

# MODELAGEM MATEMÁTICA NO GEOGEBRA: UMA ANÁLISE A PARTIR DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

## MATHEMATICAL MODELING IN GEOGEBRA: NA ANALYSIS BASED ON SEMIOTIC REPRESENTATION REGISTERS

**Odalea Aparecida Viana**

Universidade Federal de Uberlândia, odalea@pontal.ufu.br

**Carlos Eduardo Petronilho Boiago**

Universidade Federal de Uberlândia, cadu\_matematica@hotmail.com

### Resumo

O trabalho visa apresentar a modelagem matemática de logotipos como atividade matemática que envolve a identificação e a construção de figuras – em papel e por meio do software GeoGebra – e também cálculos de áreas de figuras planas. Foram objetivos: apresentar as fases da modelagem matemática de logotipos; identificar as etapas do processo de solução de problemas e relacioná-las às fases da modelagem matemática e analisar as representações produzidas por um estudante do ensino médio, nestas fases. Utiliza aportes teóricos da psicologia acerca do processo de solução de problemas e das atividades cognitivas envolvidas na formação, tratamento e conversão dos registros de representação semiótica. Por envolver tais aspectos, considera-se que a modelagem matemática pode favorecer a compreensão de alguns conceitos e procedimentos referentes à geometria plana básica.

**Palavras-chave:** educação matemática, modelagem matemática, GeoGebra, geometria.

### Abstract

This text presents mathematical modeling of logos as a mathematical activity that involves identification and construction of figures with the use of paper and GeoGebra software, as well as calculation of areas and plane figures. The goals were: to present the phases of mathematical modeling of logos; to identify the stages of troubleshooting process and to relate them to the phases of mathematical modeling; and to analyze representations produced by a high school student in those phases. This work uses theoretical contributions of psychology about troubleshooting process and cognitive activities involved in formation, treatment and conversion of semiotic representation registers. Because of the mentioned aspects involved, it is considered that mathematical modeling can favors comprehension of some concepts and procedures related to basic plane geometry.

**Keywords:** mathematics education; mathematical modeling, GeoGebra, geometry.

## Introdução

Entre os vários conteúdos da matemática do ensino básico nos quais os estudantes apresentam dificuldades destacam-se os conceitos e procedimentos em geometria plana. Problemas que envolvem habilidades de visualização, bem como estabelecimento de relações entre propriedades das formas – além dos cálculos de áreas de figuras – nem sempre são resolvidos por estudantes do ensino médio.

Questões de provas oficiais, bem como de vestibulares, costumam trazer problemas de área envolvendo composição e decomposição de figuras, conforme pode ser visto na Figura 1.

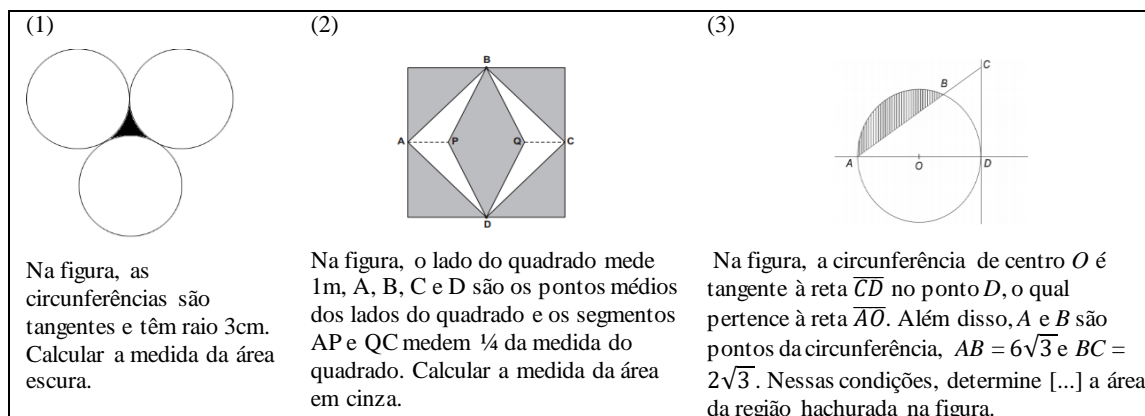


Figura 1 – Problemas de áreas de figuras planas

Fonte: Arquivo do autor

Nota-se, na Figura 1, que as áreas hachuradas constituem figuras que não são identificadas logo no início da resolução do problema: é necessário compor ou decompor as formas em figuras conhecidas a fim de determinar as medidas de lados e de ângulos.

A nossa experiência com aulas de geometria para estudantes do ensino médio mostra que é possível trabalhar conteúdos de geometria plana explorando as figuras geométricas que podem ser identificadas nas formas que diariamente são vistas pelos alunos nas telas do computador, nos anúncios na televisão e nos apelos visuais de propagandas: é o caso dos logotipos, símbolos que representam uma marca e que têm forte apelo visual nas chamadas publicitárias. Explorar a forma de um logotipo, determinar as medidas de lados e ângulos das figuras identificadas, representá-las e construí-las sistematicamente (no papel e na tela do computador) e também calcular as áreas das superfícies coloridas são procedimentos que se referem a um problema cujos processos de formulação e de solução podem ser associados à modelagem matemática.

A modelagem matemática enquanto metodologia de ensino tem sido defendida por vários autores, muitos tomando por base Bassanezi (2002) e Biembengut e Hein (2003), entre outros.

