

INVESTIGAÇÕES A RESPEITO DA CONSTRUÇÃO DE CONHECIMENTOS GEOMÉTRICOS PELAS CRIANÇAS DOS ANOS INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL

INVESTIGATIONS REGARDING THE CONSTRUCTION OF GEOMETRIC KNOWLEDGE FOR CHILDREN OF EARLY YEARS OF BASIC EDUCATION

Débora Reis Pacheco

Pontifícia Universidade Católica de São Paulo/ Programa de Estudos Pós Graduated em Educação Matemática, debora.rpacheco@gmail.com

Célia Maria Carolino Pires

Pontifícia Universidade Católica de São Paulo/ Programa de Estudos Pós Graduated em Educação Matemática, celia@pucsp.br

Resumo

O presente artigo tem como objetivo apresentar contribuições de investigações sobre a construção de conhecimentos geométricos pelas crianças dos anos iniciais do Ensino Fundamental e indicar como elas podem orientar as práticas docentes nas aulas de Matemática. Trata-se de uma pesquisa bibliográfica desenvolvida com base em material já elaborado, constituído de livros e artigos científicos, a partir do qual buscamos identificar similaridades e diferenças. Explora as ideias de pesquisadores como os Van Hiele (apud CROWLEY, 1994), Parzysz (1988; 2006), Hannibal (1999) e autores brasileiros, em especial Pais (1996), Pires, Curi e Campos (2012). Como resultados, destacamos que a construção das noções geométricas inicia-se no espaço perceptivo, mas que deve haver um cuidado com as confusões entre conceitos e representações e com a redução das intervenções no espaço perceptivo às manipulações de objetos. Além disso, as pesquisas mostram que a transição dos conhecimentos físicos/perceptivos para os conhecimentos abstratos é um grande desafio no ensino da Geometria.

Palavras-chave: Geometria, Investigações, Anos Iniciais.

Abstract

The aim of this article is to present the contributions of the investigations on the constitution of geometric knowledge for children in the early years of elementary school and indicate how they can guide the teaching practices in mathematics classes. This is literature developed based on material already prepared, consisting of books and papers, from which we seek to identify similarities and differences. Explores the ideas of researchers like Van Hiele (apud Crowley, 1994), Parzysz (1988; 2006), Hannibal (1999) and Brazilian authors, in particular Pais (1996), Pires, Curi e Campos (2012). As results, we point out that the construction of the geometric notions starts in the perceptual space, but that there should be careful about the confusion between concepts and representations and reducing interventions in perceptual space to the manipulations of

objects. Moreover, research shows that the transition from physical / perceptual knowledge to abstract knowledge is a major challenge in teaching geometry.

Key words: Geometry, Investigations. Early Years.

Introdução

“Espaço e Forma” é um dos blocos de conteúdo, indicados pelos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental (1997) e aparece em diferentes propostas curriculares estaduais e municipais como tema relevante para a formação matemática das crianças, desde o ciclo de alfabetização. Mesmo com recomendações e materiais de apoio podemos considerar a hipótese de que os conhecimentos geométricos continuam sendo, de modo geral, pouco ou mal trabalhados em nossas escolas, talvez pela falta de clareza quanto à sua importância ou pela falta de conhecimentos geométricos dos professores, que também não tiveram contato com ela em sua formação. Assim, é fundamental que se discuta a importância do ensino de Geometria, chamando atenção para o desenvolvimento de um pensamento geométrico, que tem tanta relevância para o aluno quanto o pensamento aritmético ou algébrico.

Neste artigo, destacamos pesquisas que abordam o desenvolvimento do pensamento geométrico nos primeiros anos do Ensino Fundamental, com o objetivo de apresentar as principais contribuições para a prática docente.

Em levantamento realizado junto ao Banco de Teses da Capes com o propósito de localizar a literatura existente sobre o tema Espaço e Forma, foram encontradas 23 pesquisas relacionadas à Geometria nos anos iniciais¹. Vale ressaltar que, devido o processo de atualização, o Banco de Teses da Capes disponibilizou apenas as pesquisas de 2011 e 2012.

Entre elas verificamos diferentes focos como: o uso da tecnologia como ferramenta de aprendizagem; formação de professores, tanto inicial como continuada; análise de determinados conteúdos em livros didáticos; relação da Geometria com a Arte; utilização de materiais específicos, como jogos ou uso de máquina fotográfica e materiais manipulativos. Notamos que apenas uma pesquisa se referia às questões espaciais. Do mesmo modo, só uma outra pesquisa apresentou o desenvolvimento do pensamento geométrico como foco.

Assim, iniciamos com as questões espaciais propostas na teoria piagetiana, que relata os primeiros contatos da criança com o espaço. Ainda em relação às primeiras noções espaciais contamos com as contribuições das pesquisadoras brasileiras Pires, Curi e Campos (2012), Curi (2013) e Nascimento e Fernandes (2013).

Posteriormente, apresentamos uma síntese do modelo Van Hiele (apud CROWLEY, 1994), encontrado na maioria dos trabalhos levantados junto ao Banco de Teses da Capes. Esse modelo propõe que os alunos avançam em níveis de compreensão dos conceitos, enquanto aprendem Geometria.

¹ Pesquisa realizada no site < <http://www.capes.gov.br/component/content/article?id=2164>> em 25/07/2014. Palavras-chave utilizadas na pesquisa: “Geometria, anos iniciais” e “Geometria, Ensino Fundamental I”.

Do mesmo modo, Parzysz (1988, 2006), fundamentado em Van Hiele e outros teóricos, Houdement e Kuzniak (2003, apud PARZYSZ, 2006) e Henry (1999, apud PARZYSZ, 2006), definem níveis hierárquicos preocupando-se com a dialética entre aquisição de conhecimento e domínio de representação.

