David Tall, and, through these languages, we can glimpse the transit of students by Worlds of Mathematics.

Keywords: Mathematical modelling; Three worlds of mathematics; Language.

Introdução

A linguagem é constituída a partir de um processo histórico e cultural, como resultado de relações sociais, e emerge da necessidade do ser humano de se comunicar. Nesse processo diferentes tipos de linguagem são constituídos, caracterizando-se como linguagem escrita, oral, gestual, simbólica e gráfica, entre outras.

Em termos específicos da matemática a linguagem tem um papel importante como recurso de representação e de acesso aos objetos matemáticos. A diversidade de usos da linguagem e das representações em matemática, no âmbito das aulas de matemática, tem instigado professores e pesquisadores a investigar esse uso e sua relação com o desenvolvimento dos alunos.

Segundo Garnica (2001) é preciso considerar a curiosa e contraditória especificidade da linguagem matemática que, preponderamente escrita e se pretendendo formal, necessita do apoio da linguagem natural, às vezes até oral, para a comunicação das ideias.

Neste texto, ainda que nossa concepção de linguagem incorpore diferentes formas de manifestação e comunicação, restringimo-nos à linguagem matemática no âmbito da sala de aula de um curso de licenciatura em matemática.

No que se refere às relações entre a linguagem, seus usos e o desenvolvimento cognitivo dos estudantes, conduzimos nossas argumentações pautadas na perspectiva teórica defendida por David Tall em que o autor caracteriza 'Três Mundos da Matemática' – Conceitual Corporificado, Simbólico Proceitual e Axiomático Formal – e pondera que um dos aspectos que caracteriza esses mundos é a linguagem, viabilizando o acesso aos objetos matemáticos mediados pelo uso de suas representações.

Nesse sentido é pertinente olhar para a linguagem empregada pelo sujeito ao lidar com os objetos matemáticos, uma vez que a linguagem matemática, de acordo com Tall (2004a), vai adquirindo características específicas na medida em que os indivíduos transitam por esses diferentes mundos.

No entanto, se por um lado o desenvolvimento cognitivo dos alunos, no que se refere à matemática, pode ser associado aos usos que eles fazem da linguagem, por outro lado é preciso considerar que as atividades matemáticas com que se deparam precisam viabilizar ou requerer uma diversidade de usos da linguagem.

Considerando essa possiblidade de usos da linguagem é que tratamos de atividades de modelagem matemática na sala de aula. Destacamos que vários relatos de pesquisas e de experiências em diferentes níveis de escolaridade têm se referido a uma pluralidade no que se refere às representações e à linguagem (ALMEIDA *et al.*, 2012; MIGUEL *et al.,* 2012; GOTTSCHALK, 2004; GARCIA, 2007; AMADO *et al.,* 2010, HÖFER; BECKMANN, 2009; MORGAN, 2002).

Neste texto apresentamos resultados de uma pesquisa em que identificamos características da linguagem que revelam indícios do Mundo da Matemática pelo qual o sujeito transita de modo a contribuir para a compreensão de como acontecem os usos da linguagem no âmbito de atividades de modelagem matemática. Nossas argumentações são subsidiadas pela análise de uma atividade de modelagem matemática, considerando que, segundo Almeida e Palharini (2012), atividades dessa natureza estimulam o transitar entre os Três Mundos da Matemática.

Sobre modelagem matemática

O histórico da modelagem matemática na Educação Matemática, segundo um estado da arte organizado por Werner Blum em 2002, diz respeito a estudos e pesquisas realizados na área durante três décadas. O autor pondera que, em termos gerais, em uma atividade de modelagem matemática é importante considerar problemas da realidade como ponto de partida, configurando a atividade como algo em que:

> O ponto de partida é, normalmente, uma situação no mundo real. A simplificação, estruturação e esclarecimento da situação – de acordo com o conhecimento e os interesses do modelador – conduzem à formulação de um *problema* e de um *modelo real* da situação. [...]. Caso seja necessário, dados reais são coletados a fim de fornecer mais informações sobre a situação à sua disposição. Se possível e adequado, o modelo real – ainda uma parte do mundo real, para nós – é *matematizado*, isto é, os objetos, dados, relações e as condições envolvidas nele são traduzidos matematicamente, resultando em um modelo matemático da situação original. Agora métodos matemáticos entram em jogo, e são usados para obter *resultados matemáticos*. Estes têm de ser reinterpretados no mundo real, ou seja, *interpretados* em relação à situação original. Ao mesmo tempo, o modelador *valida* o modelo por meio da verificação da solução obtida do problema, o que é feito interpretando se os resultados matemáticos são adequados e razoáveis para seus propósitos. Se for necessário (e é, frequentemente, no caso de processos de resolução de problemas "realmente reais"), todo o processo tem de ser repetido por meio de uma modificação ou da obtenção de um modelo totalmente diferente. No fim, a solução obtida da situação-problema inicial é apresentada e comunicada (BLUM, 2002, p. 152-153).

Bassanezi (2002) argumenta que a análise de uma situação real com o propósito de substituir a visão, por vezes simplista, desta realidade por uma postura crítica e mais abrangente, requer o uso de uma linguagem adequada que facilite e racionalize o pensamento. A linguagem, neste sentido, refere-se a um sistema organizado de geração, organização, interpretação e comunicação da informação por meio de símbolos.

Segundo D'Ambrósio (1996) o uso da linguagem, neste contexto, conduz a elaborações sobre representações da realidade que constituem o que o autor denomina de 'modelos'.

No caso particular da matemática, os modelos associados aos fenômenos (de modo geral não matemáticos) são denominados modelos matemáticos. Segundo Lesh *et al.* (2006) um modelo matemático é um sistema conceitual, descritivo ou explicativo, expresso por meio de uma linguagem ou uma estrutura matemática com a finalidade de descrever o comportamento de outro sistema e permitir a realização de previsões sobre ele. Neste contexto a modelagem matemática está associada à construção e interpretação de modelos matemáticos.

No âmbito da sala de aula, atividades alinhadas com essa configuração são alternativas pedagógicas que contribuem para o ensino e para a aprendizagem de matemática. Nesta perspectiva a modelagem é compreendida

> [...] como um caminho para o processo de ensino e aprendizagem da Matemática ou para o "fazer" Matemática em sala de aula, referindo-se à observação da realidade (do aluno ou do mundo) e, partindo de questionamentos, discussões e investigações, defronta-se com um problema que modifica ações na sala de aula, além da forma como se observa o mundo (MEYER; CALDEIRA; MALHEIROS, 2011, p. 79).

Inglis, Mejia-Ramos e Simpson (2007) abordam a modelagem matemática como importante veículo para o desenvolvimento da argumentação. Nesse contexto parece ser tema recorrente na literatura a importância dos argumentos matemáticos produzidos pelos alunos, considerando que a maneira como eles se expressam em matemática pode denotar sua compreensão, ou não, dos conteúdos matemáticos. A argumentação matemática envolve as diferentes formas de representação e linguagem utilizadas no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática.

Nesse sentido os trabalhos de Palharini (2010) e Almeida e Palharini (2012) defendem que a teoria dos Três Mundos da Matemática viabiliza fazer inferências sobre a compreensão dos alunos em relação aos conteúdos matemáticos, considerando essencialmente o trânsito deles por esses mundos. Neste trabalho, em particular, temos o objetivo de investigar a linguagem usada pelos alunos durante as atividades de modelagem matemática, nas quais ações específicas, mediadas pela linguagem utilizada no trânsito dos alunos pelos Três Mundos da Matemática, podem ser identificadas.

