O PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DA CONTAGEM: ALUNOS DE QUINTO ANO CONSTRUINDO O RACIOCÍNIO COMBINATÓRIO

A FUNDAMENTAL PRINCIPLE OF COUNTING: FIFTH GRADE STUDENTS BUILDING COMBINATORIAL REASONING

José Fernando Fernandes Pereira
Universidade Cruzeiro do Sul/ Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, jnandopereira@gmail.com

Edda Curi
Universidade Cruzeiro do Sul/ Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, edda.curi@gmail.com

Resumo

É propósito deste artigo, identificar como as crianças de uma classe de quinto ano, de uma escola da rede pública estadual, transitam por situações-problema que envolvem o raciocínio combinatório. Para tanto, foram implementadas sequências de atividades que nos permitissem essa avaliação. A metodologia utilizada é de análise documental, por meio de pesquisa nos protocolos dos alunos, buscando vestígios de seus encaminhamentos e categorizando essas resoluções com o propósito de inferir resultados que nos indicassem reavaliar, ou não, nossa abordagem. O referencial teórico que sustenta o trabalho é a Teoria dos Campos Conceituais de Gérard Vergnaud. Além de contribuir para a melhoria da qualidade do ensino de matemática nessa turma, nossa proposta consolida o desenvolvimento profissional da professora envolvida. Esta pesquisa tem financiamento da Coordenação de Aperfeiçoamento do Pessoal de Nível Superior – CAPES.

Palavras-chave: Educação Matemática; Ensino Fundamental; Campo Multiplicativo; Raciocínio Combinatório; Princípio Fundamental da Contagem.

Abstract

The purpose of this article is to identify how the children of fifth grade in a state public school transit by situation-problem involving the combinatorial reasoning. For this purpose, activities sequences were implemented so that we could evaluate them. The adopted methodology is documentary analysis that researches students' protocols, seeking their routing traces and categorizing those resolutions focusing the results that could or could not allow reevaluations of our method. The theoretical framework on what our work relies is The Theory of Conceptual Fields by Gérard Vergnaud. Besides contributing to an upgrading of mathematics practice of this group of students, our proposal strengthens the involved teacher professional development. This research is granted by Coordenação de Aperfeiçoamento do Pessoal de Nível Superior – CAPES.

Key-words: Mathematics Education; Elementary Education; Multiplicative Field; Combinatory Reasoning; Fundamental Principle of Counting.

Introdução

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (Brasil, 1999) sugerem que o raciocínio combinatório deva constituir a formação do estudante do Ensino Médio. Como proposta de construção dessa ideia, estudos realizados por pesquisadores comprovam que quanto mais cedo esse conteúdo for trabalhado, melhor desempenho a criança obterá na resolução de problemas relacionados ao tema, quando atingir aquele nível escolar.

O modelo matemático característico de problemas simples sobre a análise combinatória pode ser desenvolvido independentemente da experiência escolar (SCHLIEMANN, 2010). A pesquisadora afirma que experiências do cotidiano do aluno, fora da escola, no que refere ao raciocínio combinatório, podem proporcionar oportunidades significativas para a construção dessa ideia. Comenta, ainda, que a instrução escolar sobre análise combinatória, de modo geral, não se destina à análise individual de cada problema proposto, limitando-se ao uso de fórmulas e algoritmos para encontrar os resultados.

Foi nesse sentido que nos dispusemos a, com sequências de atividades do cotidiano dos alunos, analisar com eles cada situação-problema proposta nas sequências implementadas durante os encontros realizados na escola; sempre preocupados com o envolvimento da classe, por serem situações da realidade de cada um deles.

Fundamentação teórica

Como o raciocínio combinatório é uma das ideias do campo conceitual das estruturas multiplicativas, apoiamo-nos na Teoria dos Campos Conceituais do psicólogo Gérard Vergnaud para fundamentar nosso trabalho.

