

# O TRABALHO COM DERIVADAS NO ENSINO MÉDIO ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS: ASPECTOS DA AVALIAÇÃO

## THE WORK ON DERIVATIVES IN HIGH SCHOOL THROUGH PROBLEM SOLVING: ASSESSMENT ASPECTS

**Érica Marlúcia Leite Pagani**

Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais-CEFET-MG, ericapagani@terra.com.br

**Norma Suely Gomes Allevato**

Universidade Cruzeiro do Sul, normallev@gmail.com

### **Resumo**

Este trabalho é um recorte de uma tese de doutorado em que se investiga o ensino e a aprendizagem de derivadas no contexto da Resolução de Problemas. Foi realizada no 2º ano do Ensino Médio integrado ao técnico, numa turma do curso de Eletrônica. A pesquisa é qualitativa e foi desenvolvida por meio da observação participante e análise documental. Assumimos a concepção de resolução de problemas como um ponto de partida para ensinar Matemática, entendida como um meio de se construir novos conhecimentos a partir de anteriores e ao longo do processo de resolução de um ou mais problemas. Considerada, desse modo, como uma metodologia de ensino, é uma perspectiva que está apoiada na tríade ensino-aprendizagem-avaliação e que, portanto, considera a avaliação um processo intrínseco ao processo de ensino-aprendizagem. Apresentamos e discutimos um episódio que evidencia como essa metodologia permite ao professor e ao aluno perceberem, de forma mais clara, dificuldades no aprendizado dos conteúdos, e como favorece a tomada de decisões e mudanças de estratégias no ensino.

**Palavras-chave:** Educação Matemática, Ensino Profissionalizante, Resolução de Problemas, Avaliação, Derivadas.

### **Abstract**

The present work brings an outline of a doctoral thesis that investigates teaching and learning derivatives in the context of Problem Solving. It was conducted with students of 2<sup>nd</sup> year high school integrated into technical education attending an Electronics course. It is a qualitative research involving participant observation and document analysis. We have taken the conception of problem solving as a starting point to teach Mathematics, and it is viewed as a way to build new knowledge from previous knowledge and along the process of solving one or more problems. Regarded as a teaching methodology, it is a perspective grounded on the triad teaching-learning-assessment, therefore, it considers assessment as an intrinsic process to teaching-learning process. We present and discuss a situation that emphasizes how such methodology enables teachers and students to notice more clearly

the difficulties in learning contents and how it favors decision-making and changes in teaching strategies.

**Keywords:** Mathematics Education; High School; Problem Solving; Assessment; Derivatives.

## Introdução

Nesse artigo relatamos parte de uma pesquisa de doutorado que foi desenvolvida no Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais, o CEFET-MG. O CEFET-MG é uma instituição centenária que oferece cursos de Educação Profissional Técnica de Nível Médio, nas modalidades integrada, concomitância externa e subsequente; cursos de graduação; e pós-graduação que contempla cursos de especialização *lato sensu*, mestrado e doutorado.

Na Educação Profissional Técnica de Nível Médio (EPTNM) do CEFET-MG, os conteúdos matemáticos ministrados são aqueles que atendem ao Ensino Médio, norteados pelos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (BRASIL, 1999), além dos conteúdos necessários ao desenvolvimento das disciplinas técnicas.

É nesse contexto que se inserem, nos conteúdos programáticos, os assuntos de Cálculo Diferencial e Integral, em particular o ensino de derivadas<sup>1</sup> e integrais. Até o ano letivo de 2012, fazia parte do conteúdo programático a ser desenvolvido em todas as turmas: limites (conceito, propriedades operatórias), derivadas (conceito, propriedades, máximos e mínimos de funções, aplicações) e integrais indefinidas e definidas. Essas noções de Cálculo estavam, historicamente, inseridas nas grades curriculares dos cursos para atender às demandas de disciplinas técnicas de “alguns” deles. No decorrer dos anos, diante da grande dificuldade no processo de ensino e aprendizagem desses conteúdos e de sua pouca ou nenhuma aplicabilidade na maioria dos cursos, seu ensino passou, a partir do ano letivo de 2013, a ser restrito aos cursos de Eletrônica, Eletrotécnica e Mecatrônica.

Pesquisas têm sido conduzidas com o propósito de compreender e melhorar os processos de ensino e de aprendizagem da matemática escolar e, há alguns anos, o ensino de Cálculo Diferencial e Integral tem sido objeto de estudos e debates. Nesse sentido, investigamos o ensino e a aprendizagem de derivadas no contexto da Resolução de Problemas no 2º ano do Ensino Médio integrado ao técnico numa turma do curso de Eletrônica.

Trata-se de uma pesquisa de abordagem qualitativa realizada por meio da observação participante e da análise documental.

A pesquisa qualitativa tem como principal objetivo compreender os fenômenos que se observa, favorecendo o enfoque interpretativo e presumindo que o conhecimento vai se (re)construindo constantemente nas relações estabelecidas entre os sujeitos de pesquisa. Não se preocupa com a representatividade numérica dos dados, nem trabalha com instrumentos estatísticos ou regras. Ao contrário, esse tipo de abordagem enfatiza a descrição e a indução (BOGDAN; BIKLEN, 1994).

---

<sup>1</sup> Quando usamos a palavra derivadas, estamos nos referindo a derivadas de funções reais de uma variável real

Na pesquisa que realizamos, a partir da proposição de problemas (problema gerador) os alunos eram estimulados a construir conhecimentos sobre derivadas, recorrendo, inicialmente, aos seus conhecimentos de Matemática. Os alunos trabalharam em grupos (duplas), discutiram processos de resolução do problema, analisaram as soluções, sempre estimulados e orientados pela professora pesquisadora. Além disso, a professora pesquisadora pode avaliar continuamente o ensino e a aprendizagem, adequando e reformulando os problemas, quando necessário, visando sempre à melhoria do aprendizado do aluno. Dessa forma é que entendemos que a investigação que aqui relatamos se insere na modalidade de pesquisa participante.