Os Três Mundos da Matemática

O desenvolvimento matemático dos sujeitos é investigado e/ou caracterizado por meio de tricotomias em diferentes momentos e por diferentes autores. Pelo menos três destes estudos são referenciados nos trabalhos de David Tall:

- A teoria da reificação de Anna Sfard, que estuda duas formas de conhecimento matemático que permitem a formação de conceitos: uma concepção operacional, em que noções matemáticas são concebidas ou identificadas como um produto de certos processos, e uma concepção estrutural, em que noções matemáticas são tratadas como se referindo a entidades como objetos reais. Durante o desenvolvimento dos conceitos os alunos passam por três estágios de estruturação, ou seja,

> [...] três passos podem ser distinguidos no processo da formação de conceitos. Estes três estágios correspondem aos três "graus de estruturação" os quais podem ser denominados de fundamentos da analise

> teórica pura da relação entre processos e objetos. À luz desta mesma análise nosso modelo de aprendizagem pode ser refinado por meio de linhas similares: se a conjectura sobre as origens operacionais dos objetos matemáticos é verdadeira, então primeiramente deve haver um processo aperfeiçoado sobre objetos familiares e, então poderia existir a ideia de tornar este processo uma entidade autônoma e, finalmente a habilidade de ver esta nova entidade como algo integrado como todo objeto deve ser contemplado. Nós chamamos estes três estágios no desenvolvimento do conceito de *interiorização, condensação e reificação*, respectivamente (SFARD, 1991, p. 18).

- O estudo das abstrações empíricas, pseudo-empíricas e reflexivas de Piaget, baseadas na percepção, ação e reflexão sobre os objetos.
- Os modos de representação mental, sensório-motor, icônico e simbólico colocados por Brunner (1966, apud Pinto, 2006) e considerados por David Tall como sequenciais no crescimento cognitivo do sujeito. Pinto (2006) coloca que Brunner, ao tratar desses modos, refere-se ao esforço de um individuo para traduzir a experiência de um modelo de mundo. Brunner parte da hipótese educacional de que qualquer problema pode ser apresentado de forma simples de modo que a pessoa possa entendê-lo de forma reconhecível. A fim de representar esta experiência, Brunner coloca três modos de obter essa forma simples de reconhecimento: por meio da ação, seguida pelo uso de imagens holísticas e, por fim, em palavras ou na linguagem. Tais modos correspondem aos ‘modos de representação mental’ de Brunner: sensoriais, icônicos e simbólicos.

A perspectiva teórica de David Tall tratando de “Três Mundos da Matemática” surge do estudo destas teorias que tratam do desenvolvimento cognitivo e da necessidade de explicar como se dá o aprendizado em matemática.

Referindo-se às experiências matemáticas, Tall (2004b) associa os Três Mundos da Matemática com três formas de desenvolvimento cognitivo em relação à matemática que estão dispostos em Três Mundos da Matemática, ao mesmo tempo distintos e relacionados entre si: o Mundo Conceitual Corporificado, o Mundo Simbólico Proceitual e o Mundo Axiomático Formal.

Os Três Mundos da Matemática referem-se a três modos diferentes de operar com os objetos matemáticos, no sentido de representar e lidar com os mesmos (TALL, 2004a). Esses mundos são descritos pelo autor como maneiras distintas e interligadas de desenvolvimento matemático que, por sua vez, estão associadas a procedimentos, ações e à linguagem dos sujeitos para com os objetos matemáticos.

O Mundo Conceitual Corporificado, como afirma Tall (2004a, p. 2), “diz respeito às percepções acerca do mundo e o pensamento a respeito das coisas que são percebidas e sentidas não apenas no mundo físico, mas em um mundo mental de significados”. Esse mundo está baseado na ação e na percepção e envolve os objetos corporificados, tais como, gráficos e diagramas, que podem ser fisicamente manipulados e, posteriormente, concebidos como objetos mentais. A linguagem no Mundo Conceitual Corporificado está associada à percepção, observação e descrição.

O Mundo Simbólico Proceitual como afirma Tall (2004a) está associado aos símbolos, às ações que nos levam a simbolizar e representar por meio de gestos e da escrita, a contagem (representação numérica), aos cálculos, à manipulação dos símbolos para resolução de cálculos, manipulações algébricas, entre outros,

> [...] é o mundo dos símbolos que são usados para cálculos e manipulações na aritmética, na álgebra e no cálculo, por exemplo. As atividades neste mundo se iniciam com ações (como apontar e contar) e são incorporadas como conceitos por meio do uso de símbolos [...] (TALL, 2004a, p. 3).

Nesse mundo, o perceber e o observar do Mundo Conceitual Corporificado ficam subjacentes e tomam lugar a ação, os procedimentos e processos que podem ser realizados pelos sujeitos para lidar com as representações simbólicas. A linguagem matemática parece se refinar, passando o sujeito a se familiarizar com os símbolos e usá-los para a representação dos objetos matemáticos, bem como de operações e articulações a eles associados.

O Mundo Axiomático Formal, como afirma Tall (2004a, p. 3), por sua vez, "é baseado em propriedades, expressas em termos de definições formais que são usadas como axiomas para especificar as estruturas matemáticas (por exemplo, 'grupo', 'campo', 'espaço vetorial' e 'espaço topológico' e assim por diante)" que constituem o sistema axiomático da matemática. Em termos gerais, é nesse mundo que ganha espaço a definição de objetos já conhecidos, a construção de demonstrações matemáticas, a lógica e a coerência relacionada à linguagem.

Assim, os usos da linguagem se modificam na medida em que os sujeitos se desenvolvem e, por meio da linguagem utilizada pelos sujeitos, das representações que utilizam para expressar seus pensamentos, suas ideias, seu modo de ver o mundo, podemos, segundo Tall (2004a), ter indícios de seu desenvolvimento em matemática. Na Figura 1 apresentamos características da linguagem nos diferentes Mundos da Matemática.