Vergnaud (2009) classifica duas categorias distintas para esse campo, quais sejam: isomorfismo de medidas e produto de medidas. É nesta última que o raciocínio combinatório se enquadra. Trata-se de uma relação ternária que envolve três quantidades das quais uma (criada para dar solução ao problema) é o produto das outras duas (as enunciadas no problema).

Borba e Azevedo (2012) organizam os problemas referentes a esse raciocínio em quatro situações distintas no que tange à ideia e à solução do problema, assim denominadas: produto cartesiano, permutação, arranjo e permutação. Classificam *produto cartesiano* por uma coleção de agrupamentos que esgotam todas as possibilidades de relacionar elementos diferentes de dois ou mais conjuntos distintos. As permutações, os arranjos e as combinações, são formações estabelecidas com elementos de um mesmo conjunto, o que torna o produto cartesiano uma associação diferenciada das demais.

Neste texto, não usaremos a nomenclatura *produto cartesiano*, por entendermos ser ela específica da multiplicação de conjuntos, onde o produto cartesiano de dois conjuntos é formado por pares ordenados, em que o primeiro elemento do par pertence ao primeiro conjunto e o segundo elemento do par pertence ao segundo conjunto. Nesse sentido, as respostas (pares ordenados) não representam, exatamente, as situações referentes ao tipo de problema em questão, uma vez que os agrupamentos formados nesses problemas são do tipo em que a ordem dos elementos não altera a resposta.

É esse tipo de agrupamento, aquele que estabelece a correspondência entre elementos de dois ou mais conjuntos, que apresentamos neste texto. A representação dos problemas que têm essa natureza pode ser feita por meio de uma tabela cartesiana ou por diagrama de árvore (também identificado por árvore das possibilidades).

Contextualização

Um projeto criado pela Profª. Drª. Edda Curi, com propósito de contribuir para a melhoria da qualidade de ensino de matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental e para o desenvolvimento profissional de seus professores, envolveu quinze escolas da Diretoria Regional de Ensino – DRE LESTE 1. Cada escola inscreveu cinco professores de cada ano escolar para, participando de reuniões quinzenais, discutir situações que, no decorrer da aula, invariavelmente ocorrem. Cada grupo de professores foi coordenado por um professor especialista de Matemática, cursando o Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Cruzeiro do Sul.

O projeto tem aprovação do Comitê de Ética, sob número 018/2015.

A classe envolvida neste trabalho pertence a uma escola pública estadual da cidade de São Paulo, região da DRE – LESTE 1 e possui 29 alunos regularmente matriculados. A professora da turma cursou Magistério, no nível médio e Pedagogia no nível superior, tem seis anos de atuação, dos quais, quatro, na Secretaria Estadual de Educação. Teve como motivação para engajar-se ao projeto “aprofundar meus conhecimentos metodológicos em matemática”.

Todas as atividades, envolvendo resolução de sequência de problemas, ou discussão com os alunos sobre suas propostas de resolução, ou intervenções (da professora da classe ou do professor pesquisador), ou aula expositiva sobre o tema a ser desenvolvido na aula, tiveram a participação do professor-pesquisador.

Este texto é parte de uma ampla pesquisa que vai originar uma tese de doutorado[1] e apresenta resultados de apenas uma das ideias do raciocínio combinatório; aquela que envolve a relação entre dois ou mais conjuntos distintos, determinando todos os possíveis casos de agrupamento que representam essa ideia.

Metodologia

Nossa pesquisa é do tipo documental, pois buscamos os resultados nos protocolos dos alunos, documentos sem qualquer outro tratamento científico anterior à nossa imersão (OLIVEIRA, 2012), além de ser de cunho qualitativo, pois nossa investigação tem caráter de pesquisa arqueológica, cuja preocupação é detectar vestígios deixados pelos alunos que possam conduzir-nos a relevantes resultados.