Complementando os estudos sobre a construção do pensamento geométricos, Pais (1996) nos ajuda a esclarecer alguns termos que compõem o conhecimento geométrico.

Em relação a construção de conceitos geométricos específicos pelas crianças pequenas, destacamos as pesquisas de Clements et al. (1999), Hannibal (1999) e Clements e Sarama (2011).

Tais pesquisas elencam pontos importantes que devem ser considerados na prática docente.

Relações Espaciais: as contribuições de Jean Piaget

Piaget e Inhelder (1993) diferenciam a construção das relações espaciais em dois planos: o perceptivo e o representativo. O espaço perceptivo relaciona-se ao início da estruturação espacial, pautada em relações elementares resultantes do contato direto com objetos e dos progressos da percepção e da motricidade.

Nos anos iniciais da escolaridade as estruturas perceptivas estão muito presentes, tais estruturas constituem-se progressivamente até conquistarem o espaço representativo. Piaget e Inhelder (1993) descrevem três tipos de relações que se desenvolvem ao longo desse processo:

- *Relações topológicas elementares:* as relações não se separam das atividades do sujeito (egocentrismo). Os elementos são vistos de forma independente, sem conservação de propriedades e comparação com outros elementos. A constituição do sistema de coordenadas se dá em relação ao próprio corpo.
- *Relações projetivas:* partem das relações topológicas e tornam-se mais complexas e exteriores ao próprio corpo. Os elementos deixam de ser considerados em si mesmos, há a coordenação de outros pontos de vista.
- *Relações euclidianas:* também partem das relações topológicas e são independentes das relações projetivas. Envolvem as relações métricas e a conservação de elementos até chegar em sistemas de conjuntos de coordenadas.

As relações projetivas e euclidianas por serem mais complexas têm um desenvolvimento mais tardio, além disso, ambas acontecem quase ao mesmo tempo.

Piaget e Inhelder (1993) apontam em suas pesquisas que antes de qualquer organização projetiva ou euclidiana, a criança estabelece relações de vizinhança, separação, ordem, envolvimento (entorno) e continuidade.

Para estes teóricos, o espaço perceptivo se estende até o surgimento simultâneo da linguagem e da representação figural. Assim, o início do espaço representativo coincide com o surgimento da representação figural e do pensamento intuitivo. As

intuições mais elementares, advindas das relações topológicas, possibilitam a reconstrução do espaço vivido com a inserção de alguns elementos projetivos e euclidianos, caracterizando o espaço representativo.

As contribuições de Pires, Curi e Campos

As pesquisas de Pires, Curi e Campos (2012) realizadas ao longo de quatro anos junto a professores de uma escola pública estadual paulista tratam de conteúdos e noções de Geometria no Ensino Fundamental, desde as relações espaciais e figuras bidimensionais e tridimensionais, até as noções de área e perímetro.

Os resultados destas pesquisas foram organizados em um livro que é composto por contribuições teóricas e descrições das atividades trabalhadas em sala de aula em conjunto com as reflexões dos professores e pesquisadores. Apresentamos algumas destas reflexões, especificamente em relação à orientação espacial.

As autoras apontam a importância da manipulação e experimentação ativa do espaço e dos objetos nele inseridos, baseando-se também na teoria piagetiana. Entretanto, ressaltam que o contato com objetos não é suficiente para que a aprendizagem aconteça.

No entanto, é bom ter cuidado para não confundir isso com falsas ideias segundo as quais se imagina que basta mostrar objetos geométricos aos alunos para que estes os conheçam, ou que basta enunciar suas propriedades para que os alunos delas se apropriem. (PIRES, CURTI, CAMPOS, 2012, p. 23)

Pires, Curi e Campos (2012) afirmam que o aspecto experimental contribuirá para a relação entre os espaços, por meio dele é possível antecipar, observar, agir e explicar o que acontece no espaço sensível ou perceptivo. Além disso, a experimentação colaborará com a representação, desprendendo-se dos objetos físicos e passando para as representações mentais, constituindo assim a ação Matemática.

Desse modo, fica evidente que os objetos físicos são apenas recursos para o desenvolvimento do pensamento geométrico, e que é a comparação e exploração das propriedades dos objetos que auxiliarão na progressão das relações espaciais.

As autoras ainda diferenciam os conhecimentos espaciais/problemas espaciais dos conhecimentos geométricos/ problemas geométricos. Os conhecimentos espaciais estão relacionados aos próprios objetos e as ações realizadas sobre eles. Já os conhecimentos geométricos abarcam as relações entre os objetos e suas implicações, sendo que os objetos são os próprios conceitos e as relações são os teoremas, afastando-se do espaço perceptivo.

Em relação aos assuntos/conteúdos abordados com as professoras, as autoras enfatizam que o estudo da orientação espacial é tão importante quanto o estudo das formas.

Relembrem que a orientação espacial começa a ser construída no próprio corpo da criança. Além disso, diferenciam os termos “lateralização” e “lateralidade”. Sendo que o primeiro está relacionado à escolha no uso das mãos, reconhecendo a sua direita e sua

esquerda. Já a segunda acontece posteriormente, quando a criança consegue reconhecer que a esquerda de uma pessoa que está à sua frente coincide com sua direita.

Por meio das atividades trabalhadas pelos professores em sala de aula, as pesquisadoras relatam que a partir do segundo ano do Ensino Fundamental as crianças conseguem dar e receber informações sobre sua localização dentro da sala de aula ou da escola. Com o passar dos anos de escolaridade é possível verificar um aprimoramento do vocabulário e dos recursos de representação gráfica dos espaços.

As contribuições de Curi e Vece

Ao analisar alguns documentos que apresentam o currículo, como os Parâmetros Curriculares Nacionais e as Orientações Curriculares do Estado de São Paulo em conjunto com professores da rede pública e pesquisadores, Curi e Vece (2013) organizaram as experiências em um livro composto por artigos dos pesquisadores e professores integrantes do projeto.