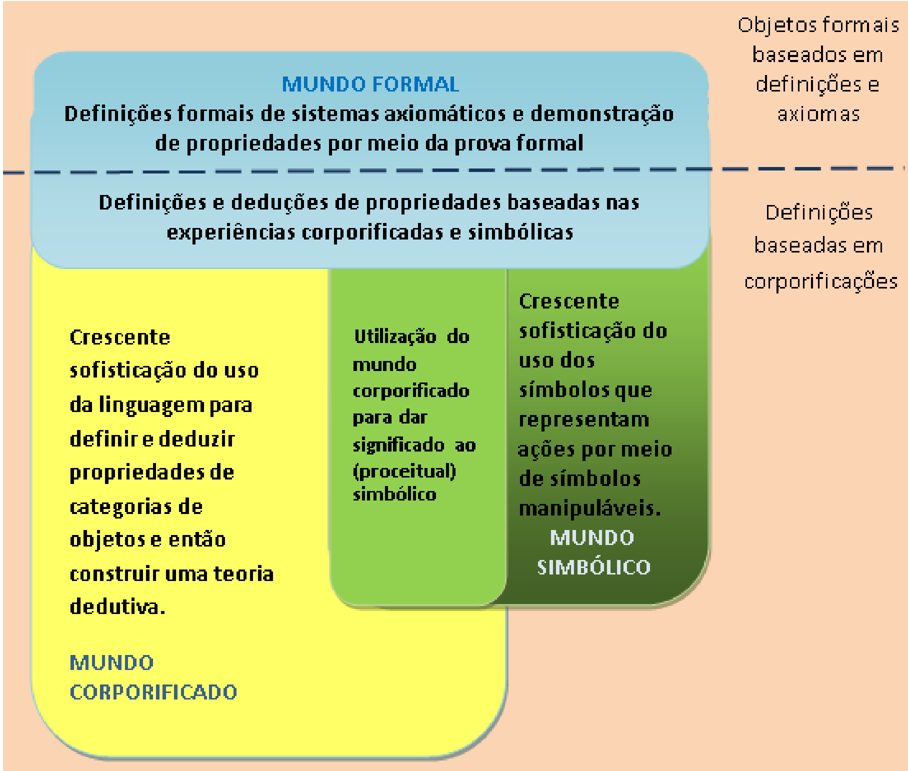


Figura 1 – A linguagem nos Três Mundos da Matemática
Fonte: Adaptado de Tall (2008).

Podemos considerar que em cada Mundo da Matemática há diferentes maneiras de lidar com os objetos matemáticos, e, nesse sentido, a linguagem exerce um importante papel, pois é por meio dela que os sujeitos representam seus conhecimentos e os compartilham com os outros.

Segundo Tall (2004a), cada sujeito estabelece uma jornada durante o seu desenvolvimento matemático, traçando seu próprio caminho pelos Mundos da Matemática. A jornada por entre os Mundos não é, necessariamente, linear, mas, ao contrário, cada sujeito, no decorrer de sua vida, transita pelos Mundos da Matemática. Segundo Palharini (2010), os Mundos da Matemática podem servir de *óculos* para observar o desenvolvimento cognitivo dos sujeitos e o transitar entre um mundo e outro pode representar a flexibilidade do sujeito com a matemática, evidenciando suas fragilidades e potencialidades com relação aos usos da linguagem.

A linguagem e as representações em matemática

Segundo Santos (2009, p. 117), "a linguagem pode ser entendida como uma criação social que utiliza símbolos, também criados socialmente". Neste contexto, a linguagem é o resultado de um processo histórico, cultural e social, que vislumbra a possibilidade de comunicar pensamentos e promover conhecimento.

Gómez-Granell (1997, 1998), refere-se à linguagem matemática como um sistema simbólico de caráter formal que objetiva representar o objeto matemático de modo a possibilitar ao sujeito o acesso a este objeto bem como a sua manipulação.

Uma linguagem formal, segundo Santos (2009, p. 123), caracteriza-se por "expressar, de maneira mais geral e abstrata possível, o essencial das relações e transformações matemáticas. Isso lhe confere alto grau de generalização, convertendo-a simultaneamente num poderoso instrumento de inferência". Além disso, o autor acrescenta que a linguagem matemática "é precisa e não redundante, rigorosa, formal, teórica, impessoal e atemporal, não se identificando referências a contextos particulares".

Nesse sentido, Corrêa (2009, p. 49) refere-se à própria matemática como

> uma linguagem universal, que cria não só os seus próprios signos (ou símbolos), mas também uma gramática que rege 'a ordem concebível' no interior de um sistema coerente, em que conhecimento e linguagem possuem o mesmo princípio de funcionamento na representação.

Assim, o conhecimento é do sujeito que conhece e a linguagem é utilizada pelo sujeito para expressar aquilo que ele conhece (ou mesmo o que ainda não conhece), o que ele faz por meio de representações.

De acordo com Corrêa (2009) a linguagem, no que diz respeito à compreensão e ao uso de símbolos pelo sujeito, apresenta diversos níveis de elaboração. Como exemplo, a autora nos leva a pensar nos usos que fazem da linguagem matemática os matemáticos profissionais e os estudantes da Educação Básica; o tratamento matemático dado a uma determinada situação é diferente nos dois casos, e a linguagem matemática empregada também o é – dizer isso significa levar em conta o formalismo, os símbolos, as representações, o conhecimento matemático e, até mesmo, o olhar que é lançado sobre aquilo que está sendo representado.

Tal ideia nos remete aos Três Mundos da Matemática esquematizados por David Tall, em que a linguagem é um dos aspectos que os diferenciam, assumindo características específicas em cada um deles, sendo diferente o modo de representar e o lidar com o objeto matemático.

Em consonância com essa ideia, Santos (2009, p. 123) afirma que:

> [...] o fato de que uma ideia matemática pode admitir diferentes formas de expressão e uma expressão pode representar diferentes ideias e contextos matemáticos implica desafios interessantes a serem enfrentados pelo professor, pois se trata de uma compreensão que nos obriga a sair da cômoda posição de atribuir a cada símbolo ou expressão matemática um significado único e, reciprocamente, a cada ideia uma única forma de representação.

Nesse sentido, o desenvolvimento cognitivo em matemática pode ser associado ao transitar do sujeito pelos Três Mundos da Matemática e, com isso, a promoção de diferentes usos da linguagem matemática, bem como o refinamento desses usos.

Contexto e metodologia da pesquisa

Nesse artigo nos dedicamos à identificação de diferenciações na linguagem nos Três Mundos da Matemática durante o desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática desenvolvida por três alunos de um curso de licenciatura em matemática.

A atividade foi desenvolvida no âmbito de uma disciplina de introdução à modelagem matemática. O tema da atividade desenvolvida pelos alunos foi análise da concentração de nicotina no organismo de fumantes.

Os dados da pesquisa desenvolvida foram coletados utilizando os procedimentos: i) observações diretas dos alunos; ii) análise de conversas informais; iii) aplicação de questionários; iv) anotações em diário de campo; v) entrevistas semiestruturadas; vi) gravações, em áudio e vídeo; e vii) análise dos registros (escritos, orais e visuais). Considerando as características da coleta de dados, bem como da análise empreendida sobre esses dados, podemos considerar que se trata de uma pesquisa qualitativa de cunho interpretativo, conforme caracterizado por Lüdke e André (1986).

A linguagem nos Três Mundos da Matemática na atividade de modelagem

A atividade que analisamos foi desenvolvida por um grupo de três alunos partindo de uma situação-problema escolhida por eles. A temática investigada diz respeito à concentração de nicotina em fumantes. Apresentamos neste artigo considerações sobre o trânsito dos alunos pelos Três Mundos da Matemática e do uso da linguagem nestes três modos de ação sobre a situação-problema e os objetos matemáticos a ela associados.

A atividade *Análise da concentração de nicotina no organismo de um fumante*

Esta atividade visa analisar a concentração da nicotina no organismo de um fumante considerando o consumo de diferentes quantidades de cigarro.

Os dados utilizados na atividade foram obtidos pelos alunos em site especializado da organização mundial da saúde (OMS), dissertações de mestrado, artigos da Internet e do livro *Nicotina Droga Universal* de José Rosemberg, médico e presidente do comitê coordenador do controle do tabagismo no Brasil.