Para iniciarmos a pesquisa, procuramos identificar qual a familiaridade que os alunos possuíam com o tema, realizando uma sondagem em relação ao uso do material do EMAI[2]. Constatamos a existência de treze problemas referentes ao tema, distribuídos no Quadro

[1] Desenvolvida pelo primeiro autor deste texto sob a orientação do segundo autor.
[2] Educação Matemática nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental – material utilizado nas escolas públicas do Estado de São Paulo.

1. Para melhor compreensão das rubricas indicadas no referido quadro, definimos por *ação* a escolha de um dos elementos de cada um dos conjuntos envolvidos no problema. Assim, o problema que enunciar dois conjuntos implicará a formação de agrupamentos formados por duas ações; aquele que envolver três conjuntos demandará agrupamentos formados por três ações (indicado por triplo). Denominamos *problema direto* aquele em que são conhecidos os elementos dos conjuntos enunciados no problema (ou suas quantidades). *Problema inverso* representa aquele que o enunciado oferece as possibilidades (ou sua quantidade) de um dos conjuntos e dos agrupamentos formados, solicitando as possibilidades (ou a quantidade) do outro conjunto envolvido no problema. *Problema em tabela* foi a designação dada àqueles, cujos dados aparecem nesse formato.

Um dos problemas foi apresentado tanto na forma inversa quanto em formato de tabela, indicado dos dois modos no quadro a seguir e apenas dois problemas foram contemplados com três ações envolvidas, assim distribuídos:

Quadro 1 – Quantidade de exercícios por unidade, no material do EMAI.

Atividade	Problema direto	Problema inverso	Problema em tabela
7.6	2	1	0
9.7	1	0	0
10.1	0	1	0
18.3	1	0	0
28.4	2 (1 triplo)	0	1
28.5	1	1	2
29.5	1 (triplo)	0	0

Fonte: Dados coletados pelos autores.

Sondagem do conhecimento sobre combinatória

Quando fomos à escola, as Atividades 28 e 29, no material do EMAI, ainda não haviam sido desenvolvidas, portanto, durante este ano, os alunos só tinham tido contato com seis problemas e todos envolvendo apenas duas ações. Nenhum em forma de tabela.

No primeiro momento, implementamos uma sequência de problemas que abrangia todos os tipos de situação: problema direto com duas ações, problema inverso com duas ações, problema direto com três ações e problema em forma de tabela. Estavam presentes 22 alunos.

Os problemas propostos foram:

Problema 1 (problema direto com duas ações): Uma sorveteria oferece para os sorvetes de Nata, Morango, Limão e Flocos as seguintes coberturas: baunilha, chocolate e maracujá. Quais são as possibilidades de escolha de sorvete com um sabor e uma cobertura? Quantas são?

Problema 2 (problema inverso): Uma lanchonete oferece 15 tipos diferentes de sanduíche. Cada sanduíche é feito com um tipo de pão e uma espécie de recheio. Sabendo que há cinco espécies de recheio, quantos são os tipos de pão?

Problema 3 (problema direto com três ações): Um rapaz dispõe de três calças, cinco camisas e dois pares de sapatos. Quais são as possíveis maneiras que ele poderá se vestir, usando uma peça de cada tipo? Quantas são as possibilidades?

Problema 4 (problema em forma de tabela): Em uma cafeteria são servidos diversos tipos de bebidas e de biscoitos, conforme o quadro abaixo:

Bebidas	Biscoito de
Cafezinho	Baunilha
Mate gelado	Chocolate
Chocolate quente	Maçã
Café com leite	Morango
Limonada	Nata

Quantas são as possibilidades de combinar um tipo de bebida com um tipo de biscoito?

Encontramos os seguintes percentuais para o primeiro problema: 9 alunos (40,9%) acertaram quantas são as possibilidades, mas apenas 3 desses indicaram quais eram as possibilidades; 13 alunos (59,1%) erraram quantas são as possibilidades e, desses, nenhum indicou quais seriam elas.