Na maioria das concepções adotadas para a modelagem matemática existe a descrição das fases do processo; entre estas, destaca-se a problematização da realidade e a busca do modelo matemático para dar respostas à indagação inicial. Na obtenção do modelo estariam envolvidos conceitos e procedimentos matemáticos que, preferivelmente,

seriam relativos à série ou ao ano escolar dos alunos envolvidos no processo, o que caracterizaria a modelagem como método de ensino de conteúdos.

Entende-se que a identificação das figuras geométricas que compõe o logotipo escolhido, a decomposição e a composição das formas, o encadeamento lógico de passos para a reconstrução do desenho mantendo a medida dos ângulos e a proporcionalidade dos lados (no papel e na tela do computador) e os cálculos das superfícies definidas pela imagem gráfica caracterizam o processo de modelagem matemática de logotipos.

Neste tipo de modelagem, o tratamento a ser dado às figuras geométricas do logotipo acaba se constituindo em um problema a ser resolvido. A revisão realizada por Malheiros (2012) indica uma carência de pesquisas sobre modelagem que consideram o conhecimento teórico já estabelecido acerca do processo de resolução de problemas. Neste trabalho, será utilizada a revisão feita por Brito (2006) acerca do processo de solução de problemas, na perspectiva da psicologia da educação matemática.

Conforme apontaram Bicudo e Klüber (2011), são vários os trabalhos de modelagem matemática que buscam compreender como a resolução de problemas, os modelos matemáticos, as investigações matemáticas e os conteúdos matemáticos podem ser trabalhados nas aulas; outros, se as atividades de modelagem matemática podem ser entendidas como ambientes de aprendizagem com computadores. Apesar da vasta literatura existente, não foram encontrados trabalhos que evidenciassem o tipo de problema sugerido pela modelagem matemática de logotipos aqui apresentada.

A experiência também tem mostrado que a percepção e a representação de figuras em uma composição aparentemente não geométrica demandam processos de pensamento ainda pouco estudados – principalmente quando as construções geométricas são feitas em softwares específicos. Na busca de entender alguns desses processos, optou-se por interpretar os desenhos e símbolos utilizados pelos alunos como registros de representação semiótica, na perspectiva de Raymond Duval.

A modelagem matemática de logotipos parece envolver atividades cognitivas importantes para a conceitualização em geometria: formação, conversão e tratamento desses registros, conforme indica a teoria (DUVAL, 2009, 2012). A construção dessas representações na tela do computador utilizando o GeoGebra requer procedimentos um tanto diferenciados, envolvendo processos cognitivos que merecem ser mais bem entendidos.

A articulação da Modelagem Matemática – enquanto metodologia para o processo de ensino e aprendizagem – com uma teoria de representações semióticas permite um melhor entendimento das conceitualizações necessárias para a resolução dos problemas levantados a partir das temáticas propostas, conforme propôs Burak e Brandt (2010). A breve revisão de literatura permitiu identificar vários trabalhos que buscaram compreender a aprendizagem da geometria por meio das representações semióticas (BURATTO, 2006; FLORES; MORETTI, 2006), mas não foram encontrados trabalhos que tratassem especificamente da solução de problemas geométricos envolvendo os procedimentos aqui elencados.

Assim, foram propostas as seguintes questões de pesquisa: é possível identificar as etapas do processo de solução de problemas e relacioná-las à fase da matematização da modelagem matemática, no âmbito restrito da modelagem de logotipos aqui apresentada? É possível analisar as representações dos alunos produzidas nessa fase como registros de representação semiótica?

## **Modelagem matemática e a resolução de problemas**

Para Barbosa, a “modelagem é um ambiente de aprendizagem no qual os alunos são convidados a indagar e/ou investigar, por meio da matemática, situações oriundas de outras áreas da realidade” (BARBOSA, 2001, p.6). Já Bassanezi (2002) esclarece que a modelagem matemática é a “arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real” (2002, p.16).

Neste trabalho, utilizar-se-á, inicialmente, a ideia de modelo matemático como sendo um conjunto de símbolos e relações matemáticas que procuram traduzir, de alguma forma, um fenômeno em questão ou problema de situação real. Biembengut e Hein (2003) indicam que o modelo, mesmo que de uma maneira simplificada, apresenta aspectos da situação pesquisada. A modelagem é, então, “o processo que envolve a obtenção de um modelo” (p.20). Complementando esta ideia, os autores consideram que a modelagem matemática tem o intuito de formular, resolver e elaborar expressões que valham não apenas para uma solução particular, mas que também sirvam, posteriormente, como suporte para aplicações de outras teorias.

O processo de obtenção do modelo envolve procedimentos que podem ser divididos em três etapas: a interação, a matematização e a validação do modelo matemático.

Na etapa de interação o modelador reconhece a situação problema e se familiariza com o assunto a ser modelado.

Na matematização, que pode ser subdividida entre formulação e resolução do problema, dá-se a ‘tradução’ do problema para uma linguagem puramente matemática. A formulação do problema envolve a identificação das informações, a seleção das variáveis relevantes envolvidas, a seleção de símbolos e formas de representação matemática. Isso implica em decidir quais os fatores a serem estudados; em levantar hipóteses; em selecionar as variáveis relevantes e as constantes envolvidas; selecionar símbolos apropriados para essas variáveis e descrever as relações em termos matemáticos. Já no processo de resolução do problema em termos do modelo, é necessário um maior conhecimento sobre as entidades matemáticas usadas na formulação.