Uma informação fundamental obtida pelos alunos em suas pesquisas sobre o problema em estudo é de que a meia-vida da nicotina no organismo é duas horas e que um único cigarro contém cerca de 8 miligramas da substância. Considerando que há fumantes que consomem diferentes números diários de cigarros, os alunos decidiram estudar duas situações.

Situação 1: Quanto tempo leva para o organismo eliminar a nicotina quando a pessoa fuma um único cigarro?

Situação 2: Para uma pessoa que fuma aproximadamente um maço de cigarros diariamente, como é a concentração de nicotina em seu organismo no decorrer do tempo?

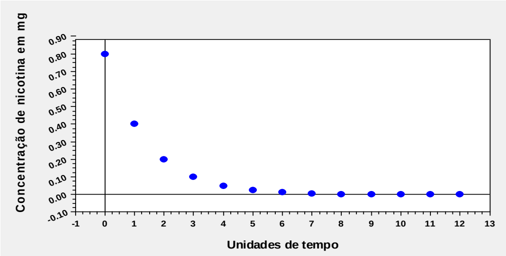
Na Figura 2 apresentamos, de forma resumida, a resolução dos alunos para a situação 1.

1° Meia-vida do cigarro de acordo com os dados

t (em horas)	n	C_n (mg)
0	0	0,8
2	1	0,4
4	2	0,2
6	3	0,1
8	4	0,05
10	5	0,025
12	6	0,0125
14	7	0,00625
16	8	0,003125
18	9	0,0015625
20	10	0,00078125
22	11	0,000390625
24	12	0,000195312

Tabela 1

2°Representação gráfica dos dados da Tabela 1



"por meio do gráfico observamos que os pontos obtidos se comportam semelhantemente ao gráfico de uma função exponencial decrescente" (Registro dos alunos durante a apresentação da atividade).

3° Tabela utilizada para obtenção do modelo

t (em horas)	n	C_n (mg)	$C_{n+1} - C_n$	$\frac{C_{n+1} - C_n}{C_n}$
0	0	0,8	− 0,4	− 0,5
2	1	0,4	− 0,2	− 0,5
4	2	0,2	− 0,1	− 0,5
6	3	0,1	− 0,05	− 0,5
8	4	0,05	− 0,025	− 0,5
10	5	0,025	− 0,0125	− 0,5
12	6	0,0125	− 0,00625	− 0,5
14	7	0,00625	− 0,003125	− 0,5
16	8	0,003125	− 0,0015625	− 0,5
18	9	0,0015625	− 0,00078125	− 0,5
20	10	0,00078125	− 0,000390625	− 0,5
22	11	0,000390625	− 0,000195312	− 0,5
24	12	0,000195312		

Tabela 2

4° Obtenção do modelo matemático

$$C(t) = 0{,}8e^{-0{,}346573632t}$$

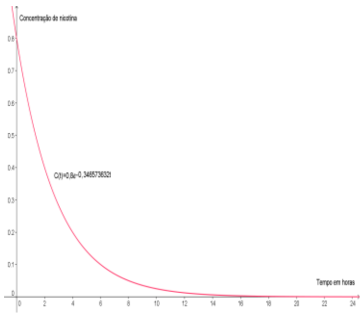
5° Validação do modelo

t (em horas)	C_n (mg)	$C(t) = 0{,}8e^{-0{,}346573632t}$
0	0,8	0,8
2	0,4	0,399999966
4	0,2	0,199999966
6	0,1	0,099999974
8	0,05	0,049999983
10	0,025	0,024999989
12	0,0125	0,012499993
14	0,00625	0,006249996
16	0,003125	0,003124997
18	0,0015625	0,001562498
20	0,00078125	0,000781249
22	0,000390625	0,000390624
24	0,000195312	0,000195312

Tabela 4 – Validação do modelo

6° Representação gráfica do modelo

$$C(t) = 0{,}8e^{-0{,}346573632t}$$



7° Retomada da situação-problema e conclusão dos alunos

Daí quando nós obtivemos o modelo, nós levantamos uma nova questão: em quanto tempo a nicotina absorvida de um cigarro será eliminada do organismo? Usando o nosso modelo, que encontramos para a concentração de apenas um cigarro, nós não poderíamos igualar a zero, então nós igualamos a um valor bastante pequeno, para ver quanto tempo essa nicotina permaneceria no organismo, resolvendo esses cálculos nós encontramos que o tempo em dias será 2 dias 17 horas 47 minutos e 41 segundos para que depois que você fumar um cigarro essa nicotina seja

	eliminada do organismo. (Registros dos alunos durante a apresentação)

Figura 2 – Abordagem matemática para a situação 1

Para a abordagem matemática da situação 2, entretanto, os alunos tiveram que considerar hipóteses diferentes e outros conceitos matemáticos conforme descrição abreviada da Figura 3.

1°' Definição de variáveis

t – tempo em horas; / C(t) – Concentração de nicotina no organismo.

2°' Elaboração de um quadro sobre a concentração de nicotina no organismo.

t	Concentração de nicotina no organismo
0	$C(0) = 0{,}8e^0 = 0{,}8$
1	$C(0) + C(1) = 0{,}8 + 0{,}8e^{-0{,}346573632\cdot 1} = 0{,}8\cdot(1 + e^{-0{,}346573632})$
2	$C(0) + C(1) + C(2) = 0{,}8\cdot(1 + e^{-0{,}346573632}) + 0{,}8e^{-0{,}346573632\cdot 2} =$ $= 0{,}8\cdot(1 + e^{-0{,}346573632\cdot 1} + e^{-0{,}346573632\cdot 2})$
3	$C(0) + C(1) + C(2) + C(3) =$ $= 0{,}8\cdot(1 + e^{-0{,}346573632\cdot 1} + e^{-0{,}346573632\cdot 2} + e^{-0{,}346573632\cdot 3})$
⋮	⋮
m	$C(0) + C(1) + \cdots + C(m) =$ $= 0{,}8\underbrace{(1 + e^{-0{,}346573632\cdot 1} + e^{-0{,}346573632\cdot 2} + \cdots + e^{-0{,}346573632\cdot(m-1)} + e^{-0{,}346573632\cdot m})}_{Soma\ dos\ termos\ de\ uma\ PG\ finita}$

3°' Obtenção de um modelo matemático utilizando conceitos matemáticos

$$C(t) = 0{,}8\cdot\frac{1 - e^{-0{,}346573632t}}{1 - e^{-0{,}346573632}}$$

4°' Conclusão

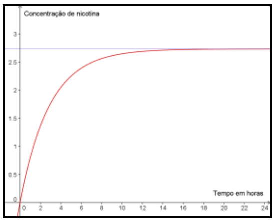
"mesmo que uma pessoa fumasse infinitos cigarros, a tendência do teor de nicotina no organismo é se estabilizar devido ao seu decaimento exponencial".

(Registro dos alunos durante a apresentação da atividade).

5°' Cálculo do limite da concentração de nicotina no organismo

$$\lim_{t\to\infty} C(t) = 2{,}731370575$$

Representação Gráfica



"Podemos perceber que a concentração da nicotina no decorrer do tempo no organismo de um tabagista que fuma regularmente um cigarro a cada hora, tende a se estabilizar não ultrapassando a marca de $2{,}731370575$ *mg.*

(Registro dos alunos)

6°' Finalização da atividade

Conforme os modelos elaborados, fica claro que a nicotina se esvai do organismo em um tempo que pode ser considerado curto e, também é notável que, aí se encontra o motivo da mesma causar dependência. Em função desta dependência, o fumante consome diversos cigarros por dia, só que para sustentar o vício pela nicotina, acaba absorvendo diversas outras substâncias nocivas à saúde, sendo que diversas delas são altamente cancerígenas, como é o caso do cádmio, cuja concentração é muito menor do que a concentração da nicotina por cigarro, em contrapartida, sua meia-vida é maior (Registro do relatório dos alunos).