No segundo problema, apenas 2 alunos (9,1%) indicaram que o produto entre o número de possibilidades para os pães e o número de possibilidades para os recheios, produziria o número de possibilidades de sanduíches; 9 alunos (40,9%) representaram a subtração como inversa da multiplicação e indicaram 15 – 5 = 10 sanduíches; os demais, 11 (50,0%) não ofereceram possibilidade de identificar o raciocínio desenvolvido.

Apesar do terceiro problema, por envolver três ações, apresentar mais dificuldade para representar a árvore das possibilidades, mesmo que erradas, 6 alunos (27,3%) assim resolveram; 5 alunos (22,7%) acertaram o problema ao identificar que o produto das três possibilidades para cada uma das ações produziria o número de possibilidades do vestuário completo.

O quarto problema pareceu-nos ser de melhor identificação para os alunos, uma vez que 10 alunos (45,5%) acertaram a resposta, apesar de, até aquele momento, no caderno do EMAI, ainda não terem resolvido problema desse tipo.

Uma vez diagnosticadas as dificuldades nas resoluções dos problemas propostos, voltamos à escola, num segundo momento, com o propósito de investigar com os alunos, individualmente, arguindo-os sobre como entenderam o enunciado, esquematizaram uma solução e representaram no papel. Após essa prática, resolvemos cada um dos problemas, apresentando algumas variações na resolução de cada um deles.

Retornamos, novamente, à escola com o propósito de verificar se nossa prática de diagnosticar as dificuldades, questionar os encaminhamentos e propor caminhos diversos para resolver os problemas, apresentaria resultados positivos na construção do conhecimento dessa ideia do raciocínio combinatório. Para tanto, aplicamos uma nova sequência de problemas, envolvendo as mesmas características dos problemas selecionados para a sequência anterior. Estavam presentes 26 alunos, nesse dia.

Os problemas propostos foram:

Problema 5 (problema direto com duas ações): Existem quatro caminhos que ligam a casa de Paulo à casa de sua avó e três caminhos ligando a casa de sua avó até a escola. Quantas são as possibilidades de Paulo ir para a escola, passando pela casa da avó?

Notamos uma sensível melhora na resolução deste tipo de problema, pois 18 alunos (69,2%) acertaram quantas são as possibilidades, quer pela indicação por meio de representação, quer pela apropriação do Princípio Fundamental da Contagem. Além desses, 4 alunos (15,4%) indicaram corretamente, mas erraram o resultado.

A seguir apresentamos o protocolo de um aluno que encaminhou sua solução, usando uma representação e, também, a aplicação do Princípio Fundamental da Contagem.