Assim, para subsidiar nossa discussão, apresentamos o presente artigo em 4 seções. Na primeira, analisamos brevemente o ensino de Cálculo apresentando discussões e propostas pedagógicas para o seu ensino. Na seção 2, discutimos as investigações sobre Resolução de Problemas, suas implicações no ensino e na aprendizagem e apresentamos suas diferentes concepções. Na seção seguinte, descrevemos a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação como uma perspectiva de ensino apoiada na tríade ensino-aprendizagem-avaliação e que utiliza o problema para desencadear e promover a construção do conhecimento. Na quarta seção, refletimos sobre a avaliação integrada ao processo de ensino-aprendizagem para, em seguida, apresentarmos um episódio que retrata momentos da avaliação proporcionados pela resolução de problemas no processo de ensino-aprendizagem de derivadas. Encerramos com as considerações finais e as referências bibliográficas

## **O Ensino de Cálculo**

O ensino e a aprendizagem de conceitos do Cálculo Diferencial e Integral constituem um dos grandes desafios da Educação e têm sido alvo de diversas pesquisas na Educação Matemática. Esse interesse se deve, principalmente, ao fato de que o índice de reprovação nas disciplinas de Cálculo é alarmante e pesquisas (CORNU, 1991; PINTO, 2008; PINTO, 2010; ROSSI, 2012, WEIGAND, 2014) têm mostrado que os conceitos fundamentais do Cálculo (números, limites, derivadas e integrais) são fontes de dificuldades dos estudantes que cursam os Ensinos Médio e Superior. Assim, muitos pesquisadores procuram identificar as causas das dificuldades relacionadas ao ensino e à aprendizagem desses conteúdos básicos. É uma questão complexa para qual encontramos respostas diversas na literatura pesquisada, tais como: dificuldades de natureza epistemológicas (REZENDE, 2003) e dificuldades relacionadas aos métodos de ensino utilizados.

Apesar de o Cálculo ser uma disciplina ministrada em cursos da Educação Superior, atualmente o ensino de suas ideias, conceitos e elementos tem sido considerado pertinente também no Ensino Médio, uma vez que seus conteúdos podem estar ao alcance de alunos desse nível de ensino e que o Cálculo é uma disciplina de relevante importância no desenvolvimento da Ciência e da Tecnologia.

Há autores que defendem que ideias básicas do Cálculo devem ser trabalhadas no Ensino Médio, através de abordagens adequadas, a fim de amenizar as dificuldades na transição desse nível de ensino para o Ensino Superior, especialmente no que diz respeito

às dificuldades enfrentadas no ensino e na aprendizagem de conceitos que são específicos de Cálculo Diferencial e Integral. Rezende (2003), em sua tese, observa que

[...] a ausência das ideias e problemas essenciais do Cálculo no ensino básico de matemática, além de ser um contra-senso do ponto de vista da evolução histórica do conhecimento matemático, é, sem dúvida, a principal fonte dos obstáculos epistemológicos que surgem no ensino superior de Cálculo. (REZENDE, 2003, p. 402)

Também Pereira (2009), por sua vez, conclui, em sua dissertação de mestrado, que é possível tratar conceitos e ideias básicas do Cálculo no Ensino Médio, e que sua inserção possibilita

[...] uma ampla gama de unidades cognitivas, relacionadas aos conceitos do Cálculo, que ajudarão o aluno tanto num futuro curso de Cálculo, quanto no enriquecimento da imagem de conceito de outros conteúdos matemáticos. (PEREIRA, 2009, p. 54)

Ratificando essas posições, Ávila (2006) defende que a derivada seja ensinada no Ensino Médio, e considera que o fato de a derivada ser considerada inadequada e difícil nessa fase é devido ao seu ensino muitas vezes ser, desnecessariamente, precedido de um enfadonho capítulo sobre limites. Ocorre que a abordagem desse conteúdo é, muitas vezes, pouco intuitiva, caracterizada por atividades com excesso de manipulação algébrica e pouco significativas para os alunos. Ele afirma: “devemos enfatizar que a derivada foi inventada há mais de três séculos; e, juntamente com o conceito de integral, ela é o alicerce de toda a ciência e tecnologia dos últimos trezentos anos”. (ÁVILA, 2006, p. 37)

Vale ressaltar que não encontramos na literatura pesquisada (PAGANI; ALLEVATO, 2014), trabalhos que investiguem o ensino de Cálculo no contexto do Ensino Médio Técnico. Isso nos leva a crer que há carência de investigações sobre o ensino de Cálculo na Educação Básica e a inferir que esse é um campo fértil para novas pesquisas relacionadas ao ensino e à aprendizagem de derivadas.

## **O ensino de Matemática através da resolução de problemas**

As investigações sobre Resolução de Problemas e suas implicações no ensino e na aprendizagem, surgem com George Polya, na década de 1940, sendo ele um dos precursores no estudo desse tema. Uma grande preocupação de Polya era ensinar aos alunos estratégias que os auxiliassem na resolução de problemas (POLYA, 1995)<sup>2</sup>. Essas investigações ressurgem no início da década de 1970, após o declínio da Matemática Moderna e, no fim desse período, a Resolução de Problemas emerge na Educação Matemática, caracterizada por considerar o aluno, no processo de ensino e aprendizagem, um ser ativo e primar pela construção do conhecimento e não pela simples repetição de técnicas e algoritmos.

A década de 1980 foi um marco para a Resolução de Problemas em vários países. Entretanto, o intenso trabalho realizado nessa década em torno da resolução de problemas

---

<sup>2</sup> Título da obra em inglês: How to Solve It, cuja primeira edição data de 1944; a versão em português, aqui citada, foi publicada em 1995.

não proporcionou a melhoria esperada na aprendizagem da Matemática. Daí afloraram, então, ideias de se pensar em utilizar as situações-problema como um meio de se ensinar e aprender Matemática. (ALLEVATO, 2005).

Os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio - PCNEM - enfatizam que a Resolução de Problemas “é a perspectiva metodológica escolhida nessa proposta e que deve ser entendida como a postura de investigação frente a qualquer situação ou fato que possa ser questionado” (BRASIL, 1999, p.129). No Brasil, os Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN - são documentos que visam orientar o ensino e foram fortemente influenciados pelas orientações e documentos publicados pelo NCTM, como podemos perceber em suas orientações (BRASIL, 1998), que apontam a Resolução de Problemas como um dos caminhos para o ensino e aprendizagem da Matemática e ressaltam que

resolver um problema não se resume em compreender o que foi proposto e em dar respostas aplicando procedimentos adequados.[...] Além disso, é necessário desenvolver habilidades que permitam provar os resultados, testar seus efeitos, comparar diferentes caminhos para obter a solução. Nessa forma de trabalho, a importância da resposta correta cede lugar a importância do processo de solução. (BRASIL, 1998, p. 40).

Observamos nesses documentos que a resolução de problemas é vista não só como meta a ser atingida, conforme propunha Polya (1995), mas também como uma atividade que orienta processos de ensino e de aprendizagem. Diante disso, apresentamos o que entendemos por problemas e o que entendemos por Resolução de Problemas nesse artigo.