Figura 3 – Resolução do problema enunciado na situação 2

A linguagem dos alunos na atividade *Análise da concentração de nicotina no organismo de um fumante*

Os registros dos alunos (Figura 2 e Figura 3) indicam usos da linguagem no decorrer do desenvolvimento da atividade de modelagem matemática, indicando que usaram linguagem gráfica, linguagem natural, linguagem algébrica para a abordagem matemática do problema.

Nesse contexto, o modo como o aluno lida com essas representações, como ele usa a linguagem – e qual linguagem ele usa –, fornece indicativos dos Mundos da Matemática pelos quais o aluno transita. Considerando as caracterizações apresentadas por Tall (2008), apresentamos na Figura 4 exemplos de linguagem dos alunos nestes diferentes Mundos.

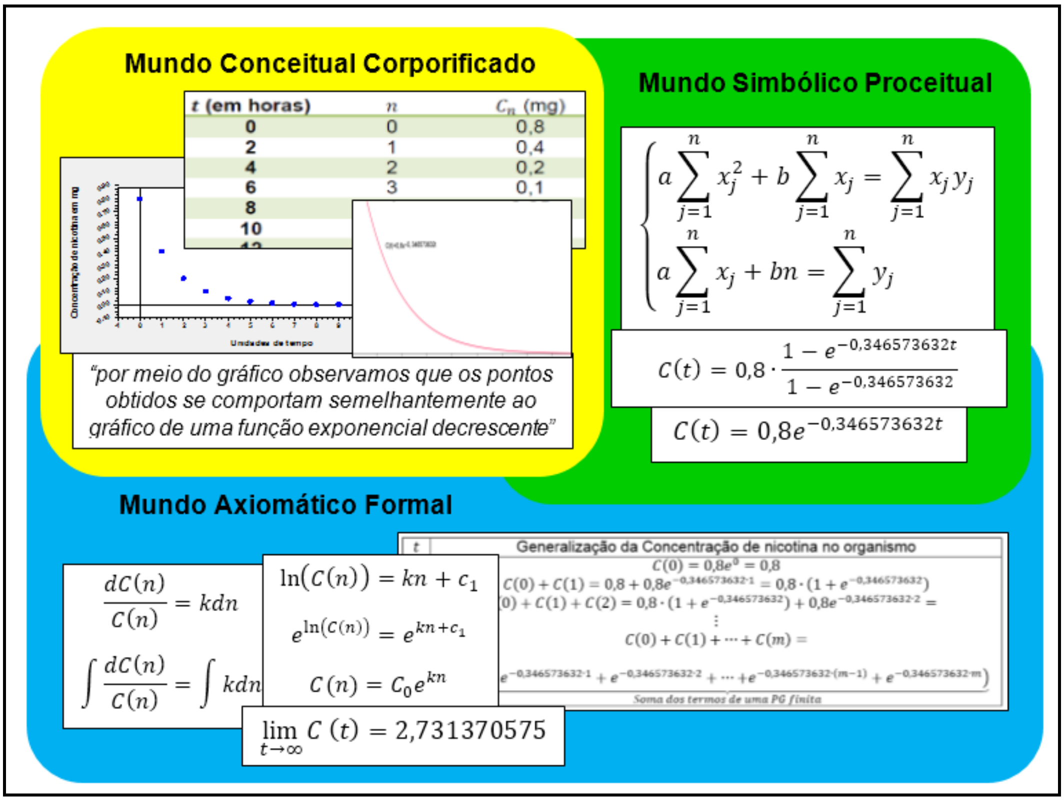


Figura 4 – A linguagem utilizada nas atividades de acordo com os Três Mundos da Matemática

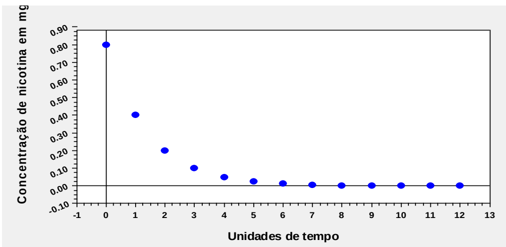
No início da atividade, a linguagem é utilizada no sentido de identificar características e propriedades da situação-problema e com estas informações definir hipóteses para o problema. O que se pode inferir então é que os alunos o fazem por meio do uso de objetos como gráficos, tabelas e textos.

De acordo com Tall (2008) no Mundo Conceitual Corporificado a linguagem é usada para nomear objetos, identificar suas propriedades, manipular representações. Assim, no Mundo Conceitual Corporificado, os alunos lidam com as informações obtidas com relação a nicotina no organismo do fumante, construindo diferentes representações para lidar com estas informações (Figura 5).

t (em horas)	n	C_n (mg)
0	0	0,8
2	1	0,4
4	2	0,2
6	3	0,1
8	4	0,05
10	5	0,025
12	6	0,0125
14	7	0,00625
16	8	0,003125
18	9	0,0015625
20	10	0,00078125
22	11	0,000390625
24	12	0,000195312

Tabela 1

t: *tempo em horas;*
C(t): *Concentração de nicotina no organismo.*



"por meio do gráfico observamos que os pontos obtidos se comportam semelhantemente ao gráfico de uma função exponencial decrescente"

Figura 5 – A linguagem no Mundo Conceitual Corporificado

A linguagem utilizada no início do desenvolvimento da atividade (Figura 5) visa simplificar e estruturar o problema matemático a ser resolvido. Para conseguir expressar o que os dados parecem indicar os alunos utilizam de três tipos de linguagem: a linguagem tabular, a linguagem gráfica e a linguagem natural. Esse modo de lidar com os objetos matemáticos, para simplificar os dados obtidos e visualizar o comportamento desses dados, está associado ao Mundo Conceitual Corporificado.

A partir da análise do gráfico da Figura 5, ocorre a tradução do comportamento dos dados para representações simbólicas, ou seja, para linguagem algébrica (Figura 6).

$\frac{C_{n+1}-C_n}{C_n}=k$ $C_{n+1}-C_n=kC_n$ $\frac{dC(n)}{dn}=kC(n)$ Interpretando o comportamento observado na Tabela 2	$\frac{dC(n)}{C(n)}=kdn$ $\int\frac{dC(n)}{C(n)}=\int kdn$ $\ln\big(C(n)\big)=kn+c_1$ $e^{\ln(C(n))}=e^{kn+c_1}$ $C(n)=C_0e^{kn}$ Resolução da EDO separável	$\ln\big(C(n)\big)=\ln(C_0e^{kn})$ $\ln\big(C(n)\big)=\ln(C_0)+\ln(e^{kn})$ $\ln\big(C(n)\big)=\ln(C_0)+(kn)\ln(e)$ $\ln\big(C(n)\big)=\ln(C_0)+kn$ Linearizando a solução da EDO separável

$\begin{cases} a\sum_{j=1}^{n} x_j^2 + b\sum_{j=1}^{n} x_j = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j \\ a\sum_{j=1}^{n} x_j + bn = \sum_{j=1}^{n} y_j \end{cases}$ Sistema para ajuste utilizando o método dos mínimos quadrados	$C(n) = 0{,}8e^{-0{,}693147265n}$ Modelo ajustado método dos mínimos quadrados	$C(t) = 0{,}8e^{-0{,}693147265\frac{t}{2}}$ Modelo considerando as características do problema

Figura 6 – Formulação do modelo, considerando a concentração de nicotina no organismo
Fonte: Registro dos alunos.