Curi (2013) identifica três competências fundamentais para o desenvolvimento das noções espaciais nos anos iniciais: leitura e interpretação do espaço; construção de representações do espaço e comunicação a partir de descrições do espaço.

As três competências não são hierárquicas, entretanto, estudos defendem que a exploração oral antecede qualquer tipo de representação gráfica. Como já mencionado, é a exploração, interação e movimentação no espaço que inicia o desenvolvimento das noções espaciais. É importante destacar que nessa experimentação, as diferentes linguagens contribuem para que a interação ocorra.

A construção de representações também depende da interpretação de representações, ou seja, só é possível construir representações se há um repertório, se o aluno já interpretou e explorou representações anteriormente.

Para o desenvolvimento destas competências, Curi (2013) ressalta a importância dos diferentes pontos de vista, já que o espaço não é estático e alerta que a evolução da criança depende de intervenções, reforçando a ideia colocada por Pires, Curi e Campos (2012).

Outro ponto que deve ser destacado é a questão da contextualização, apontado por Nascimento e Fernandes (2013), integrando o material organizado por Curi e Vece (2013). Em toda a discussão, acerca das relações espaciais, a questão do contexto vivido está muito presente. Ao planejar situações que propiciem o desenvolvimento das três competências e que respeitem a complexa transição do espaço perceptivo e das relações topológicas para o espaço representativo e suas relações projetivas e euclidianas, é preciso se atentar ao contexto escolar e o espaço vivenciado pelos alunos.

Entretanto, Nascimento e Fernandes (2013) alertam para as confusões ocorridas quando surge o termo “contexto”. Diferenciam “contextualização” de “cotidiano”, ou seja, apontam que não é necessário apresentar situações que estejam sempre presentes no cotidiano do aluno, isso poderia empobrecer tais situações devido as limitações do cotidiano dos alunos. A função do contexto é também ampliar o que faz parte do cotidiano do aluno.

Compreender o processo gradativo da construção das relações espaciais, identificar situações que promovam o desenvolvimento das três competências citadas e perceber as ampliações que as situações podem oferecer, pode ajudar o professor em seu planejamento e nas possíveis intervenções para a melhoria do ensino das relações espaciais.

Revisitando o Modelo Van Hiele

O Modelo Van Hiele de desenvolvimento do pensamento geométrico surgiu na Universidade de Utrecht, com os trabalhos do Doutorado de Dina Van Hiele-Geldof e seu marido Pierre Marie Van Hiele, dois educadores holandeses. (CROWLEY, 1994).

Por meio da observação de seus alunos, Dina e Pierre perceberam que a progressão do raciocínio das crianças acontecia sequencialmente, assim denominaram cinco níveis: visualização, análise, dedução informal, dedução formal e rigor.

No nível 0, *visualização*, os alunos reconhecem as formas pela totalidade e não pelas propriedades. No nível 1, *análise*, os alunos passam a visualizar também as partes, a visualização do todo deixa de ser o único recurso para identificar formas, entretanto ainda não conseguem fazer relações entre as propriedades identificadas. A partir do nível 2, *dedução informal*, a relação entre as propriedades é possível, as definições e inclusões de classes são compreendidas. No nível 3, *dedução formal*, os alunos conseguem compreender axiomas e postulados, podendo construir demonstrações de mais de uma maneira. E por fim, no nível 4, denominado *rigor*, é possível estudar as geometrias não euclidianas, a geometria é compreendida como um campo abstrato. Esse último nível pouco aparece nos currículos escolares e em pesquisas científicas. (CROWLEY, 1994).

Para que a progressão aconteça conforme o desejado é preciso que o nível em que o aluno está seja o mesmo do curso. A metodologia, os materiais didáticos, o conteúdo e o vocabulário também devem ser adequados. Se estiverem um nível acima, o aluno não terá capacidade para acompanhar os processos. (CROWLEY, 1994).

Zambon (2010) em sua dissertação compara os níveis do modelo Van Hiele com os níveis de escolaridade no Brasil, sendo os níveis 0, 1 e 2 relacionados aos anos iniciais do Ensino Fundamental. Assim, os alunos devem estar em contato com os aspectos visuais e experimentais, para estabelecer as relações da dedução informal.

Depois de muitas pesquisas o modelo foi aceito como um instrumento de identificação dos níveis, com o objetivo de ajudar alunos a avançar no conhecimento geométrico.

Pires (2012) relata a existência de críticas a modelos como o de Van Hiele “pelo fato de esses níveis não serem tão estanques e estarem sujeitos a maior ou menor estimulação das crianças por situações que envolvem a experimentação do espaço e das formas” (p.194). Entretanto a autora enfatiza a importância de tais níveis na construção de sequências didáticas no ensino da Geometria.

Jaime e Gutiérrez (1990) propõem que nenhum professor deveria esperar que um modelo resolva todos os problemas, mas sim utilizá-los como base para avançar na qualidade do ensino. Contudo, os autores afirmam que, para o êxito de um modelo é

preciso conhecê-lo profundamente e confiar na sua utilização, só assim ele poderá ser aplicado com a flexibilidade necessária.

Nos trabalhos sobre Geometria, encontrados no banco de teses da Capes, verificamos a presença de tais críticas. Zambon (2010) posiciona-se contra o “engessamento” do pensamento geométrico, e, assim como Pires (2012), acredita no estabelecimento de níveis para nortear o ensino.