Assumimos que problema é “tudo aquilo que não se sabe fazer mas que se está interessado em fazer”(ONUCHIC; ALLEVATO, 2011, p. 81). Consideramos que essa definição de problema é uma definição abrangente e engloba outras definições e classificações como as apresentadas por Hiebert et al (1997 apud VAN DE WALLE, 2009, p. 57) e Lester (1983 apud ECHEVERRÍA, 1998, p.15).

Segundo Echeverría (1998), uma situação só pode ser considerada como um problema para uma determinada pessoa ou grupo se estes não dispuserem de mecanismos e algoritmos que os permitam resolver a situação de forma mecânica ou imediata, sem que seja necessário refletir sobre a mesma. Esta última característica diferencia um problema de outras atividades, algumas das quais podem ser chamadas de exercícios. Dessa forma,

[...] um problema diferencia de um exercício na medida em que, neste último caso, dispomos e utilizamos mecanismos que nos levam, de forma imediata, à solução. Por isso é possível que uma mesma situação represente um problema para uma pessoa enquanto que para outra esse mesmo problema não existe, quer porque ela não tem interesse pela situação, quer porque possua mecanismos para resolvê-la com um investimento mínimo de recursos cognitivos e pode reduzi-la a um simples exercício. (ECHEVERRÍA, 1998, p. 16)

Assim, configurar uma atividade matemática como um problema ou exercício vai depender dos objetivos da atividade que se quer desenvolver e dos conhecimentos prévios apresentados pelos alunos. Por isso o que é um problema para uma pessoa pode não ser para outra.

Como já mencionado, a partir da década 1980, principalmente, foram feitos grandes esforços no sentido de desenvolver materiais e currículos que pudessem favorecer o trabalho com resolução de problemas na Matemática. Nos Estados Unidos, o NCTM (*National Council of Teacher of Mathematics*), publicou, no início dos anos de 1980, o documento “Uma Agenda para Ação” que, segundo Onuchic (1999), chamava a todos os interessados pela Educação Matemática para, juntos, buscar melhorias para a mesma. Esse documento apresentava recomendações para melhoria do ensino e da aprendizagem da Matemática e uma das primeiras era que o foco da matemática escolar deveria ser colocado na resolução de problemas.

Esses esforços foram e continuam sendo úteis para ajudar os professores interessados em tornar a Resolução de Problemas o foco em suas salas de aulas. Entretanto, isso não foi suficiente para que esse trabalho em sala de aula atingisse o sucesso desejado, e isso ocorreu, provavelmente, à pouca ou quase nenhuma concordância entre as diferentes formas de se trabalhar com resolução de problemas sendo ela o foco da matemática escolar. (ONUCHIC, 1999; SCHROEDER; LESTER, 1989).

Nesse sentido, Schroeder e Lester (1989) acreditam que uma das melhores maneiras de lidarmos com essas diferenças de compreensão é distingui-las de acordo com as diferentes abordagens dadas a ela no ambiente escolar. Uma das maneiras de distinguir as diferentes concepções sobre Resolução de Problemas, apresentada por Hatfield (1978) e ratificada por Schroeder e Lester (1989), continua bastante atual. Nela são consideradas três formas de conceber ou abordar a resolução de problemas: ensinar **sobre** a Resolução de Problemas, ensinar (Matemática) **para** a resolução de problemas e ensinar (Matemática) **através** da resolução de problemas. Neste trabalho, assumimos a terceira concepção, em que a resolução de problemas é considerada como um ponto de partida para ensinar Matemática, entendida como um meio de se obter novos conhecimentos a partir de anteriores ou ao longo do processo de resolução de um ou mais problemas. A respeito dessas concepções sobre resolução de problemas, Onuchic (1999, p. 207) salienta que “embora na teoria as três concepções de ensinar resolução de problemas possam ser separadas, na prática elas se superpõem e acontecem em várias combinações e sequências”.

## **A Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas**

Tradicionalmente, um professor de Matemática ensina aos seus alunos os conteúdos previstos nos currículos oficiais, apresentando-os a teoria e, em seguida, exemplos de aplicação. Ao final de cada conteúdo apresentado, espera-se que o aluno esteja apto a aplicar esses conhecimentos na resolução de exercícios e na “resolução de problemas”. Entretanto, nesse modelo de ensino, o professor é o centro do processo de ensino-aprendizagem e o aluno um ser passivo que supostamente absorve e “entende” o que lhe foi transmitido. Essa é uma ideia enraizada na cultura do “ensinar Matemática”, que considera que todos os alunos tenham o mesmo conhecimento prévio e que há apenas uma maneira de o aluno adquirir novos conhecimentos. Essa visão de “transmitir” Matemática empobrece o ensino-aprendizagem uma vez que limita a criatividade dos alunos, levando-os a automatizar procedimentos através da memorização e, nem sempre,

da compreensão. Quando o professor apresenta ao aluno um modo de resolver o problema, antes mesmo que esse aluno reflita sobre ele, o aluno, geralmente, não considera outras maneiras de resolvê-lo. Além disso, muitas vezes não entende o modo apresentado pelo professor e por isso não resolve o problema. Isso nos leva a constatar que a repetição de procedimentos formais da Matemática, ainda que corretamente, não necessariamente gera aprendizado, nem significa aprender Matemática. O desejável é que os estudantes, de maneira geral, aprendam a pensar matematicamente, sendo capazes de relacionar a Matemática apre(e)ndida em sala de aula a outros problemas, propondo solução para os mesmos.

A Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da Resolução de Problemas é uma perspectiva de ensino que está apoiada na tríade ensino-aprendizagem-avaliação e que utiliza o problema para desenvolver a construção do conhecimento de algum conceito matemático de forma que o aluno possa construir seu próprio aprendizado com compreensão e significado.

Nessa metodologia, o ensino-aprendizagem de tópicos matemáticos começa a partir de um problema, denominado, problema gerador, que seja útil ao desenvolvimento do conteúdo; ou seja, que contenha aspectos fundamentais desse tópico matemático que se quer trabalhar em aula. Ferramentas e técnicas matemáticas devem ser desenvolvidas durante o processo de busca por soluções adequadas ao problema proposto e a avaliação é entendida como parte integrante desse processo.

Considerando que a avaliação é um processo intrínseco ao processo de ensino-aprendizagem, cabe ao professor reunir, continuamente, dados sobre o aprendizado de seus alunos de forma a obter informações que permitam a ele a tomada de decisões didáticas no planejamento de suas aulas.