A terceira etapa, a de validação do modelo matemático, é considerada por Biembengut e Hein (2003) como a fase de avaliação, em que é verificada a confiabilidade da utilização do modelo. É necessário, então, interpretar o modelo, analisar as implicações da solução analisada, retornar à situação estudada, avaliar a solução etc. Caso o modelo não atenda às necessidades que o geraram, o processo deve ser retomado na segunda etapa que é a da matematização, em que hipóteses são mudadas e variáveis são ajustadas.

Neste trabalho, tentou-se adaptar as etapas propostas pelos autores às fases da modelagem de logotipos, colocando-se foco nas etapas da matematização e da validação do modelo. A modelagem aqui proposta implica na obtenção de um modelo geométrico, a ser representado na tela do computador, que permita o cálculo das áreas das superfícies que compõem o logotipo escolhido pelo aluno.

Decompor o logotipo em figuras geométricas – e definir suas medidas de modo a sequenciar os passos da representação e permitir também os cálculos das áreas – envolve etapas semelhantes àquelas identificáveis no processo de solução de problemas. Na perspectiva cognitiva, Echeverria e Pozo (1998) definem a solução de problema como um processamento cognitivo direcionado para a transformação de uma determinada situação na busca de um objetivo quando nenhum método óbvio de solução está disponível; a mesma exige, de alguma forma, um processo de reflexão ou uma tomada de decisões sobre a sequência de passos a serem seguidos.

Com base em vários estudos da psicologia, Brito (2006) sintetizou as seguintes etapas do processo de solução de problemas, comentadas a seguir:

- a) compreensão do texto: habilidade verbal que permite ler e compreender o problema para entender a natureza matemática do mesmo;
- b) representação do problema: imagem mental que se forma a partir do momento em que o sujeito recebe uma informação, organiza e a transforma em uma representação coerente (codificação e retenção);
- c) categorização do problema: em que o mesmo pode ser classificado em um determinado tipo, ou relativo a um determinado conteúdo;
- d) estimativa de solução: quando, por exemplo, é possível apresentar um resultado numérico com valor aproximado ao da solução correta;
- e) planejamento de solução: em que podem ser planejadas as estratégias, técnicas e/ou algoritmos que serão empregados;
- f) monitoramento do procedimento: que pode conduzir a uma mudança nos objetivos ou nas estratégias;
- g) monitoramento do resultado: que pode ser entendido como validação dos resultados e
- h) resposta: que pode levar o sujeito a uma nova leitura da proposição do problema e compreensão do texto.

Evidentemente, o processo de solução do problema obtido na fase de matematização – na perspectiva da modelagem de logotipos – merece descrição mais atenta, uma vez que todas as etapas anunciadas (em especial aquela da representação) envolvem processos cognitivos conhecidos no âmbito da psicologia da educação matemática.

### **A teoria dos registros de representações de semiótica.**

A noção de representação<sup>1</sup> é fundamental para o estudo dos fenômenos relativos ao conhecimento e, de acordo com Duval (2009), “não há conhecimento que não possa ser mobilizado por um sujeito sem uma atividade de representação” (pág. 29).

O autor esclarece a importância de notações, de símbolos, de traçados e de figuras representando objetos matemáticos, no entanto adverte que estes não devem ser confundidos com a sua representação: esta distinção entre um objeto e sua representação é, portanto, um ponto estratégico para compreensão da matemática.

Buscando elementos que caracterizam o pensamento matemático, Duval (2012) diferencia – apesar de não colocá-las em domínios distintos – as representações mentais das representações semióticas:

As representações mentais pautam-se num conjunto de imagens, e mais globalmente, as conceitualizações que um indivíduo pode ter sobre um objeto, sobre uma situação e sobre o que lhe é associado. As representações semióticas são produções constituídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representação que possui inconvenientes próprios de significação e de funcionamento (p.269).

De acordo com o autor, as representações semióticas (figuras, gráficos, escrituras simbólicas, língua natural, etc...) são, muitas vezes, consideradas como um simples meio de exteriorização de representações mentais para fins de comunicação com o intuito de tornar uma informação visível ou acessível para outrem. Rompendo com esta ideia, o autor justifica que as representações semióticas não estão subordinadas às representações mentais e são, ainda, essenciais à atividade cognitiva do pensamento: elas desempenham um papel primordial no desenvolvimento das representações mentais (muitas representações mentais são representações semióticas interiorizadas), na realização de diferentes funções cognitivas e na produção de conhecimentos.

Com intuito de esclarecer as relações existentes entre os registros de representação semiótica e as representações mentais, o autor define dois conceitos: a *semiósis* – apreensão ou a produção de uma representação semiótica – e a *noésis* – atos cognitivos como, por exemplo, a apreensão conceitual de um objeto matemático. O mesmo pontua que não há *noésis* sem *semiósis*, ou seja, são necessárias uma pluralidade de sistemas e a coordenação destes por parte do sujeito. (DUVAL, 2009).

Para que um sistema semiótico seja um registro de representação, ele necessita atender às características das três atividades cognitivas fundamentais ligadas à semiose: formação, conversão e tratamento de uma representação.