Nasser e Tinoco (2004 apud MORAES 2008) afirmam que tais níveis não são estanques como parecem, pois os alunos podem utilizar estratégias de raciocínio de mais de um nível. Jaime e Gutiérrez (1990) colaboram com essa afirmação propondo que, a passagem de um nível para outro acontece de forma gradual, pois um aluno pode utilizar uma estratégia do nível superior em determinada atividade, mas quando sente dificuldade retorna a um nível inferior em busca de maior segurança.

Desse modo, assumimos que, o modelo Van Hiele pode colaborar para o planejamento das aulas e para a seleção de conteúdos, assim como auxiliar na identificação de dificuldades dos alunos no ensino de Geometria.

Aprofundando a discussão: as contribuições de Parzysz

Parzysz (1988, 2006) também propôs níveis hierárquicos acerca da aprendizagem em geometria. Sua pesquisa aprofunda a discussão proposta por Van Hiele e propõe um novo modelo pautado nas oposições físico/teórico e perceptivo-dedutivo/hipotético-dedutivo. As subdivisões hierárquicas iniciam-se no “concreto” (G0), passam por construções espaço-gráficas (G1), que ainda se apoiam no concreto, até chegar a uma geometria axiomática (G2 e G3).

Parzysz (2006) não caracteriza G0 como geometria, pois não há a abstração dos atributos não geométricos (cor, matéria, etc.). Em G1 os alunos conseguem representar os objetos no papel, ou em diferentes interfaces. Também dialogam com as propriedades das figuras, embora não consigam explicá-las e ainda precisem das situações concretas. Para Maciel (2004), G0 e G1 relacionam-se respectivamente aos níveis 0 e 1 do modelo Van Hiele.

Em G2, os alunos começam a compreender as definições, inicia-se a passagem do concreto para o abstrato e os dados empíricos são utilizados com as técnicas de dedução. Nesse caso, Maciel (2004) aponta que G2 corresponde aos níveis 2 e 3 do modelo Van Hiele.

Por fim, na G3, correspondente ao nível 4, a geometria se desprende totalmente da realidade, os alunos conseguem trabalhar com diferentes sistemas axiomáticos.

A transição entre G1 e G2 é o centro das discussões de Parzysz (2006), pois se trata da oposição físico/ teórico ou concreto/abstrato, verificada como um dos fatores geradores de dificuldades de aprendizagem em Geometria. Além disso, estes níveis fazem parte do ensino obrigatório nas escolas. Parzysz (2006) afirma que um dos objetivos do ensino da Geometria é possibilitar a passagem da geometria da observação para a geometria da demonstração.

É nessa transição que Parzysz (1988) propõe a dialética entre o *sabido* e o *percebido*. Em sua teoria demonstra preocupação com o domínio das representações, especialmente em relação à Geometria Espacial.

Para compreender essa dialética, é necessário, primeiramente definir o significado de alguns termos como *figura* e *desenho*. Parzysz (1988) conceitua figura geométrica como um objeto geométrico que pode ser definido por um texto, complementando que é uma ideia, uma criação da imaginação. A representação dessa figura pode ser um desenho, no âmbito bidimensional, ou um modelo/maquete, no âmbito tridimensional.

Assim, o autor diferencia três níveis de representação (Parzysz, 1988):

- Nível 0: a própria figura;
- Nível 1: representação próxima – transpõe a figura (abstrato) para uma representação de mesma dimensão (concreto);
- Nível 2: representação distante – a dimensão da representação é inferior a dimensão da figura.

Quando há uma movimentação de um nível inferior para um superior ocorre uma perda de informação. Isso acontece, pois nem todas as propriedades são passíveis de representação. Na passagem, do nível 0 para o nível 1, existem ainda as figuras ilimitadas, como a reta e o plano, que não podem ser representadas em sua totalidade, assim é preciso utilizar uma convenção matemática.

Para que esta convenção aconteça, as figuras dependem da cultura geométrica comum entre transmissor e receptor. Parzysz (1988) afirma que na maioria dos casos as figuras são reconhecidas corretamente por meio dos arquétipos, que apresentam desenhos visualmente reais.

Desse modo, o autor conclui que, mesmo na transição da figura para uma representação próxima há perdas de informação. Apesar dos altos índices de reconhecimento por meio dos arquétipos, a figura torna-se extremamente dependente da comunicação entre transmissor e receptor.

Para Parzysz (2006), na passagem do nível 0 para o nível 2 há uma perda ainda maior de informação. Ao representar um objeto tridimensional (sabido) na forma de um desenho bidimensional (visto), algumas propriedades ficam escondidas, além disso, a busca em representar as características visuais, com o uso de estratégias de perspectiva, traz deformação de propriedades. Para contemplar as propriedades é necessário “negociar” entre o visto e o sabido. Assim, esta dialética coexiste em busca de uma representação sintética do objeto.

Um desenho ou uma maquete não substitui a própria figura, a representação de qualquer nível precisa de pelo menos uma legenda para compensar a perda de informação inerente.

Pesquisas realizadas por Parzysz (1988) evidenciam que alunos ao representar uma pirâmide reta de base quadrada, utilizam isósceles não porque desejam representá-la de frente, mas porque julgam a forma importante para a caracterização do sólido. Portanto, demonstram iniciar a representação com uma visão do todo (visto) e

posteriormente podem inserir novas propriedades (sabido), assim não há mudanças de perspectivas e sim uma integração de conhecimentos.

Parzysz (1988) admite a importância do ensino explícito e sistemático para o uso de representações. Esta preocupação é reforçada ao relatar a dificuldade dos alunos em diferenciar a representação do objeto geométrico. Muitas vezes eles identificam as propriedades do desenho como sendo da própria figura.

Especialmente na Geometria espacial surgem dois problemas referentes às dificuldades geradas pela representação, a codificação e a decodificação da “mensagem”. No caso da decodificação, uma figura tridimensional que possua mesma representação de uma figura bidimensional pode ser confundida pelo receptor da “mensagem”. Desse modo, Parzysz (1988) relata a importância de iniciar com uma representação próxima, no caso de figuras tridimensionais utilizar maquetes/ modelos, a menos que os alunos estejam familiarizados com as propriedades das formas espaciais.