Os estudos desenvolvidos por Pironel (2002) marcam a inserção da avaliação integrada aos processos de ensino e de aprendizagem. Segundo ele,

[...] com a crescente preocupação sobre a avaliação no processo de ensino-aprendizagem, a ponto de inseri-la como parte intrínseca a este processo, estendemos nosso conceito da metodologia e passamos a pensar na Metodologia de Ensino-aprendizagem-avaliação via Resolução de Problemas.(PIRONEL, 2002, p. 62)

A opção por usar a palavra composta ensino-aprendizagem-avaliação tem como objetivo

[...] expressar uma concepção em que o ensino, a aprendizagem e a avaliação devem ocorrer simultaneamente durante a construção do conhecimento do aluno, com o professor atuando como guia e mediador. (ALLEVATO, ONUCHIC, 2014, p. 43)

Além disso,

[...] o **Ensino-Aprendizagem-Avaliação** de Matemática através da Resolução de Problemas possibilita ligar os conhecimentos prévios à solução procurada para o problema e aos novos conhecimentos a serem construídos, já que, nesse **processo**, o aluno utiliza os conhecimentos anteriores que possui e o professor o auxilia a construir, a partir desses

novos conhecimentos relacionados ao problema proposto. (NOGUTI, 2015, p. 32 ) (grifo nosso)

A Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da Resolução de Problemas é uma metodologia que favorece o ensino, a aprendizagem e a avaliação, pois permite que esses 3 (três) elementos - ensino, aprendizagem e avaliação-, se realizem de maneira integrada em sala de aula, justificando e reforçando a opção de se utilizar a palavra composta ensino-aprendizagem-avaliação.

### **O ensino de derivadas através da resolução de problemas: aspectos da avaliação**

No decorrer dos anos, a avaliação tem sido alvo de discussões e tem se tornado um elemento importante que pode contribuir com o processo de ensino-aprendizagem.

Nesse trabalho, nossa preocupação é refletir sobre a avaliação integrada ao processo de ensino-aprendizagem e, nesse sentido, verificamos nos *Standards 2000*<sup>3</sup>, a recomendação de que a avaliação

[...] deverá constituir uma **parte integrante** do ensino que **informa e orienta os professores nas suas decisões**. A avaliação não deverá ser meramente feita aos alunos; pelo contrário, ela deverá ser feita *para* os alunos, para os orientar e melhorar a sua aprendizagem.(NCTM, 2000 apud APM, 2008, p. 23)(grifos nossos)

A avaliação ocupa um lugar natural e importante na cultura escolar de forma que os elementos ensino, aprendizagem e avaliação deveriam ser indissociáveis, no sentido de que não é possível descrever a aprendizagem desatrelada da avaliação.

Em nosso trabalho, utilizamos o problema para desenvolver a construção de conhecimentos sobre derivadas. Apoiadas em Allevato e Onuchic (2009), encaminhamos as atividades em sala de aula segundo a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da Resolução de Problemas, utilizando 9 (nove) etapas, que descrevemos brevemente: 1) Preparação do problema- Selecionar o problema visando a construção de um novo conceito, princípio ou procedimento. Esse problema será chamado de problema gerador. 2) Leitura individual- Entregar uma cópia para cada aluno e solicitar que seja feita a leitura. 3) Leitura em conjunto-Formar grupos e solicitar a leitura do problema. 4) Resolução do problema- De posse do problema e sem dúvidas quanto ao enunciado, os alunos, em seus grupos, buscam resolvê-lo. 5) Observar e incentivar-Enquanto os alunos em grupo, buscam resolver o problema, o professor observa, analisa o comportamento dos alunos e estimula o trabalho colaborativo. 6) Registro das soluções na lousa-representantes dos grupos são convidados a registrar, na lousa, suas soluções. 7) Plenária-Para essa etapa todos os alunos são convidados a discutirem as diferentes soluções registradas na lousa pelos colegas, para defenderem seus pontos de vista e esclarecerem suas dúvidas. 8) Busca do consenso- Após serem sanadas as dúvidas e analisadas as resoluções e soluções obtidas para o problema, o professor tenta, com a classe, chegar a um consenso sobre o resultado correto. 9) Formalização do conteúdo-Neste momento, denominado “formalização”, o professor registra na lousa uma apresentação “formal”- organizada e

---

<sup>3</sup> “Princípios e Padrões para Matemática Escolar” é um documento publicado pelo NCTM, no ano de 2000, mais conhecido como *Standards 2000*

estrutura em linguagem matemática, padronizando os conceitos, os princípios e os procedimentos construídos através da resolução do problema.

A seguir, relatamos um episódio que retrata um momento de avaliação favorecido pelo uso dessa metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática, particularmente no ensino de derivadas.

### **Momento de avaliação no ensino de derivadas: mudança de estratégia de ensino**

O grupo que participou da pesquisa aqui relatada era composto por 34 alunos do 2º ano do Ensino Médio integrado ao técnico na modalidade de Eletrônica, formando assim, 17 duplas. Eram alunos com idade entre 16 e 17 anos, que cursavam as disciplinas técnicas na parte da manhã e as disciplinas do núcleo comum, como a Matemática, no turno da tarde. Os encontros para aplicação das atividades aconteceram, regularmente, no horário de aulas de Matemática da turma.

Planejamos a aplicação de 06 atividades, cada uma delas composta por uma sequência de problemas objetivando desencadear a construção de conhecimento sobre derivadas.

A utilização da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas permitiu-nos construir dados que nos revelaram lacunas no conhecimento matemático prévio dos alunos e avaliar nossa prática de ensino e mudar nossas estratégias, sempre com o objetivo de ampliar a aprendizagem do aluno.

No encaminhamento das atividades em sala de aula, utilizando as nove etapas descritas anteriormente, os alunos foram convidados a resolver problemas a partir de seus conhecimentos prévios, trabalhando sempre em duplas. Em seguida, as resoluções das duplas eram discutidas e analisadas na plenária, buscava-se um consenso para, só depois, a professora formalizar o conteúdo.

O episódio que apresentamos aqui retrata um dos momentos de avaliação favorecido pela resolução do seguinte problema:

Seja  $f(x) = x^2 + 6x$

- a) Determine  $f'(x)$
- b) Determine o ponto do gráfico onde a reta tangente é horizontal
- c) Determine o coeficiente angular das retas tangentes ao gráfico da função  $f$  em  $x = 0$  e  $x = 6$
- d) Trace o gráfico de  $f(x)$  e as retas tangentes ao gráfico nos pontos dos itens b e c.

Com esse problema intencionávamos verificar se os alunos estavam aptos a determinar a expressão da função derivada, se haviam compreendido o conceito de reta tangente à uma curva num determinado ponto e verificar habilidades básicas no traçado de gráficos.