A formação diz respeito ao modo de produção da representação de um registro dado (enunciação de uma frase, composição de um texto, desenho de uma forma geométrica, elaboração de um esquema, expressão de uma fórmula, dentre outras). O tratamento de uma representação é a transformação desta representação internamente, utilizando regras

---

<sup>1</sup> Duval (2009) apresenta a noção de representação em três momentos da história da psicologia: a de oposição entre o plano da ação e o da representação (estudos piagetianos), a de representação interna ou computacional (como uma codificação de uma informação) e a de representação semiótica, relativas a um sistema particular de signos que pode ter significações diferentes para o sujeito que as utiliza.

de funcionamento, ou seja, dentro de um mesmo registro semiótico em que esta foi formada. Há regras de tratamento próprio a cada registro e o autor exemplifica que, na geometria, um tipo particular de tratamento com figuras é o de reconfiguração. Finalmente, a conversão de uma representação é a transformação desta função em outro registro, conservando a totalidade ou uma parte apenas do conteúdo da representação inicial; esta seria uma transformação externa a um registro dado, por exemplo, a figura, a tradução de um texto de uma língua para outra, a descrição, etc.

Na aprendizagem da matemática escolar, Duval (2012) afirma que “as transformações de representações em outras transformações semióticas estão no coração da atividade; as dificuldades dos alunos para compreender matemática surgem por conta da diversidade e complexidade dessas transformações” (pág. 266).

O autor evidencia que a conversão é uma atividade cognitiva diferente e independente do tratamento; ela exige que as unidades significantes propostas para cada registro sejam bem discriminadas. A conversão não deve ser confundida nem com a codificação nem com a interpretação – apesar de essas atividades estarem próximas.

Duval (2012) esclarece que a evolução do conhecimento, de modo geral, está relacionada à criação e ao desenvolvimento de sistemas semióticos. Assim, a conceitualização implica na coordenação de ao menos dois registros de representação, na atividade cognitiva de conversão.

No trabalho com a geometria, as figuras geométricas são as formas mais comuns de representação dos conceitos. Duval (2012) define dois níveis de apreensão das figuras: no primeiro, o sujeito reconhece as diferentes unidades dentro de uma figura (unidades figurais); no segundo, são efetuadas as modificações mereológicas e óticas ou posicionais das unidades figurais reconhecidas e da figura dada.

Nesse trabalho, pretende-se analisar as representações de um estudante produzidas na modelagem matemática como registros de representação semiótica.

## **Objetivos, Metodologia, Procedimentos**

Este trabalho teve como objetivos: (a) apresentar as fases da modelagem matemática de logotipos; (b) identificar as etapas do processo de solução de problemas e relacioná-las às fases da modelagem matemática; (c) analisar as representações produzidas por um estudante, nestas fases.

A análise pretendida<sup>2</sup> originou-se a partir de uma experiência vivenciada junto a alunos de um instituto federal de ciência e tecnologia, com idades variando entre 14 e 16 anos e matriculados no segundo ano do ensino médio na cidade de Ituiutaba, MG. O trabalho, realizado como parte das atividades da disciplina matemática, caracteriza a chamada “pesquisa do professor” – amplamente discutida por docentes envolvidos com os mestrados profissionais na área de ensino, conforme aponta Carneiro (2008). Diferente da pesquisa científica – que tem a preocupação com a originalidade, a validade e o

---

<sup>2</sup> A pesquisa faz parte dos estudos desenvolvidos junto ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Federal de Uberlândia.

reconhecimento por uma comunidade científica – a pesquisa do professor tem caráter mais instrumental e utilitário, visando a melhoria das práticas pedagógicas (CARNEIRO, 2008).

As atividades foram desenvolvidas na forma de seis encontros de cinquenta minutos cada, realizados em horário extra turno regular, nas dependências da instituição de ensino. A cada ação realizada, os alunos registravam os apontamentos em seus cadernos, chamados de diários de bordo. Um desses cadernos, em que o aluno registrou os passos para a obtenção do modelo referente ao logotipo da empresa Android, foi tomado, por conveniência, como um dos instrumentos para coletar os dados da pesquisa. Além destes registros, o pesquisador acompanhou e se apropriou das imagens visualizadas na tela do computador – produzidas pelo estudante quando reproduzia o modelo por meio do software GeoGebra.

As fases da modelagem matemática serão descritas de modo a identificar as características apontadas por Biembengut e Hein (2003). Já os desenhos do aluno, feitos no papel ou produzidos no computador, serão interpretados como registros de representação semiótica, sendo identificadas e descritas algumas formas de tratamento e conversão, conforme Duval (2009).

No primeiro encontro, o professor esclareceu os objetivos do trabalho e apresentou o símbolo do Google Drive (Figura 2-a), solicitando que eles identificassem elementos de geometria na figura, verbalizando as suas descobertas. Após uma série de discussões acerca das formas identificadas, surgiu a necessidade de os alunos desenharem, a lápis, um esboço das formas que eles conseguiram visualizar. Neste momento, o professor propôs alguns questionamentos sobre as principais propriedades das formas identificadas: triângulo e paralelogramo, buscando evidenciar as medidas de lados e de ângulos. Foram, então, calculadas as áreas das figuras identificadas.

No segundo encontro, os alunos aprenderam noções básicas de como utilizar o *software* GeoGebra<sup>3</sup> e representaram a arte final do logotipo (Figura 2-b).

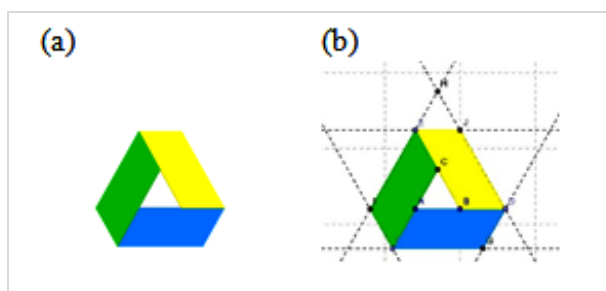


Figura 2 – Logotipo do Google Drive (a) e reprodução no GeoGebra (b).