Parzysz (1988) completa que, é por meio das representações que os alunos criam a imagem mental, portanto essa dialética deve ser explicitada tanto para os alunos quanto para os professores.

As contribuições de Pais

Pais (1996) aponta quatro elementos essenciais no processo de ensino e aprendizagem da geometria euclidiana: objeto, desenho, imagem mental e conceito.

Para o autor, o objeto relaciona-se com o concreto, mais especificamente com modelos, maquetes ou materiais didáticos que possibilitam a identificação visual e associação dos conceitos geométricos trabalhados. O objeto caracteriza-se como uma forma primitiva, por estar mais acessível à sensibilidade humana. Aqui podemos comparar este objeto acessível com a representação próxima (nível 1) de Parzysz (1988) na Geometria Espacial.

Segundo Pais (1996), grande parte dos conceitos geométricos pode ser representada por objetos, desde os níveis de primeiro grau. Essa facilidade de “concretizar” o conceito traz preocupações, a manipulação dos objetos não pode limitar-se à atividade lúdica, é preciso que o professor planeje cuidadosamente o uso dos materiais e que se baseie em uma fundamentação teórica, para contribuir para uma aprendizagem real. O aluno deve compreender que o objeto é apenas um modelo físico, que não substitui a figura, mas que possibilita a construção de ideias sobre ela.

Tal facilidade não pode permitir a existência apenas da Geometria concreta. Assim como Parzysz (1988), Pais (1996) afirma que a transição do concreto para o abstrato é o grande desafio do ensino da Geometria.

Igualmente, o desenho assume a natureza concreta, porém com maior complexidade no caso da Geometria Espacial. Pais (1996), corroborando a teoria de Parzysz (1988; 2006), aponta o uso da perspectiva como dificuldade dos alunos ao construir os conceitos espaciais, essencialmente quando não possuem imagens mentais necessárias para a decodificação da técnica de perspectiva. Bonafe (1988, apud PAIS,

1996) destaca que a produção ou leitura (codificação ou decodificação) de desenhos pode emergir obstáculos de aprendizagem.

Pais (1996) relata que, procedimentos indispensáveis à decodificação, não são explicitadas no nível no Ensino Fundamental. No caso dos livros didáticos, os desenhos aparecem mais baseados em uma tradição do que na aprendizagem formal dos conceitos.

Na Geometria Plana, o desenho não surge com tal complexidade, pois não exige a transposição de dimensões. Porém, ao representar uma figura plana por meio de desenhos, os alunos confundem conceito e representação.

Outro elemento mencionado por Pais (1996) é a *imagem mental* que se difere dos outros dois termos por ser de natureza abstrata e subjetiva.

A imagem mental se relaciona ao conceito devido seu caráter abstrato e pode ser identificada quando o indivíduo consegue expor, descritivamente, as propriedades de um objeto ou desenho sem tê-los em mãos. Pais (1996) expõe que durante o processo de aprendizagem, estimulado pelos desenhos e objetos, as imagens mentais são ampliadas quantitativa e qualificativamente. Assim pode-se declarar que a imagem mental constitui outra forma de representação. Obviamente, tal representação se configura com maior complexidade que o desenho e objeto, além disso, “permite uma utilização muito mais rápida e eficiente” (PAIS, 1996, p.70)

O conceito geométrico também se encontra no campo abstrato, sua construção acontece gradualmente, necessitando do mundo físico e da reflexão sobre ele. Para Pais (1996, p. 71) “a representação de um conceito somente faz sentido pleno se o mesmo já estiver num certo nível de formalização”.

A dialética entre o abstrato e o concreto, tão discutida por Pais (1996), Parzys (1988) e Van Hiele (apud CROWLEY, 1994), denota dificuldades dos alunos em diferenciar as representações, de qualquer natureza, do conceito. É nesse ponto que o aluno assume o desenho de um “traço” na lousa como uma reta, embaralhando conceito e representação, conforme citado anteriormente.

Relacionando esses quatro elementos básicos da aprendizagem geométrica com a teoria Epistemológica de Gonseth (1945, apud PAIS, 1996), verifica-se que a imagem mental, com seu caráter subjetivo, aproxima-se da *Intuição*, mas não possibilita a validação de conhecimentos. Os desenhos e objetos conectam-se com a natureza *experimental*, servindo de apoio às construções geométricas, entretanto não se configuram como próprias noções geométricas. Contudo, as bases intuitivas e experimentais são essenciais para a construção do conhecimento das teorias geométricas, que constituem os conceitos.

O desenvolvimento do pensamento geométrico nos anos iniciais

Clements et al. (1999), Hannibal (1999) e Clementes e Sarama (2011), psicólogos cognitivos americanos, buscaram preencher lacunas da teoria piagetiana e do modelo Van Hiele, destacando que os estudos de Piaget não foram fundamentados em contexto educacional e que o modelo Van Hiele, assim como em pesquisas posteriores, apesar de

manter o foco na questão educacional, não tratou de crianças pequenas. Assim, realizaram pesquisas com o objetivo de analisar a construção de conceitos geométricos específicos pelas crianças pequenas.

Foi constatado que, na medida em que as crianças vão crescendo aumenta a constância das decisões. Enquanto crianças de 4 e 5 anos alternavam suas escolhas na semana seguinte, as crianças de 6 anos mantinham suas decisões com maior frequência (HANNIBAL, 1999). Assim, é preciso atentar-se à maneira como os conceitos estão sendo tratados nos anos iniciais.