Após recolhermos os protocolos referentes a essa atividade, iniciamos a plenária. As duplas D5 e D7 apresentaram a solução referente ao item d), conforme a Figura 01:

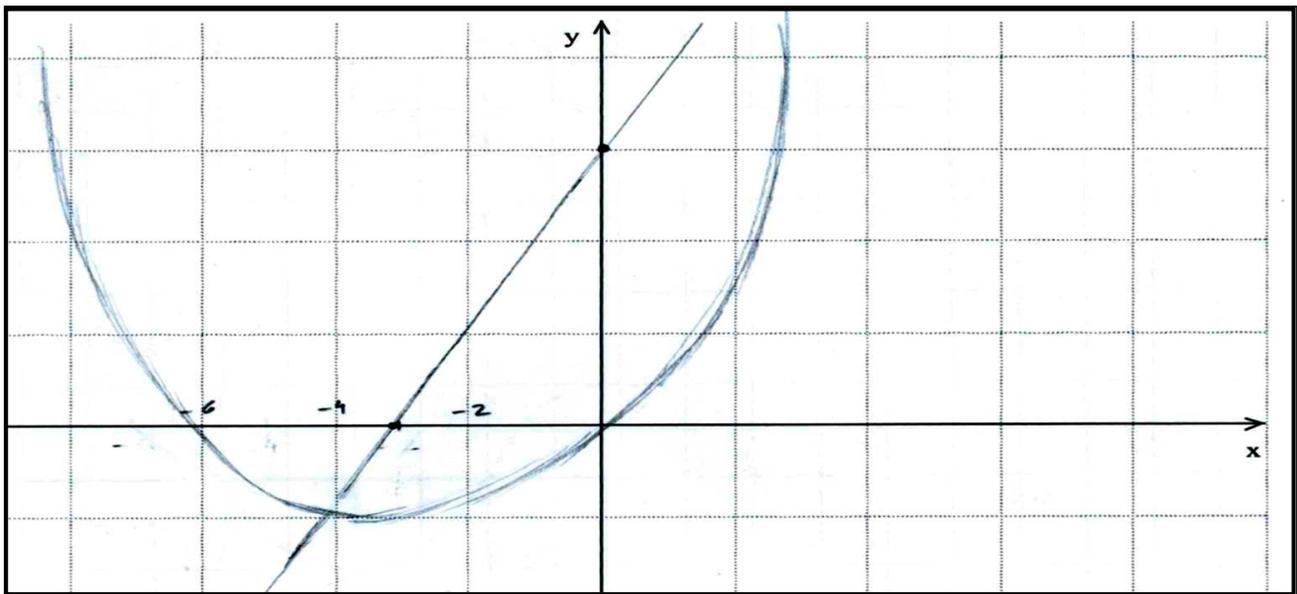


Figura 01

Fonte: Dados do pesquisador

Tentamos entender o que se passava, uma vez que o comando solicitava o esboço das retas tangentes. Iniciamos nossa investigação a respeito do fato que se apresentava, através dos diálogos com a professora pesquisadora, PP, as duplas e demais alunos:

*PP: - Vocês acham que a resposta para o item d) está completa?*

*D7: - Sim... Porque desenhamos o gráfico da função de 2º grau e o da reta.*

*D5: - Ué, pedia o gráfico da função e da reta tangente. Então, desenhamos a parábola e a derivada que é uma função do 1º grau; o gráfico é uma reta. Não foi isso que pedia?*

*PP: - O que está sendo solicitado é traçar o gráfico da função  $f$  e **das retas tangentes** ao gráfico nos pontos dos itens b e c. (Frisei)*

*D7: - Então... Está aí a reta desenhada!*

Chamei o restante da classe para a discussão:

*PP: - O que vocês acham dessa solução apresentada?*

*D5: - Eu acho que está certo.*

E mais ou menos 70% dos alunos concordaram que a resposta apresentada estava correta.

*PP: - Mas temos 3 pontos nos itens b) e c): um com abscissa -3, calculado no item b), e outros dois com as abscissas 0 e 6.*

*D5: - Então, se é reta, só preciso de 2 pontos para traçar; usamos  $x=-3$  e  $x=0$ .*

Diante dessa resposta, comecei a compreender o que estava se passando e perguntei para a sala toda:

*PP: - A reta traçada aqui é uma reta tangente ao gráfico de  $f$ ? Em que ponto?*

*D5:- Não.*

Tanto as duplas D5 e D7, que estavam apresentando suas resoluções na lousa, quanto os demais alunos, concordaram que no esboço apresentado, o que se via era uma reta secante. Perguntei novamente:

*PP: - Vocês acham que esta resposta está correta?*

*D7: - Agora não deve estar, não, né? Mas não sei por quê.*

Verifiquei, nesse momento, que a solução apresentada pela dupla D4 estava correta. Pedi, então, que essa dupla se levantasse a apresentasse a sua solução, mostrada na Figura 02:

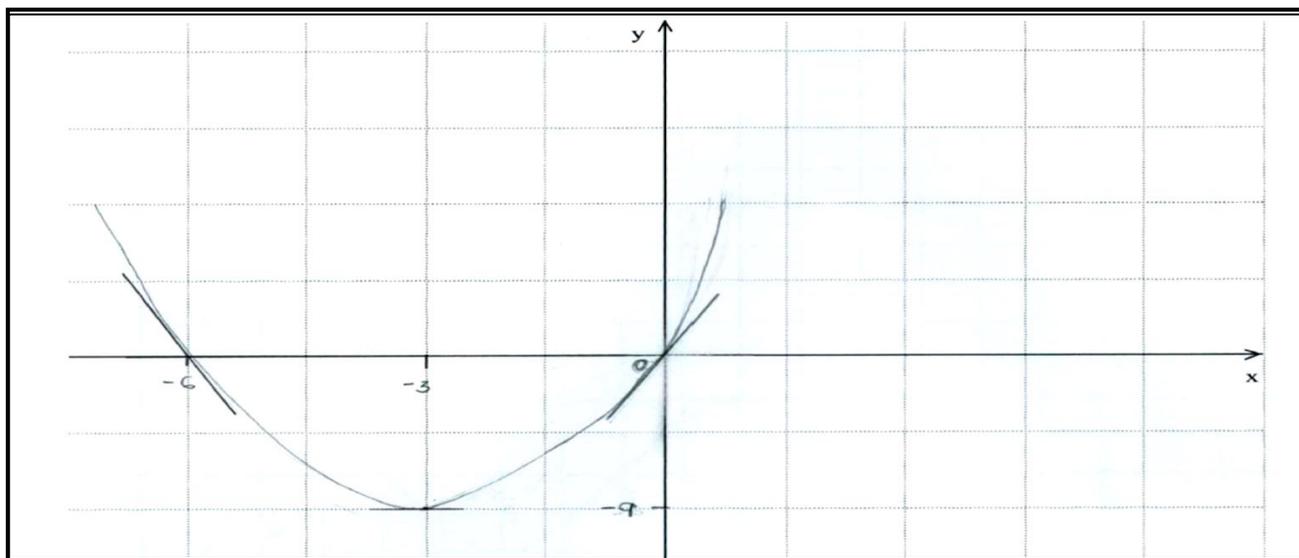


Figura 02. Resposta da dupla D4

Fonte: Dados do pesquisador

*D5: - Ah, é isso?!*

*PP: - Vocês determinaram a derivada da função  $f(x) = x^2 + 6x$  e encontraram a função  $f'(x) = 2x + 6$  que é uma função afim e cujo gráfico é uma reta. Certo?*

Diante da resposta positiva, perguntei:

*PP: - Alguma dúvida ou dificuldade ao determinar a função derivada?*

Não, foi a resposta da maioria. Alguns permaneceram em silêncio.

Perguntei para as duplas D5 e D7:

PP: - As retas que vocês estão vendo na solução dos colegas são tangentes ao gráfico? (estava me referindo à solução da dupla D4).

D5 e D7: - Sim. (E os demais colegas da sala concordaram). Mas agora é que não estou entendendo mais nada...

PP: - Vocês acham que a função derivada é sempre uma reta?

D5 e D7: - Sim.

E percebi que muitos outros concordavam.

Como o computador e o data show estavam na sala naquele momento, utilizando o *Winplot*, tracei o gráfico da função  $y = x^3 - 2x^2 - x + 2$  e, em seguida, traçar o gráfico de sua função  $y = f(x)$  derivada  $y = 3x^2 - 4x - 1$ . Chamei a atenção que, nesse caso, a função derivada não era uma reta. Tracei, também, retas tangentes ao gráfico da função apresentada para esclarecer a dúvida do que significa a função derivada, e de que a imagem de  $x_0$  pertencente ao domínio de  $f$  e  $f'$ , pela função  $f'$ , isto é,  $f'(x_0)$  é o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da função  $f$  no ponto de abscissa  $x_0$ . Essa situação está ilustrada na Figura 03, a seguir:

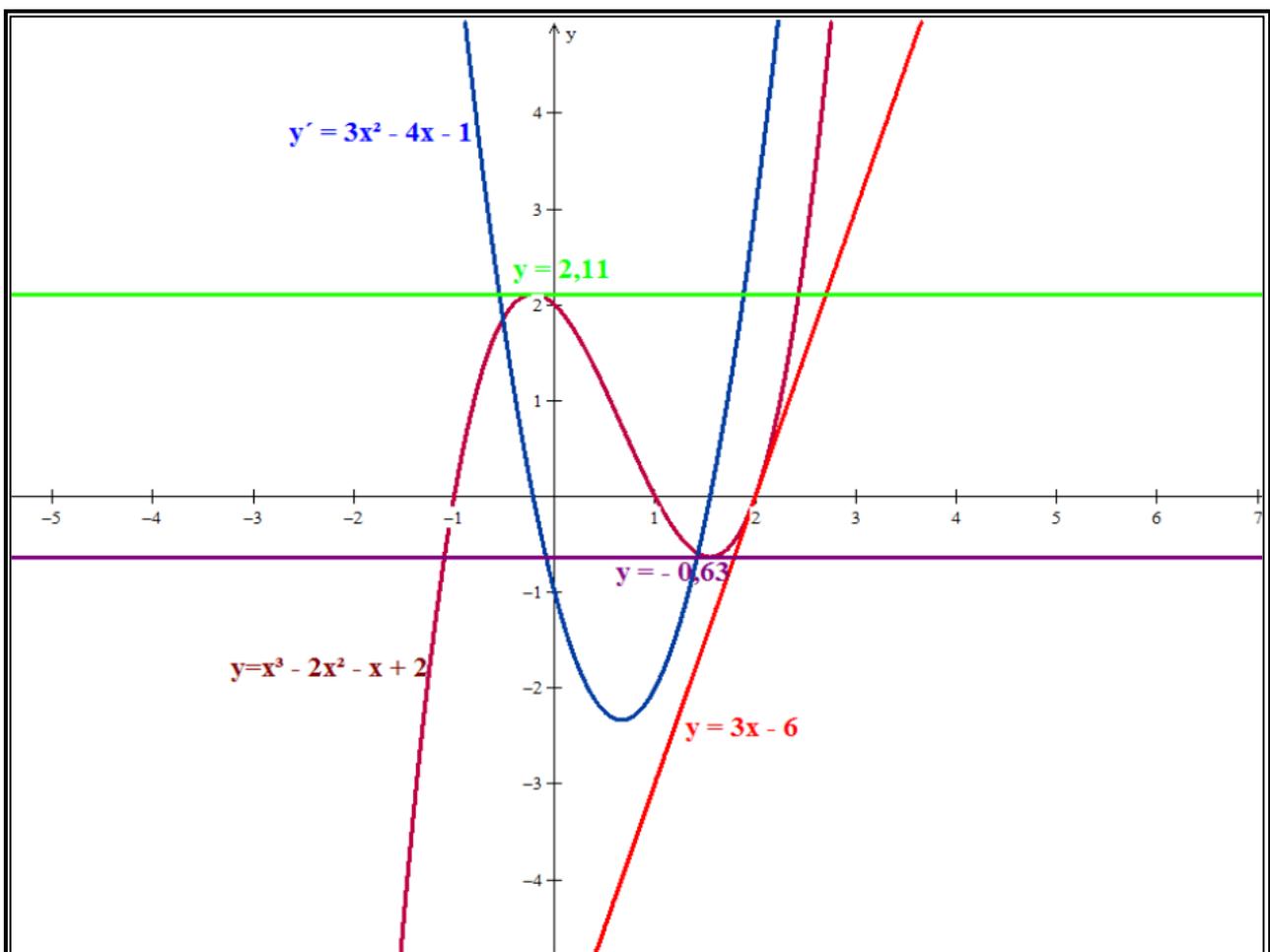


Figura 03: Gráficos traçados com o *Winplot* em sala

Fonte: Elaborada pelo pesquisador

Esse momento da plenária e da busca de consenso permitiu aos alunos se expressarem de modo que pudessem manifestar e sanar suas dúvidas com o professor e os demais colegas. Permitiu, assim, que a professora avaliasse as dificuldades apresentadas pelos alunos e mudasse sua estratégia de ensino, quando necessário.