Fonte: Arquivo do autor

Foi solicitado, para o encontro seguinte, que os alunos trouxessem um logotipo, ou seja, uma figura plana que eles quisessem modelar.

No terceiro encontro, de posse dos logotipos escolhidos, os alunos foram orientados a desenvolver as mesmas etapas da modelagem que fora feita coletivamente.

<sup>3</sup> O GeoGebra é um software livre que aborda assuntos da Geometria, da Álgebra e do Cálculo. Ele possui duas janelas de trabalho: a janela de álgebra e a janela geométrica; nesta, ocorrem as construções geométricas.



Evidentemente, a obtenção do modelo foi, em algumas situações, orientada pelo professor, já que nem sempre as figuras geométricas eram reconhecidas, principalmente quando partes delas deviam ser compostas para formar a figura total.

No quarto e no quinto encontro, o professor auxiliou os alunos no processo de identificação de formas, na descrição das principais propriedades e no cálculo da área das figuras geométricas identificadas. No sexto encontro houve a conferência dos cálculos e os alunos iniciaram os procedimentos para reproduzir os desenhos no GeoGebra, de modo a compor a arte final. Apesar de os alunos estarem familiarizados com o software, foram evidentes algumas dificuldades em definir a sequência de construções.

As produções de um dos estudantes são analisadas a seguir.

## **Análise e discussão**

### *A primeira fase: problematizando a realidade e escolhendo o logotipo*

Essa primeira fase é caracterizada pela escolha do logotipo. A pesquisa foi feita em sites da internet, em material impresso, na visualização de fotos de cartazes e de painéis de propaganda etc. O estudante escolheu o logotipo da empresa Android, que tem a forma de um boneco.

Entende-se que nessa fase o aluno buscava situações oriundas da realidade; estas não se constituíam, ainda, em um problema a ser resolvido, conforme indicação de Bassanezi (2002). O estudante sabia, no entanto, que os logotipos seriam utilizados para identificar figuras geométricas e posteriormente realizar cálculos das respectivas áreas<sup>4</sup>; ou seja, já estava, de antemão, familiarizado com o conteúdo a ser utilizado na obtenção do modelo (BIEMBENGUT; HEIN, 2003). Seria criado, dessa forma, um ambiente de aprendizagem, conforme indicação de Barbosa (2001).

### *A segunda fase: matematizando a realidade e transformando o logotipo em um problema*

A partir da escolha do logotipo, o mesmo foi impresso e o aluno passou a identificar as possíveis formas geométricas que comporiam o modelo.

No processo de modelagem, de acordo com Biembengut e Hein (2003), a etapa da matematização pode ser subdividida entre formulação e resolução do problema, em que se dá a 'tradução' do problema para uma linguagem puramente matemática. No caso da modelagem de logotipos, parece que a formulação e a resolução compartilham processos simultâneos: a própria identificação das formas já se constitui na formulação e da solução de parte do problema. Esclarecendo melhor, não há como identificar as figuras geométricas presentes na composição do logotipo se não forem traçadas estratégias para decompor as formas – e, para isso, utilizar os conceitos geométricos aprendidos.

---

<sup>4</sup> Os alunos foram orientados a não escolher logotipos muito complexos, ou seja, aqueles em que teriam dificuldades para identificar as figuras geométricas.

Segue-se a descrição de alguns processos cognitivos envolvidos nas subfases identificadas.

### Subfase da identificação das formas

Tentando compreender os processos cognitivos envolvidos nesta fase de identificação das formas, buscou-se fundamentação nas etapas de solução de problemas, conforme indicação de Brito (2006). A identificação das formas tem características da etapa de representação de um problema: o sujeito forma uma imagem mental – a partir da percepção visual – e tende a organizá-la para representá-la externamente de maneira coerente.

Evidentemente, a coerência necessária diz respeito à identificação de formas geométricas, já que os alunos sabiam que a interpretação do logotipo se daria no âmbito da geometria. Assim, a etapa de categorização do problema – em que o mesmo pode ser classificado em um determinado tipo, ou relativo a um determinado conteúdo – já fora antecipada: o que se fazia necessário, nesse momento, era identificar, entre as formas geométricas conhecidas, aquelas que, no todo ou partes, poderiam ser utilizadas para representar, ainda que não plenamente, o logotipo escolhido. A Figura 3 mostra o logotipo Android seguido de alguns registros feitos pelo aluno, em seu diário de bordo.

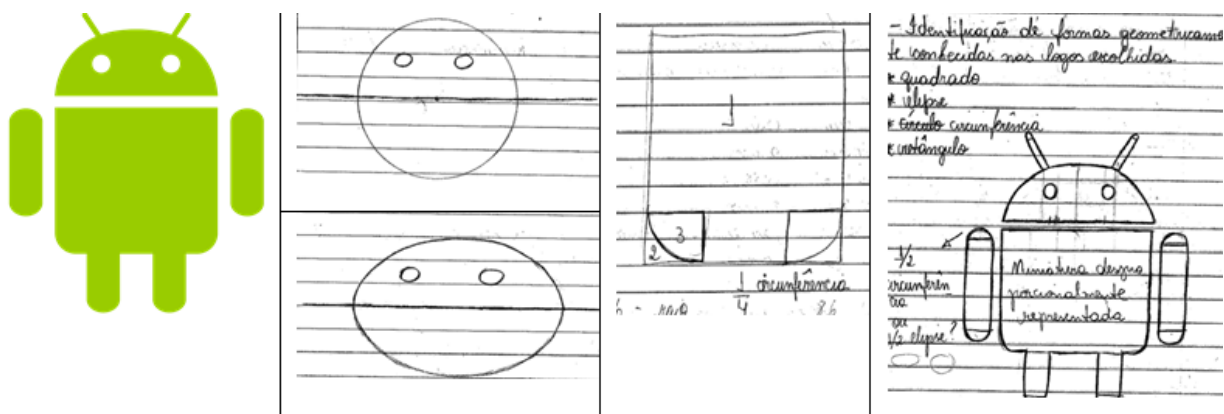


Figura 3. Logotipo Android e os registros da subfase de identificação das formas geométricas.  
Fonte: Arquivo do autor