Ao explicitarem as justificativas de suas escolhas, quando questionadas pelo pesquisador, as crianças tenderam a corrigir suas decisões. Desse modo, os resultados foram diferentes quando foram questionadas pelo pesquisador e quando realizaram as propostas sozinhas.

Embora as crianças de 6 anos de idade tenham demonstrado estabilidade em suas decisões, ainda não possuem os conceitos completamente precisos. Na pesquisa relatada, nenhuma criança desta idade conseguiu categorizar todas as formas corretamente, frequentemente deram mais valor aos atributos não geométricos do que aos geométricos. (HANNIBAL, 1999).

Hannibal (1999) sugere que os professores devem orientar as crianças em relação aos atributos geométricos e não geométricos, em vez de apenas nomear as formas e apresentar protótipos. Também precisam esclarecer vocabulários antes de finalizar definições. Além disso, aponta a importância da verbalização da criança sobre seu raciocínio no momento de categorização, o que possibilitará a avaliação do professor e a própria organização do pensamento da criança.

Outro ponto que precisa ser discutido na opinião da autora é a introdução das categorias das formas nos anos iniciais. Normalmente, os professores dos anos iniciais apresentam quatro categorias: o quadrado, o círculo, o triângulo e o retângulo. Tal apresentação gera conflitos na categorização dos quadriláteros, especialmente na compreensão da inclusão de classes. “A ideia de que um quadrado não é um retângulo é firmemente enraizada aos 5 anos de idade, assim como nenhuma criança de cinco ou seis anos deste estudo aceitaria o quadrado como sendo um retângulo.” (HANNIBAL, 1999, p. 356, tradução nossa)

A pesquisa de Clements et al. (1999) com 97 crianças – entre 3,6 e 6,9 anos de idade – mostra que as crianças de 4 anos de idade eram mais propensas a identificar quadrados como retângulos do que as mais velhas. Os pesquisadores procuram justificar este resultado com a possibilidade das crianças de 4 anos não possuírem um protótipo de retângulo fixado, ou por não possuírem percepção da igualdade de lados.

Kay (1987 apud CLEMENTS et al., 1999) iniciou a apresentação das categorias de outra forma, primeiro apresentou os quadriláteros, depois os retângulos e por fim os quadrados. Em cada etapa abordou as características relevantes das categorias e suas relações de hierarquia, além de ir incorporando os termos (nomeando, por exemplo, de quadrado-retângulo). Com essas instruções a maioria das crianças, de primeiro ano, identificou características dos quadriláteros e metade delas apontou relações hierárquicas.

Clements e Sarama (2011), baseando-se nos resultados dessas pesquisas citadas, discutem a apresentação do quadrado como grupo isolado, que pode bloquear a transição das crianças para o pensamento categorial. Os pesquisadores afirmam que o desmembramento de retângulos e quadrados é típico da Educação Infantil nos Estados Unidos, mas que também percebemos no Brasil.

Diferentemente, no Leste da Ásia, como no experimento de Kay (1987 apud Clements et. al., 1999) as crianças têm o primeiro contato com “formas de quatro lados” para depois conhecerem as “formas de quatro lados iguais”.

Além disso, Clements e Sarama (2011) investigam as implicações da linguagem na construção dos vocabulários e conceitos, fazendo outra comparação entre os Estados Unidos e o Leste da Ásia. Os autores relatam que os nomes das formas, nos idiomas do Leste da Ásia, têm ligação direta com os conceitos, facilitando assim a relação entre a forma e suas propriedades. Os “quadriláteros” (*quadrilateral* em inglês), por exemplo, são chamados de “forma de quatro lados” e o “paralelogramo” (em inglês *parallelogram*) é nomeado como “forma de quatro lados paralelos”.

A pesquisa de Clements et al. (1999) assim como a de Hannibal (1999) investigou os critérios utilizados pelas crianças ao categorizar formas, entretanto a pesquisa incluiu outras formas além dos retângulos e triângulos, como por exemplo o círculo. As 97 crianças foram divididas em três grupos por aproximação da faixa etária.

Além da constatação acerca do conhecimento das crianças sobre a inclusão de classes, percebeu-se que as crianças identificaram círculos e quadrados com mais facilidade do que retângulos e triângulos. Entretanto, encontraram dificuldade para descrever o círculo, utilizaram o termo “parece com” buscando referências em protótipos visuais. Segundo Clements et al.(1999), essa facilidade de reconhecimento de formas mais simétricas (quadrados e círculos) acontece devido à pouca variedade de protótipos e, conseqüentemente à maior precisão em sua identificação. As demais formas, como retângulos e triângulos, são menos definíveis com protótipos, devido à variedade existente.

Os resultados dessas pesquisas (CLEMENTS et. al., 1999; HANNIBAL, 1999; CLEMENTS, 2011) também trazem implicações teóricas acerca do modelo Van Hiele. Com base nos dados, os pesquisadores afirmam a existência de um nível anterior ao nível visual de Van Hiele, descrito anteriormente. Nesse nível, chamado por eles de pré-cognitivo, as crianças não conseguem distinguir, de forma confiável, os círculos, quadrados e triângulos de outras formas, pois estão iniciando a formação de esquemas, ainda inconscientemente. Quando estão começando a fazer tal distinção devem ser considerados em transição do nível pré-cognitivo para o nível visual.

Outra implicação teórica apontada nessas pesquisas é a “reconceitualização” do nível visual de Van Hiele. Os autores afirmam a alta utilização de respostas visuais das crianças neste nível. No entanto, surgem evidências de reconhecimento de atributos e propriedades geométricas, mesmo não definidas claramente, além da correspondência com protótipos visuais. Desse modo, o nível proposto por Van Hiele é mais sincrético do que visual, sendo uma síntese do declarativo verbal e do conhecimento visual.