Para finalizar o nosso encontro, realizei, também utilizando o *Winplot*, a atividade que deu início a toda essa frutífera discussão, finalizada com a figura seguinte:

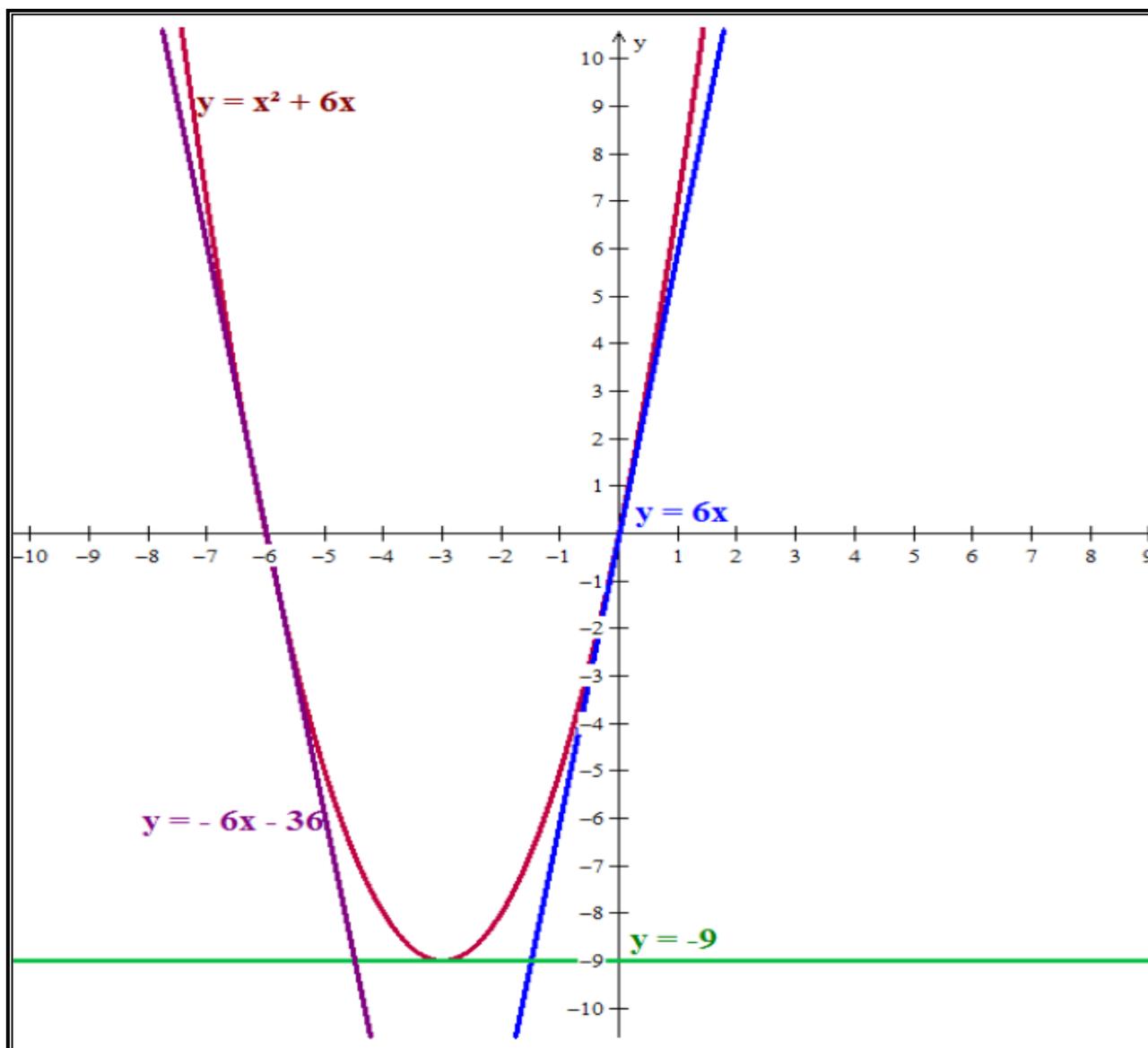


Figura 04: Gráficos referentes ao Problema 01/ atividade 03,  $f(x)$  e retas tangentes

Fonte: Elaborada pelo pesquisador

O episódio aqui relatado exemplifica como essa metodologia permite ao professor e ao aluno perceberem, de forma mais clara, dificuldades no aprendizado dos conteúdos e como favorece a tomada de decisões e mudanças de estratégias no ensino. Evidencia e ratifica uma característica marcante do ensino de Matemática através da resolução de problemas, ou seja, que a avaliação, nesse processo, é parte integrante do mesmo.

Ressaltamos a contribuição da tecnologia, que ajudou a ampliar a aprendizagem, pois o uso do software apresenta um “método dinâmico” para traçado de curvas.

## Considerações finais

Neste trabalho apresentamos um recorte de nossa pesquisa realizada no CEFET-MG, em que desenvolvemos o ensino de derivadas no 2º ano do Ensino Médio técnico, utilizando a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da Resolução de Problemas. Nela, o problema é o ponto de partida e orientação para a aprendizagem e a avaliação é integrada ao processo de ensino-aprendizagem. Está apoiada na tríade ensino-aprendizagem-avaliação, permitindo que esses 3 (três) elementos - ensino, aprendizagem-avaliação - se realizem de maneira integrada em sala de aula.

A avaliação, nos contextos de aprendizagem, deve servir como um processo que busca compreender o significado dos erros e dos acertos dos educandos a fim de estabelecer estratégias de ensino que possam ampliar sua aprendizagem. Assim, as tarefas utilizadas no processo de avaliação devem servir tanto para avaliar o desempenho do estudante quanto para auxiliar o professor na tomada de decisões educacionais.