Conforme pode ser verificado na Figura 3, o aluno tentava interpretar o desenho do logotipo como uma composição de figuras geométricas: era necessário apreender esse conjunto – a princípio na forma perceptiva – e notar que a reprodução do mesmo dependia das propriedades das figuras geométricas envolvidas. Assim, a cabeça era percebida como uma forma arredondada que, para ser reproduzida como um registro de representação semiótica, deveria satisfazer a regras próprias de formação dos registros cognitivos (regras de conformidade) de modo a assegurar a possibilidade de realização de tratamento com a mesma. Ao mesmo tempo, como a atividade de modelagem exigia do aluno que ele escrevesse as suas formas de pensamento – incluindo as dúvidas – nota-se a forma discursiva de apreensão da figura em sua escrita: “ $\frac{1}{2}$  circunferência ou  $\frac{1}{2}$  elipse”?

Nota-se que, ao demonstrar a apreensão das figuras na forma discursiva, o aluno, na maioria das vezes, utilizava os nomes corretos das figuras; em outras vezes, as

nomeações “setor circular de 90°” ou “semicircunferência” eram registradas como “ $\frac{1}{4}$  de círculo” ou “ $\frac{1}{2}$  círculo”.

O ambiente de aprendizagem (BARBOSA, 2001) proporcionado pela modelagem matemática de logotipos parecia favorecer o tratamento (quando eram identificadas as bases, as alturas, os ângulos etc) e a conversão (quando era feita a descrição das figuras e de suas partes) dos registros de representação semiótica produzidos.

A apreensão das figuras parecia atingir os dois níveis propostos por Duval (2009): além de interpretar as figuras no contexto (logotipo) e reconhecer as unidades figurais em uma sequência (o aluno obedeceu a uma ordem de reconhecimento), nota-se que o processo exigiu a apreensão operatória das figuras, já que estas foram transformadas (a parte inferior da perna foi interpretada como um retângulo onde “encaixava-se” um semicírculo). O aluno, portanto, realizava transformações *mereológicas*, uma vez que necessitava decompor a figura em partes e novamente recompô-las de maneira a obter o modelo.

#### Subfase da atribuição de medidas (metrificação) para cálculo das áreas (algebrização e aritmetização)

A subfase anterior, em que o aluno identificava as figuras era acompanhada da atribuição de medidas para posterior cálculo das áreas coloridas do desenho. O aluno valia-se do desenho impresso e da régua graduada; no entanto, algumas decisões importantes tinham que ser tomadas: qual seria o raio de cada um dos círculos que, tangenciando os lados, daria o aspecto arredondado aos retângulos que definiam corpo, braços e pernas do boneco. As páginas a seguir, na Figura 4, mostram os registros do aluno, quando decidia pelo raio  $r = 0,5$  cm.

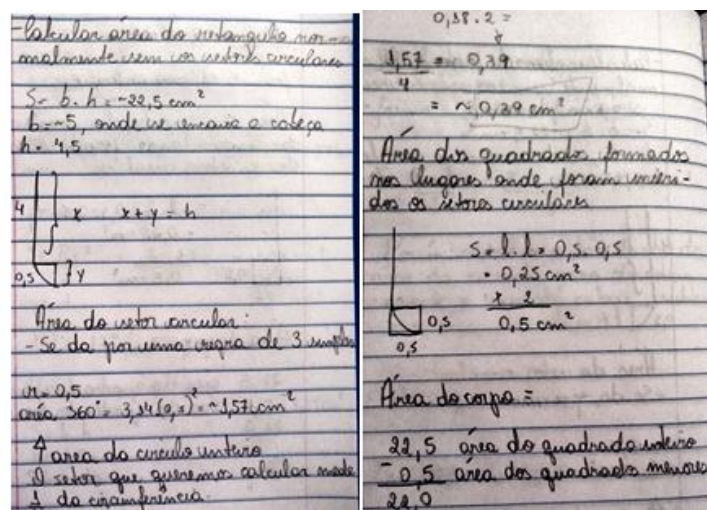


Figura 4. Alguns registros da subfase de atribuição de medidas e cálculo das áreas.

Fonte: Arquivo do autor

A sequência mostrada na Figura 4 parece evidenciar algumas etapas da solução de problema, na perspectiva de Brito (2006). Foi feito um planejamento de solução, em que o aluno seguia uma sequência de cálculos a partir das antenas do boneco. Nota-se que o cálculo de áreas foi feito a partir das medidas obtidas; era necessário, no entanto, identificar as fórmulas para cada unidade figurar reconhecida na composição.

Ao mesmo tempo, parece que o aluno monitorava o processo, nomeando os procedimentos como, por exemplo, “1ª e 2ª formas: a união das antenas” e “16ª e 17ª formas: área das pernas”. Em outras situações, o aluno explicava o procedimento empregado: “multiplica por 2 por estamos tratando de figuras iguais”; “porém os olhos estão dentro da área da cabeça, para descobrir somente a área da cabeça, subtraímos a área dos olhos”.