Os registros (Figura 6) sinalizam o uso de símbolos matemáticos e operações matemáticas, bem como teoremas e definições como o conceito de equações diferenciais ordinárias e o conceito de limites. A linguagem utilizada nesse momento é estritamente matemática, seja ela aritmética ou algébrica, no sentido de se apropriar das informações contidas na situação inicial e de possibilitar o acesso ao objeto matemático por meio de símbolos, bem como sua manipulação, em conformidade com Gómez-Granell (1997,1998).

Nesse sentido a linguagem matemática emerge e com ela relações e associações entre símbolos que respeitam a gramática que rege seu uso (CORRÊA, 2009), e representam conceitos e processos, como o conceito de soma e o processo de contagem.

Segundo Tall (2008, p. 149) a linguagem no Mundo Simbólico dos proceitos (processos e conceitos) é a linguagem usada para formular problemas e falar sobre o que fazer com eles, bem como para descrever novos conceitos como produtos, ou para descrever a solução de um problema. A linguagem utilizada pelos alunos (Figura 6) corrobora com esta assertiva de Tall (2008) quando os alunos interpretam os dados da tabela e a partir deles utilizam o conceito de equações diferenciais ordinárias, bem como determinam a solução da equação diferencial.

Desse modo os alunos fazem uso da linguagem que emerge da sofisticação do uso dos símbolos que representam ações no Mundo Simbólico Proceitual.

No entanto, o refinamento da manipulação dos símbolos, passando a usá-los como processos e conceitos[1], conduzem os alunos à linguagem formal da matemática associada, em geral, ao Mundo Axiomático Formal. Neste momento, o uso da linguagem simbólica da matemática, em consonância com a linguagem para expressar definições e propriedades, denota a interação entre o Mundo Simbólico Proceitual e o Mundo Axiomático Formal (Figura 6).

A partir das situações definidas para estudar o comportamento da concentração de nicotina faz-se necessário obter uma representação matemática que dê conta de prever a concentração de nicotina no organismo após fumar *n* cigarros (Figura 7).

[1] Os alunos visam obter o modelo matemático por meio de conceitos matemáticos como equações diferenciais ordinárias, a resolução dessa equação, métodos de ajuste de curvas, etc.

t	Desenvolvimento do modelo para n doses de nicotina
0	$C(0) = 0{,}8e^{0} = 0{,}8$
1	$C(0) + C(1) = 0{,}8 + 0{,}8e^{-0{,}346573632 \cdot 1} = 0{,}8 \cdot (1 + e^{-0{,}346573632})$
2	$C(0) + C(1) + C(2) = 0{,}8 \cdot (1 + e^{-0{,}346573632 \cdot 1} + e^{-0{,}346573632 \cdot 2})$
3	$C(0) + C(1) + C(2) + C(3) =$
	$= 0{,}8 \cdot (1 + e^{-0{,}346573632 \cdot 1} + e^{-0{,}346573632 \cdot 2} + e^{-0{,}346573632 \cdot 3})$
$\vdots$	$\vdots$
n	$C(0) + C(1) + \cdots + C(n) =$
	$= 0{,}8\underbrace{\left(1 + e^{-0{,}346573632 \cdot 1} + e^{-0{,}346573632 \cdot 2} + \cdots + e^{-0{,}346573632 \cdot (n-1)} + e^{-0{,}346573632 \cdot n}\right)}_{Soma\ dos\ termos\ de\ uma\ PG\ finita}$

Figura 7 – Obtenção do modelo para n cigarros

A Figura 7 revela como os alunos procedem na obtenção do modelo para o decaimento da concentração de nicotina no decorrer do tempo no organismo, obtendo $C(t) = 0{,}8e^{-0{,}346573632t}$. A partir desse modelo matemático os alunos fazem a generalização, usando um caso particular para construir a resposta para um caso geral, ou seja, para determinar como se dá a concentração de nicotina no organismo quando se tem $C(0) + C(1) + \cdots + C(n)$.

A linguagem matemática neste caso representa esta generalização, ou seja, mostra como induzir, a partir de um modelo particular, um resultado para uma classe de casos, ou ainda, para estabelecer a formulação de determinado conceito. Nesse contexto, a linguagem é utilizada no sentido de definições e deduções de propriedades baseadas em experiências corporificadas e simbólicas, visto que o desenvolvimento da Figura 7 está atrelado aos desenvolvimentos da Figura 5 e da Figura 6. Faz-se uso, assim, da linguagem associada ao Mundo Axiomático Formal, ou seja, a lógica e a coerência relacionada à linguagem matemática.

Os registros da Figura 5 e da Figura 6 parecem ir ao encontro do que Tall (2008, p. 149) argumenta sobre a linguagem no Mundo Axiomático Formal: “a linguagem no mundo formal muda, novamente, para uma formulação precisa em que os termos são definidos para ter propriedades específicas, relacionadas a um conjunto teórico, de modo que podem ser utilizadas para a dedução lógica na prova de teoremas”.

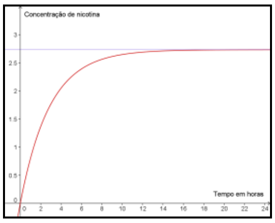
Nesse sentido, consideramos que os alunos iniciam a atividade transitando pelo Mundo Conceitual Corporificado e Simbólico Proceitual em interação com o Mundo Axiomático Formal. A análise dos registros corrobora com a assertiva de Tall (2008) de que cada um desses processos de construção [Mundos da Matemática] se desenvolve por meio do uso da linguagem para descrever, definir e deduzir relações, até que a linguagem atinge a sofisticação associada à matemática formal, em geral, provida de uma simbologia específica.

Para validar o modelo matemático os alunos fazem uso de diferentes linguagens, usos que compreendem as linguagens algébrica, gráfica e natural (Figura 8). Faz parte da atividade de modelagem a resolução do problema por meio de procedimentos adequados e a análise da solução que implica numa validação, identificando a sua aceitabilidade ou não. No mesmo sentido de Blum (2002), após a obtenção dos resultados matemáticos eles têm de ser reinterpretados no mundo real, ou seja, interpretados em relação à situação original. Ao mesmo tempo, o modelador valida o modelo por meio da verificação da solução obtida para o problema, o que é feito interpretando se os resultados matemáticos são adequados e se são razoáveis para seus propósitos (Figura 8).

t (em horas)	C_n (mg)	$C(t) = 0{,}8e^{-0{,}346573632t}$
0	0,8	0,8
2	0,4	0,399999966
4	0,2	0,199999966
6	0,1	0,099999974
8	0,05	0,049999983
10	0,025	0,024999989
12	0,0125	0,012499993
14	0,00625	0,006249996
16	0,003125	0,003124997
18	0,0015625	0,001562498
20	0,00078125	0,000781249
22	0,000390625	0,000390624
24	0,000195312	0,000195312

Tabela 4 – Validação do modelo

Representação gráfica para a saturação da droga no organismo



"Podemos perceber que a concentração da nicotina no decorrer do tempo no organismo de um tabagista que fuma regularmente um cigarro a cada hora, tende a se estabilizar não ultrapassando a marca de $2{,}731370575$ *mg.*

(Registro dos alunos)

Figura 8 – Validação do modelo e conclusão final
Fonte: Registros dos alunos.