Van de Walle (2009), ao defender o ensino de Matemática através da resolução de problemas, chama a atenção para o fato de que, nessa metodologia, o trabalho de avaliar deve começar onde estão os alunos, pois, se o professor coletar informações enquanto eles desenvolvem e discutem as atividades, poderá, em vários momentos, perceber a natureza da compreensão dos alunos sobre aquela ideia que está sendo trabalhada. Sobre isso, Allevalo e Onuchic acrescentam que

[...] a avaliação se realiza integrada ao ensino e à aprendizagem, pois nessa metodologia o professor tem a oportunidade de perceber constantemente as condições e conhecimentos que os alunos possuem, ajudando-os durante o processo, bem como os próprios alunos se percebem e se ajudam, sendo eliminado o caráter sancionador das avaliações somativas (ditas tradicionais). (ALLEVATO, ONUCHIC, 2014, p. 47)

Neste artigo, apresentamos um episódio ocorrido durante o desenvolvimento das atividades em sala de aula que exemplifica um dos aspectos da avaliação integrada, qual seja o da tomada de decisões educacionais por parte do professor. O episódio aqui relatado evidencia o momento em que os alunos participantes da pesquisa expõem suas dificuldades ao professor pesquisador, e as tentativas de saná-las antes da formalização do conteúdo. Após compreender as dificuldades apresentadas pelos alunos, o professor pesquisador mudou sua estratégia de ensino, recorrendo ao uso do software *Winplot* para traçar gráficos a fim de esclarecer as dúvidas apresentadas.

Para concluir, ressaltamos que, da forma como entendemos a avaliação, a realização das atividades em sala através da resolução de problemas, além de serem um instrumento de avaliação de desempenho, compreensão e aprendizado do aluno, são, também, um instrumento eficiente para avaliação no processo de ensino-aprendizagem. Nesse sentido, o professor tem a oportunidade de avaliar, constantemente, sua ação pedagógica e o rendimento dos seus alunos para, a partir daí, propor novas estratégias de ensino.

Consideramos, portanto, que avaliar é um processo que faz parte da ação docente. Diante disso, precisa ser coerente com a prática adotada em sala de aula.

## Referências

ALLEVATO, N. S. G. **Associando o computador à Resolução de Problemas fechados: análise de uma experiência**. 2005. 370 f. Tese (Doutorado)-Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Rio Claro, 2005.

\_\_\_\_\_; ONUCHIC, L. R. Ensinando matemática na sala de aula através da resolução de problemas. **Boletim GEPEM**, Rio de Janeiro, ano 31, n. 55, p. 133-154, jul/dez 2009. Disponível em <http://www.ufrj.br/SEER/index.php/gepem/article/view/54/87>. Acesso em 26 de set. 2015.

\_\_\_\_\_; ONUCHIC, L. R. Ensino-Aprendizagem-Avaliação: por que através da Resolução de Problemas. In: ONUCHIC, L. R., ALLEVATO, N. S. G.; NOGUTI, F. C. H.; JUSTILIN, A. M. (Orgs.). **Resolução de Problemas: Teoria e Prática**. Jundiaí, Paco Editorial, 2014.

ÁVILA, G. Limites e derivadas no Ensino Médio? **Revista do Professor de Matemática**, São Paulo, n.60, p.30-38. 2006.

BOGDAN, R. C. e BIKLEN, S. K. **Investigação Qualitativa em Educação Matemática: uma introdução à teoria e aos métodos**. Lisboa: Porto Editora, 1994.

BRASIL, Secretaria de Educação Básica. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio**. Brasília: Ministério da Educação/Secretaria de Educação Média e Tecnológica, 1999. 141 p. Disponível em: [http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com\\_content&view=article&id=12598%3Apublicacoes&Itemid=859](http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_content&view=article&id=12598%3Apublicacoes&Itemid=859). Acesso em: 04 de março de 2014.

\_\_\_\_\_; Secretaria de Educação Fundamental-Parâmetros curriculares Nacionais-3º e 4º ciclo do ensino fundamental, Matemática, Brasília, 1998. Disponível em <http://portal.mec.gov.br>. Acesso em 17 de fev. 2015

CORNU, B. Limits. In TALL, D. O. (Ed.). **Advanced Mathematical Thinking**. Boston: Kluwer Academic Publishers, 153–166, 1991.

ECHEVERRÍA, M. P. P. Aprender a resolver problemas e resolver para aprender. In: POZO, J. I. (Org.). **A solução de problemas em matemática**. Porto Alegre: Artmed, 1998. p.13-42.

NOGUTI, F. C. H. **Um curso de matemática básica através da resolução de problemas para alunos ingressantes da Universidade Federal do Pampa – campus alegrete**, 2015. 370 f. Tese. (Doutorado em Educação Matemática)-Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro.

ONUCHIC, L. R. Ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V.(Org.). **Pesquisa em educação matemática**. São Paulo: UNESP, 1999, p.199-220.

PAGANI, E. M. L; ALLEVATO, N. S. G. Ensino e aprendizagem de cálculo diferencial e integral: um mapeamento de algumas teses e dissertações produzidas no Brasil **Revista VIDYA**, Santa Maria, v. 34, n. 2, p. 61-74, 2014. Disponível em <http://periodicos.unifra.br/index.php/VIDYA/article/view/42/166>. Acesso em: 07 de jun. 2015

PEREIRA, V. M. C. **Cálculo no ensino médio: uma proposta para o problema da variabilidade.** 2009. 182 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática)- Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2009.

PINTO, G. M. da F. **Compreensão gráfica da derivada de uma função real em um curso de cálculo semipresencial.** 2008. 115 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática)- Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2008

PINTO, G. T. D. C. **Limite de função real no ensino médio:** uma proposta para o seu ensino e aprendizagem. 2010. 171 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática)-Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2010.

PIRONEL, M. **A avaliação integrada no processo de ensino-aprendizagem da Matemática.** 2002. 193 f. Dissertação (Mestrado)- Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Rio Claro, 2002.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas:** um novo aspecto do método matemático. Tradução de Heitor Lisboa de Araújo. Interciência. Rio de Janeiro, 1995.

Princípios e Normas para Matemática Escolar. APM. Lisboa, 2008

REZENDE, W. M. **O Ensino de Cálculo:** Dificuldades de Natureza Epistemológica. 450 f. Tese (Doutorado em Educação) Universidade de São Paulo. São Paulo, 2003.

ROSSI, M. I. **A aprendizagem das aplicações das integrais indefinidas em equações diferenciadas através da resolução de problemas.** 141 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática)-Universidade Cruzeiro do Sul, São Paulo, 2012.

SCHROEDER, T. L.; LESTER JR, F. K. Developing and Understanding in Mathematics via Problema Solving. In: TRAFTON, P. R. ; SHUTLE A. P. (ed.). **New Directions for Elementary School Mathematics.** Reston: NCTM, 1989, p. 31-42.

VAN DE WALLE, J. A. **Matemática no ensino fundamental: formação de professores e aplicação em sala de aula.** Tradução de Paulo Henrique Colonese. 6ª ed. Porto Alegre, Artmed, 2009.

WEIGAND, H. G. A discrete approach to the concept of derivative: ZDM Mathematics Education, jun. 2014.

Submissão: 30/11/2015

Aceite: 05/01/2016