Novamente, podem ser evidenciadas formas de conversão e de tratamento dos registros produzidos: nessa fase, as unidades identificadas foram tratadas como superfícies planas cujas áreas foram calculadas.

### **A terceira fase: validando o modelo no computador**

Desenhar o logotipo na tela de computador envolveu, de certa maneira, a validação do modelo – entendida como uma das etapas de solução do problema (Brito, 2006): qualquer erro na identificação da forma e das medidas acarretava na deformação da figura modelada geometricamente – e, conseqüentemente, o retorno à fase anterior.

Além disso, outro tratamento foi necessário: cuidar da posição das formas, ou seja, do deslocamento destas em relação a um referencial – tipo de apreensão operatória ainda não identificado nas fases anteriores. Em outras palavras: era preciso delimitar a distância entre a cabeça e o corpo, a distância entre o corpo e os braços, o ângulo de inclinação das antenas em relação a um eixo de simetria, a posição das pernas em relação ao corpo etc.

Observou-se que o desenho feito na janela geométrica do GeoGebra envolvia tomadas de decisão que só eram possíveis depois de se verificarem outras unidades figurais – ainda não percebidas na fase anterior. Assim, o quadrado (corpo), os retângulos (braços e pernas) passaram a ser vistos como uma organização de pontos obtidos por meio da intersecção de retas paralelas horizontais e verticais. A distância entre essas retas foi tomada como uma unidade figural inicial para a reprodução do desenho do logotipo.

De acordo com Duval (2012), as representações que são exibidas na tela do computador são as mesmas que aquelas produzidas no papel para uma apreensão visual (p.137).

No entanto, ao analisar as etapas de construção do modelo no GeoGebra foi possível identificar a operação de “desconstrução dimensional das formas ( $nD \rightarrow (n-1)D$ )”, conforme nomeação dada pelo autor. No caso do logotipo modelado, a escolha dos comandos constantes no *menu* do software exigia do aluno considerar as unidades figurais de um nível inferior: as figuras geométricas precisavam ser desconstruídas como uma rede de retas paralelas e perpendiculares que, ao se interceptarem, definiriam pontos: estes eram escolhidos como vértices dos retângulos; centros ou pontos de circunferências etc. Exigia também um planejamento das etapas de construção e também conhecimento dos termos geométricos presentes no *menu* – o que caracteriza, novamente, a conversão de registros. A Figura 5 mostra alguns comandos acessados no processo de produção do logotipo.

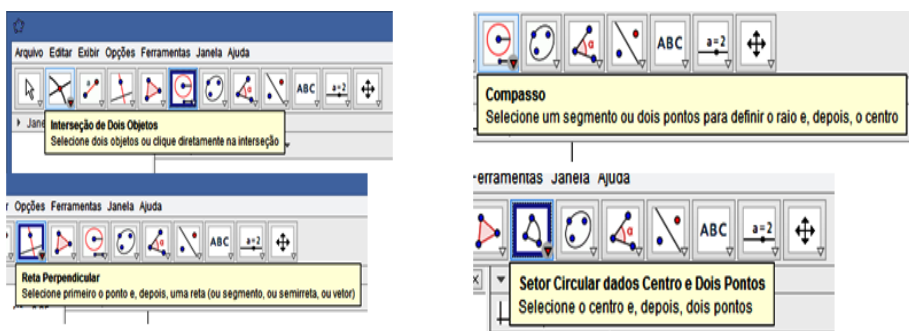


Figura 5. Comandos do software GeoGebra utilizados na construção do logotipo  
 Fonte: Arquivo do autor

Já a Figura 6 mostra as representações iniciais utilizadas na sequência de passos para a construção do logotipo (a rede de retas paralelas com as distâncias definidas, o eixo de simetria, as linhas auxiliares) e também o desenho pronto (apesar de este ainda conter os rótulos e objetos que foram posteriormente excluídos), além de alguns detalhes da construção.

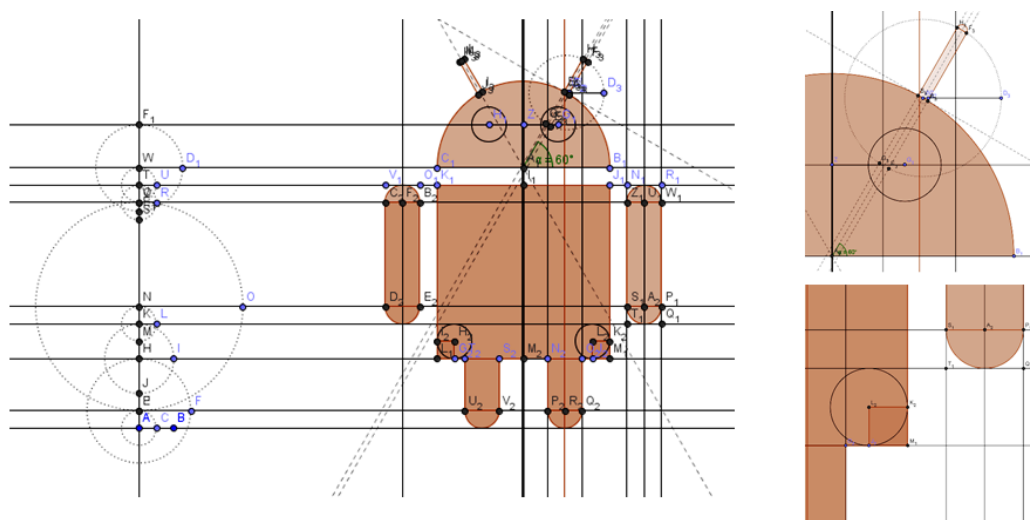


Figura 6. Feixe de retas paralelas construídas (esquerda); logotipo modelado (centro) e detalhes do logotipo (direita)  
 Fonte: Arquivo do autor