A observação do trânsito dos alunos nos Três Mundos da Matemática pode ser inferida considerando que o desenvolvimento da atividade requer algum refinamento da linguagem no decorrer das diferentes ações e procedimentos. Os registros dos alunos fornecem indicativos da ocorrência desse refinamento.

Assim como Tall (2008) menciona que a linguagem é utilizada de diferentes maneiras em cada Mundo da Matemática, na modelagem matemática há diferentes usos da linguagem: para descrever, para explicar, para validar, entre outros. Os diferentes usos da linguagem denotam o trânsito dos sujeitos pelos Três Mundos da Matemática da teoria de David Tall. Esses usos da linguagem evidenciam, assim, o que diz Corrêa (2009, p. 94), que na matemática há "uma gramática que rege 'a ordem concebível' no interior de um sistema coerente, em que conhecimento e linguagem possuem o mesmo princípio de funcionamento na representação".

A Figura 9 indica a linguagem utilizada pelos alunos no desenvolvimento da atividade de modelagem matemática. A linguagem, por sua vez, indica o caminhar dos alunos pelos Três Mundos da Matemática.

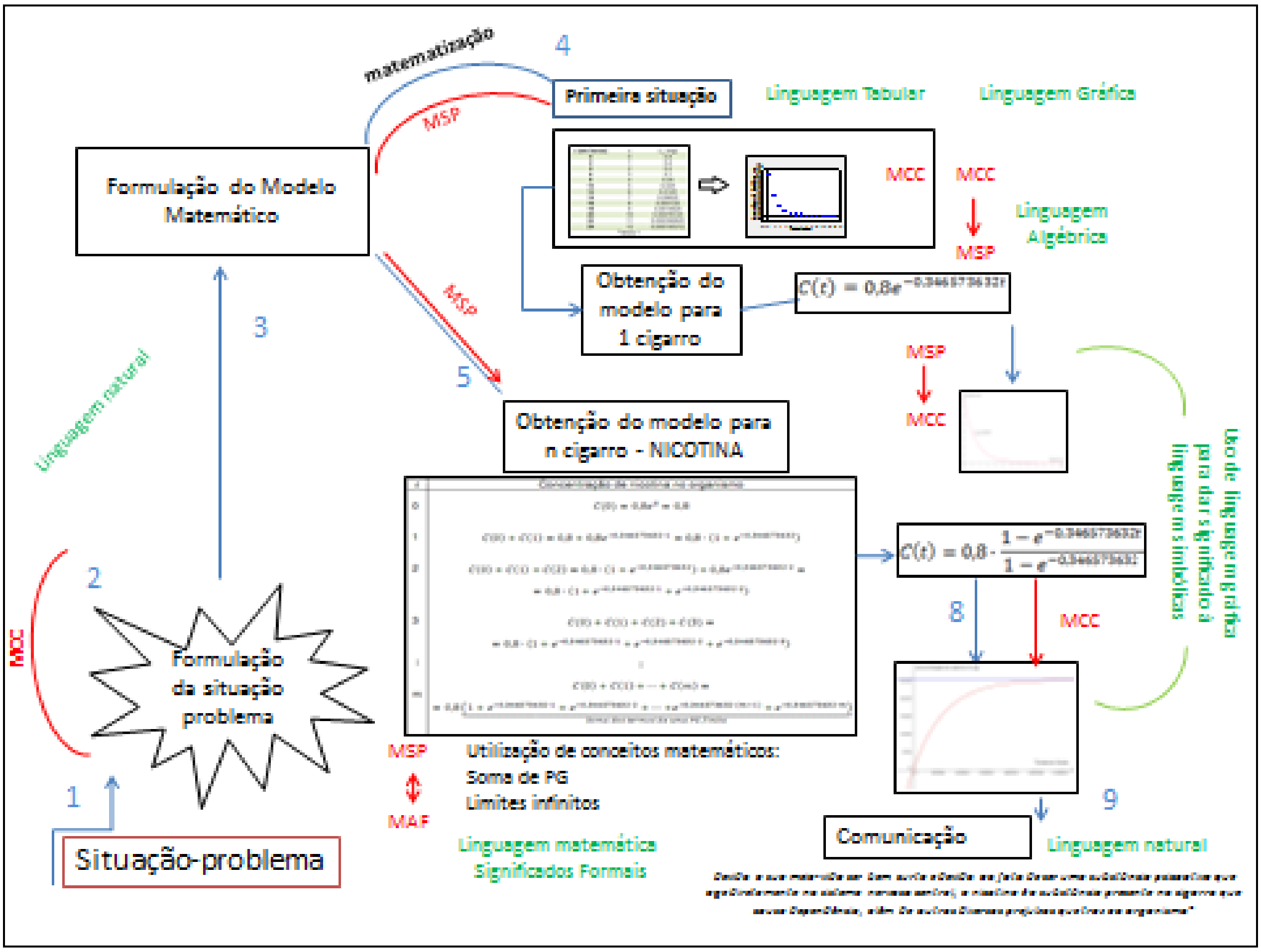


Figura 9 – Caminhos percorridos pelos alunos na atividade *Análise da concentração de Nicotina*

Concluindo

As tricotomias associadas ao desenvolvimento cognitivo dos alunos envolvidos em atividades matemáticas foram caracterizadas algumas vezes na literarutura. Neste artigo subsidiamos nossas argumentações na caracterização de David Tall, referindo-se a Três Mundos da Matemática e, em especial, no que se pode concluir sobre a linguagem dos alunos nesses três mundos.

Na atividade de modelagem matemática a que nos referimos neste texto, os alunos partiram de situações perceptíveis, daquilo que lhes era observável. Ao utilizar apenas a observação e a ação sobre a situação-problema eles iniciavam a atividade com modos de operação relacionados ao Mundo Conceitual Corporificado, que segundo Tall (2003), é o mundo em que o modo de operação é fundamentalmente humano baseado na percepção e na ação. Neste caso então tabelas, gráficos e texto, são especificidades da linguagem e seu uso é mais associado à função representativa.

Avançar no que se refere ao desenvolvimento da atividade requer a matematização, a resolução do problema por meio da matemática. Nestes procedimentos os alunos necessitaram de construções algébricas, dedução e resolução de equações diferenciais, indicando que símbolos matemáticos precisariam emergir e ser manipulados. Neste sentido, especificidades do Mundo Simbólico Proceitual se evidenciam.

O refinamento da linguagem entre os Mundos Corporificado e Simbólico é observado no que diz respeito ao seu potencial para representar a situação inicial, seja por meio da linguagem natural, seja por meio de tabelas, quadros, gráficos, e da linguagem matemática envolvendo símbolos e cálculos.