No nível sincrético, as crianças usam mais facilmente o conhecimento declarativo para explicar porque uma figura em particular não é um membro de uma classe, pois o contraste entre a figura e o protótipo visual provoca diferenças nas descrições. (GIBSON, 1985 apud CLEMENTS et. al., 1999, p. 206)

Os pesquisadores ainda afirmam que na transição do nível sincrético para o próximo nível ocorrem conflitos entre os protótipos e a análise das propriedades. Assim podemos relacionar esses conflitos com os mesmos apontados por Parzysz (1988), ao referir-se a necessidade do diálogo entre o visto e o sabido.

Algumas considerações

As teorias e pesquisas referidas nesse artigo trazem termos e características diferentes para cada etapa do desenvolvimento do pensamento geométrico, assim como cada uma traz um novo foco sobre o processo de aprendizagem.

Entretanto, todas elas indicam que a aquisição das relações geométricas pelas crianças inicia-se com a observação e a experimentação, especialmente Piaget e Inhelder (1993), Pires, Curi e Campos (2012) e Curi e Vece (2013) que tratam especificamente das primeiras noções para o desenvolvimento do pensamento geométrico.

No quadro abaixo apresentamos as principais contribuições destas pesquisas relacionadas à orientação espacial que podem auxiliar a prática docente:

Principais contribuições – Orientação espacial	
Autores	Contribuições
Piaget e Inhelder (1993)	Embora a teoria piagetiana não tenha o foco na educação, as pesquisas mostram como as relações espaciais são construídas desde o plano perceptivo até o plano representativo. Compreender as relações topológicas, projetivas e euclidianas envolvidas neste processo possibilita a proposição de boas situações de aprendizagem, adequadas às estruturas que precisam ser incentivadas nos anos iniciais. Além disso, direciona o olhar do professor para o desenvolvimento das noções espaciais da criança, auxiliando-o nas intervenções que podem ampliar as relações.
Pires, Curi e Campos (2012)	Com o foco voltado para a prática educativa, as autoras ampliam o olhar para o ensino da geometria, enfatizando a importância do trabalho com a orientação espacial. O esclarecimento sobre o papel da experimentação e da manipulação de objetos físicos para o desenvolvimento do pensamento geométrico pode evitar a redução simplista do uso dos materiais manipuláveis na prática docente. Além disso, o destaque para o próprio corpo da criança como ponto de partida para o trabalho de orientação espacial, incluindo a lateralização e lateralidade, auxilia as escolhas do professor em relação as sequências de atividades que podem ser trabalhadas, sempre visando o avanço das percepções e

	reflexões sobre o espaço.
Curi e Vece (2013)	<p>É certo que existem muitas lacunas no ensino de Geometria, e ainda mais nas relações espaciais, possivelmente devido a formação dos próprios professores e da ausência de materiais que possam auxiliá-los.</p> <p>Desse modo, com o avanço nos estudos sobre as relações espaciais, as autoras norteiam o trabalho do professor para as três competências fundamentais.</p> <p>Tais competências mostram que o trabalho com representações do espaço/movimentações no espaço precisa ser precedido da oralidade. Além disso, para que os alunos possam construir representações, precisam ter um bom repertório, conseguindo ler e interpretar as representações apresentadas à eles.</p> <p>Tendo em vista a importância das três competências, o professor poderá apresentar diferentes situações de aprendizagem como objetivos claros.</p>

As demais pesquisas sintetizadas neste artigo referem-se ao conhecimento das figuras geométricas.

No modelo Van Hiele (apud CROWLEY, 1994) e na teoria de Parzysz (1988, 2006) são apresentadas etapas de aprendizagem de forma hierárquica. Enquanto Van Hiele define o primeiro contato com o conhecimento geométrico como “visualização” (Nível 1), Parzysz nomeia como G0, “geometria concreta”, em que o aluno tem apenas a visão global do objeto. Do mesmo modo, as etapas posteriores, de ambas as teorias, podem ser correlacionadas.

Clements et al. (1999), Hannibal (1999) e Clementes e Sarama (2001) ampliam ainda mais a discussão sobre a progressão do conhecimento geométrico. Os pesquisadores realizaram experiências com crianças da Educação Infantil e dos anos iniciais do Ensino Fundamental. Os autores apontam a influência dos protótipos visuais e da linguagem no desenvolvimento do pensamento geométrico, além de sugerirem uma fase anterior às apresentadas por Van Hiele e “reconceituarem” o Nível 1, nomeado *visualização*.

É importante destacar que cada pesquisa traz a sua contribuição para compreendermos como o pensamento geométrico se desenvolve. Desse modo, apresentamos o quadro a seguir com a comparação das etapas das pesquisas citadas e as características desse processo.

Etapas do desenvolvimento do pensamento geométrico			
Van Hiele (apud CROWLEY, 1994)	Parzysz (1988;2006)	Clements et al. (1999) Hannibal (1999) e Clements e Sarama (2011)	Características
-	-	Pré-cognitivo	Não há distinção de figuras planas de forma confiável. Formação de esquemas inconscientemente.
Nível 0 Visualização	G0 Concreta	Nível sincrético (verbal e visual)	Uso do declarativo verbal e dos protótipos visuais para explicitar atributos geométricos e não geométricos (cor, material etc.) com base na aparência global.
Nível 1 Análise	G1 Espaço-gráfica	-	Análise das figuras a partir das características percebidas. A visualização não é apenas global, passa a abarcar as partes da figura. É possível representar objetos no papel, partindo do concreto.
Nível 2 Dedução informal	G2 Espaço-gráfica	-	Significação das definições e das relações entre propriedades de diferentes figuras. Argumentação informal para inclusão de classes e acompanhamento de demonstrações. Início da passagem do concreto para o abstrato
Nível 3 Dedução Formal	G2 Proto-axiomática	-	Compreensão de axiomas, postulados, teoremas e definições. Domínio das demonstrações e do processo dedutivo.
Nível 4 Rigor	G3 Axiomática	-	Compreensão da geometria não euclidiana. Comparação de teoremas em diferentes sistemas.