### Considerações finais

A validação do modelo – enquanto etapa final da modelagem e do processo de solução do problema – revelou algumas diferenças entre o logotipo tomado inicialmente e o modelo obtido; entre elas, notou-se que a cabeça do boneco poderia ter sido interpretada como semi-elipse: isso revela que o modelo representou, mesmo que não totalmente, a situação investigada.

Conforme anunciado, procurou-se entender alguns processos cognitivos empregados por um estudante durante a modelagem matemática de logotipos, com base na análise dos registros de representação semiótica em suas fases de formação, tratamento e conversão. Partindo-se do princípio de que não há *noésis* sem *semiósisis*, que as transformações de representações em outras transformações semióticas estão no

coração da atividade matemática e que a conceitualização requer a coordenação de registros de representação na atividade cognitiva de conversão, então se acredita que a modelagem matemática aqui apresentada deve favorecer a compreensão de alguns conceitos e procedimentos referentes à geometria plana básica.

Evidentemente, não foi possível acompanhar todas as formas de apreensão das figuras, nem descrever outras dificuldades do estudante em identificar as unidades figurais ou em tratar e converter os registros, nas diversas etapas do processo de obtenção do modelo. Análises mais densas, utilizando os registros de outros alunos, merecem ser realizadas. Espera-se, assim, refletir sobre as reais contribuições que este tipo de trabalho pode dar à aprendizagem da geometria escolar – como o desenvolvimento da habilidade de visualização, da capacidade de estabelecer relações entre propriedades dos conceitos e de realizar cálculos com medidas de comprimentos, ângulos e áreas.

Além disso, cabe ressaltar a importância do trabalho caracterizado como “pesquisa do professor” que, se dirigido a questões teóricas (também), pode visar à melhoria de sua prática pedagógica – especialmente no que diz respeito à utilização do computador nas aulas de matemática.

## Referências

BARBOSA, J. C. Modelagem na Educação Matemática: contribuições para o debate teórico. In: REUNIÃO ANUAL DA ANPED, 24., 2001, Caxambu. **Anais...** Rio Janeiro: ANPED, 2001. Disponível em:

[http://www.ufrgs.br/espmat/disciplinas/funcoes\\_modelagem/modulo\\_v/modelagem\\_barbosa.pdf](http://www.ufrgs.br/espmat/disciplinas/funcoes_modelagem/modulo_v/modelagem_barbosa.pdf)>. Acesso em 30 ago 2014.

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática**. São Paulo: Contexto, 2002.

BICUDO, M. A. V.; KLÜBER, T. E. Pesquisa em modelagem matemática no Brasil: a caminho de uma metacompreensão. **Cadernos de Pesquisa**. V.41, N.144 set./dez. 2011, p.904-927.

BIEMBENGUT, M. S.; HEIN, N. **Modelagem Matemática no ensino**. São Paulo: Contexto, 2003.

BRITO, M. R. F. Alguns aspectos teóricos e Conceituais da Solução de Problemas Matemáticos. In: Brito, M.R.F.(org). **Solução de Problemas e a Matemática Escolar**. Campinas: Alínea, 2006, p.14-32.

BURAK, D.; BRANDT, C. F. Modelagem Matemática e Representações Semióticas: contribuições para o desenvolvimento do pensamento algébrico. **Zetetiké – FE – Unicamp**, v. 18, n. 33, 2010, p.63-102.

BURATTO, I. C. F. **Representação semiótica no ensino da geometria**: uma alternativa metodológica na formação de professores. Mestrado em Educação Científica e Tecnológica. Universidade Federal de Santa Catarina, 2006.

CARNEIRO, V. C. Contribuições para a Formação do Professor de Matemática Pesquisador nos Mestrados Profissionalizantes na Área de Ensino. **Bolema**, Rio Claro (SP), Ano 21, nº 29, 2008, p. 99 - 122.

DUVAL, R. **Semiósis e Pensamento Humano**: Registros semióticos e aprendizagens intelectuais. (Fascículo I). Tradução de Lênio F. Levy e Marisa R.A. Silveira. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

DUVAL, R. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. Tradução: Moretti, M. T. **Rev. Revemat**, v.7, n.2, 2012, p 266-297.

ECHEVERRIA, M. D. P. P.; POZO, J. I. Aprender a resolver problemas e resolver problemas para aprender. In: Pozo, J. I. (org). **A solução de problemas**. Porto Alegre: Artmed, 1998, p. 44-63.

FLORES, C. R.; MORETTI, M. T. As figuras geométricas enquanto suporte para a aprendizagem em geometria: um estudo sobre a heurística e a reconfiguração. **Revemat-Revista Eletrônica de Educação Matemática - UFSC**. V1.1, 2006, p. 5 -13.

MALHEIROS, A. P. S. Pesquisas em Modelagem Matemática e Diferentes Tendências em Educação e em Educação Matemática. **Bolema**, Rio Claro, v. 26, n. 43, 2012, p.861-882.

**Submissão: 20/04/2015**

**Aceite: 14/09/2015**