No que diz respeito ao Mundo Axiomático Formal, o uso da linguagem ocorre para expressar conceitos utilizados na formulação do modelo matemático. Nesse sentido, processos de generalização denotam um refinamento da linguagem matemática que se inicia no Mundo Simbólico Proceitual e se aperfeiçoa no trânsito pelo Mundo Axiomático Formal. É nesse momento que linguagem natural e linguagem matemática são relacionadas para proporcionar a compreensão da situação inicial e transita-se entre os Mundos Axiomático Formal e Conceitual Corporificado.

Observamos que não há uma linearidade no que diz respeito ao caminho traçado entre os Mundos da Matemática, mas há um trânsito, idas e voltas, entre corporificações que servem de base para a compreensão e o uso da linguagem matemática para cálculos e para convencimentos associados às generalizações e provas matemáticas.

Segundo Tall (2004a) o caminho que cada sujeito traça pelos Três Mundos da Matemática é particular e individual. Esse quadro teórico está relacionado ao desenvolvimento dos sujeitos. Observamos que quando temos alunos envolvidos com atividades de modelagem matemática, o conjunto de ações que a modelagem requer deles, bem como as etapas de uma atividade de modelagem matemática, citadas por Blum (2002), levam os alunos a transitar por pelo menos dois dos Três Mundos da Matemática: o Mundo Conceitual Corporificado e o Mundo Simbólico Proceitual. E, por vezes, dependendo do conjunto de conhecimentos prévios dos alunos, eles vêm e vão do Mundo Conceitual Corporificado para o Mundo Simbólico Proceitual e para o Mundo Axiomático Formal – não necessariamente nessa ordem.

O refinamento da linguagem pode denotar a passagem, ainda que tênue, de um Mundo ao outro, formando um ciclo de ações. Nesse sentido a modelagem matemática possibilita o uso de diferentes linguagens, bem como o refinamento desse uso que, por sua vez, caracteriza o transitar cognitivo entre os diferentes mundos da matemática.

Referências

ALMEIDA, L. M. W., PALHARINI, B. N. Os "Mundos da Matemática" em Atividades de Modelagem Matemática. **Bolema**, v. 26. n. 43, p. 907-934, 2012.

ALMEIDA, L. M. W.; TORTOLA, E.; MERLI, R. F. Modelagem Matemática – Com o que Estamos Lidando: Modelos Diferentes ou Linguagens Diferentes? **Acta Scientiae**, Canoas, v. 14, n. 2, p. 215-239, maio/ago. 2012.

AMADO, N.; CARREIRA, S.; NOBRE, S.; PONTE, J. P. **Representations in solving a word problem**: the informal development of formal methods. In: PME 34, 2010.

BASSANEZI, Rodney Carlos. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia**. 2. ed. São Paulo: Contexto, 2002.

BLUM, W. Icmi study 14: Applications and modeling in mathematics education – discussion document. **Educational Studies in Mathematics**. 51, p. 149–171, 2002.

CORRÊA, R. A. Linguagem matemática, meios de comunicação e Educação Matemática. In: NACARATO, A. M.; LOPES, C. E. (Org.). **Escritas e leituras na educação matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2009.

D'AMBRÓSIO, U. **Educação Matemática: Da teoria à prática**. Campinas: Papirus, 1996.

GARCIA, L. M. I. **Os processos de visualização e de representação dos signos matemáticos no contexto didático pedagógico**. 2007. 174 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2007.

GARNICA, A. V. M. É necessário ser preciso? É preciso ser exato?: um estudo sobre argumentação matemática ou uma investigação sobre a possibilidade de investigação. In: Helena Noronha Cury. (Org.). **Formação de Professores de Matemática**: uma visão multifacetada. Porto Alegre: EDIPUCRS, p. 49-87, 2001.

GOTTSCHALK, C. A natureza do conhecimento matemático sob a perspectiva de Wittgenstein: algumas implicações educacionais. In: **Caderno de História e Filosofia da Ciência**, Campinas, Série 3, v.14, n2, p. 305-334, 2004.

GÓMEZ-GRANELL, C. Linguagem matemática: símbolo e significado. In: TEBEROSKY, A. e TOLCHINSKI, Liliana (Orgs.) **Além da alfabetização**. Trad. Stela Oliveira. São Paulo: Ática, 1997.

GÓMEZ-GRANELL, C. Rumo a uma epistemologia do conhecimento escolar: o caso da educação matemática. In: RODRIGO, Naria J. e ARNAY, J. (Orgs.). **Domínios de conhecimento, prática educativa e formação de professores**. São Paulo: Ática, 1998.

HOUAISS, Antônio. **Grande dicionário da língua portuguesa**. São Paulo: Objetiva, 2009.

HÖFER, T.; BECKMANN, A. Supporting mathematical literacy: examples from a cross-curricular project. In: **ZDM Mathematics Education**, 41: 223-230, 2009.

INGLIS, M.; MEJIA-RAMOS,J. P.; SIMPSON, A. Modelling mathematical argumentation: the importance of qualification. **Educational Studies in Mathematics**. 66: p. 3-21, 2007.

LESH, R; CARMONA, G; HJALMARSON, M. Working group: models and modeling. In: PME-NA, Mérida. **Proceedings**... Mérida, p. 92-95, 2006.

LÜDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. A. **Pesquisa em Educação**: Abordagens Qualitativas. São Paulo: EPU, 1986.

MEYER, J. F. C. A.; CALDEIRA, A. D.; MALHEIROS, A. P. S. **Modelagem em Educação** Matemática. Belo Horizonte: Autêntica, 2011 (Coleção Tendências em Educação Matemática).

MIGUEL, A.; VILELA, D. S.; MOURA, A. R. L. Problematização interdisciplinar de uma prática cultural numa perspectiva Wittgensteiniana. In: **Revista Reflexão e Ação**, Santa Cruz do Sul, v. 20, n2, p.06-30, 2012.

MORGAN, C. **Writing Mathematically**: the discourse of investigation. London: Taylor & Francis Group, 2002.

PALHARINI, B. N. **Modelagem Matemática e pensamento matemático**: um estudo à luz da teoria dos Três Mundos da Matemática. 2010. 190 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2010.

PINTO, M. M. F. **Uma perspectiva sobre o desenvolvimento matemático**. Anais do III Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática - SIPEM. Águas de Lindóia – São Paulo, 2006.

SANTOS, V. M. Linguagens e comunicação na aula de Matemática. In: NACARATO, A. M.; LOPES, C. E. (Org.). **Escritas e leituras na educação matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2009.

SFARD, A. On the Dual Nature of Mathematical Conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. **Educational Studies in Mathematics**, v. 22, p. 1-36, 1991.

TALL, D. Using Technology to support na embodied approach to learning concepts in mathematics. In: L.M Carvalho and L.C.Guimarães (eds) **História e Tecnologia no Ensino de Matemática**. vol. 1, p.1-28. Rio de Janeiro, 2003.

TALL, D. Introducing the three worlds of mathematics. **For the Learning of Mathematics**, Fredericton, Canadá, v. 23 n. 3, p. 29-33, 2004a.

TALL, D. Thinking Through Three Worlds of Mathematics. **Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education**, Bergen, Norway, 4, 281–288, 2004b.

TALL, D. The Transition to Formal Thinking in Mathematics. **Mathematics Education Research Journal**, 20 (2), 5-24, 2008.

Submissão: 17/03/2014
Aceite: 27/06/2014