Apesar das críticas relatadas por alguns autores sobre a utilização de fases, etapas ou níveis para compreender a construção das relações geométricas, devido a contradição com o processo não linear da aprendizagem das crianças, acreditamos que tais etapas nos mostram como o conhecimento é construído, de onde partir para atingir os objetivos pretendidos e como escolher intervenções adequadas ao momento da criança.

O grande desafio do ensino da Geometria encontra-se na transição das fases, ou seja, avançar no conhecimento concreto/perceptivo - com objetos físicos, obtido no mundo físico - para o conhecimento abstrato - com objetos teóricos e suas representações. E assim, diferenciar as representações físicas dos conceitos.

Pais (1996) assume a importância das representações para a construção dos conceitos geométricos e traz definições de quatro elementos, o objeto, o desenho, a imagem mental e o conceito. Assim, esclarece termos usados na Geometria. O autor ainda relata sua preocupação com o uso das representações nos livros didáticos e na ação dos professores, devido a reduções simplistas dos conceitos às suas representações, que podem colaborar para a frequente confusão entre representação e conceito.

Considerando que as representações são fundamentais para a construção dos conceitos, o professor deve atentar-se à maneira em que as representações são apresentadas, se os alunos compreendem as mensagens codificadas pelo transmissor e validar o diálogo entre o visto e o sabido.

Enfim, as discussões propostas pelos autores enriquecem o olhar para o ensino da Geometria e nos ajudam a identificar lacunas e possíveis causas das dificuldades de aprendizagem.

Além disso, a pesquisa bibliográfica nos permite perceber a evolução dos estudos acerca da construção dos conhecimentos geométricos e conseqüentemente a necessidade de atualização constante dos professores. A apropriação destas informações obtidas em pesquisas é essencial para a melhoria no ensino de Geometria nos anos iniciais.

Referências

BRASIL, Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental: Matemática**. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEE, 1997.

CLEMENTS, D. et. al. Young children's concept of shape. **Journal for Research in Mathematics Education**, v. 30, n. 2, p. 192-212, 1999.

CLEMENTS, D. H.; SARAMA, J. Early childhood teacher education: the case of geometry. **Journal of Mathematics Teacher Education**, v. 14, p. 113-148, 2011.

CROWLEY, L. M. O modelo Van Hiele de desenvolvimento do pensamento geométrico. In: LINDQUIST, M. M.; SHULTE, A. P. (Org.). **Aprendendo e ensinando geometria**. São Paulo: Atual, 1994. p. 1-20.

CURI, E. O currículo prescrito e avaliado pelo SAEB no que se refere ao tema relações espaciais: algumas reflexões. In: CURI, E.; VECE, J. P. (Org.). **Relações espaciais: práticas educativas de professores que ensinam Matemática**. São Paulo: Terracota, 2013.

CURI, E., VECE, J. P. **Relações espaciais: práticas educativas de professores que ensinam Matemática**. São Paulo: Terracota, 2013.

HANNIBAL, M. Young Children's Developing Understanding of Geometric Shapes. **Teaching Children mathematics**, v. 5, n. 6, p. 353-357, 1999.

JAIME, A.; GUTIÉRREZ, A. Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: El modelo de Van Hiele. In: LLINARES S.; SÁNCHEZ, M.V.(Ed.). **Teoría y Teoría y práctica en educación matemática**. Sevilla: Alfar, 1990. p. 295-384. (colección "Ciencias de la Educación" n° 4).

MACIEL, A. C. **O conceito de semelhança: uma proposta de ensino**. 2004. 261 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2004.

MORAES, J. M. **Construção de conceitos geométricos num contexto de formação inicial de professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental**. 2008. 206f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade de Brasília, Brasília, 2008.

NASCIMENTO, J. C. P.; FERNANDES, M. J. A importância da contextualização no ensino das relações espaciais nos anos iniciais do ensino fundamental. In: CURI, E.; VECE, J. P. (Org.). **Relações espaciais: práticas educativas de professores que ensinam Matemática**. São Paulo: Terracota, 2013.

PAIS, L. C. Intuição, experiência e teoria geométrica. **Revista Zetetiké**, v. 4, n. 6, p. 65-74, jul/dez 1996.

PARZYSZ, B. "Knowing" vs "Seeing". Problems of the Plane Representation of Space Geometry Figures. **Educational Studies in Mathematics**, v. 19, n. 1, p. 79-92, 1988. Disponível em: <<http://www.jstor.org/stable/3482201>> Acesso em: 08 abr. 2013.

_____. A geometria no ensino secundário e na formação de professores para séries iniciais: do que se trata? In: **Quaderni di Ricerca in Didática**, n. 17. Tradução de Coutinho e Almouloud, 2006.

PIAGET, J.; INHELDER, B. **A representação do espaço na criança**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1993.

PIRES, C. M. C. **Educação Matemática: conversas com professores dos anos iniciais**. São Paulo: Zapt Editora, 2012.

PIRES, C. M. C.; CURI, E.; CAMPOS, T. M. **Espaço & forma: a construção de noções geométricas pelas crianças das quatro séries iniciais do Ensino Fundamental**. São Paulo: PROEM, 2012

ZAMBON, A. E. C. **A Geometria em Cursos de Pedagogia da Região de Presidente Prudente-SP**. 2010. 186 f. Dissertação (Mestrado) - Faculdade de Ciências e Tecnologia de Presidente Prudente – FCT/UNESP, Presidente Prudente/SP, 2010.

Submissão: 01/08/2014
Aceite: 10/12/2014