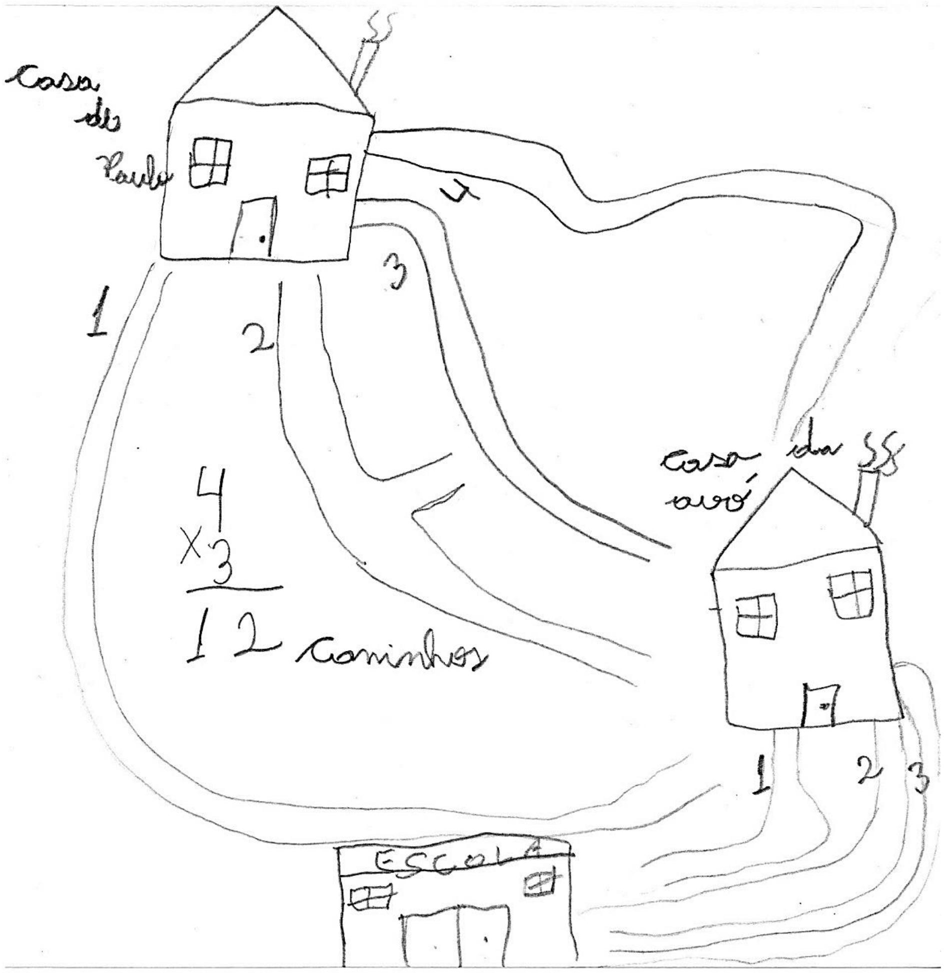

Figura 1: Encaminhamento proposto por um aluno sobre o problema 5.
Fonte: Arquivo do pesquisador.

O protocolo a seguir evidencia que a dificuldade encontrada pelo aluno não se referiu à interpretação nem à representação do enunciado do problema. Sua dificuldade está caracterizada pela resposta inadequada, mostrando não identificar os fatos fundamentais (tabuada do 3).

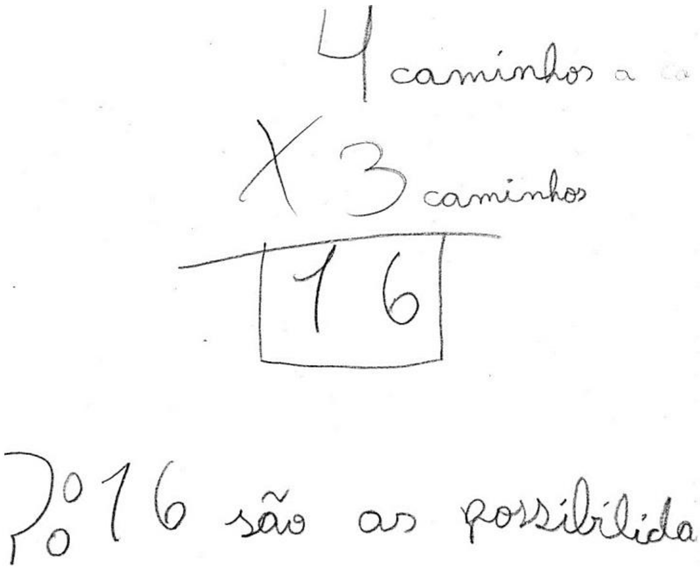

Figura 2: Encaminhamento proposto por um aluno sobre o problema 5.
Fonte: Arquivo do pesquisador.

Problema 6 (problema inverso): Um menino tem 18 modos diferentes de apresentar-se para jogar bola no seu clube de futebol, usando um calção e uma camiseta. Sabendo que são três tipos diferentes de calção, quantas são as diferentes possibilidades de camisetas?

Assim como no problema anterior, também para esta situação que envolve a operação inversa da multiplicação, os alunos apresentaram progresso na resolução. Foram 10 alunos (38,5%) que obtiveram êxito no encaminhamento, representando de várias formas diferentes; dois deles com requintada perfeição, como mostra o protocolo a seguir:

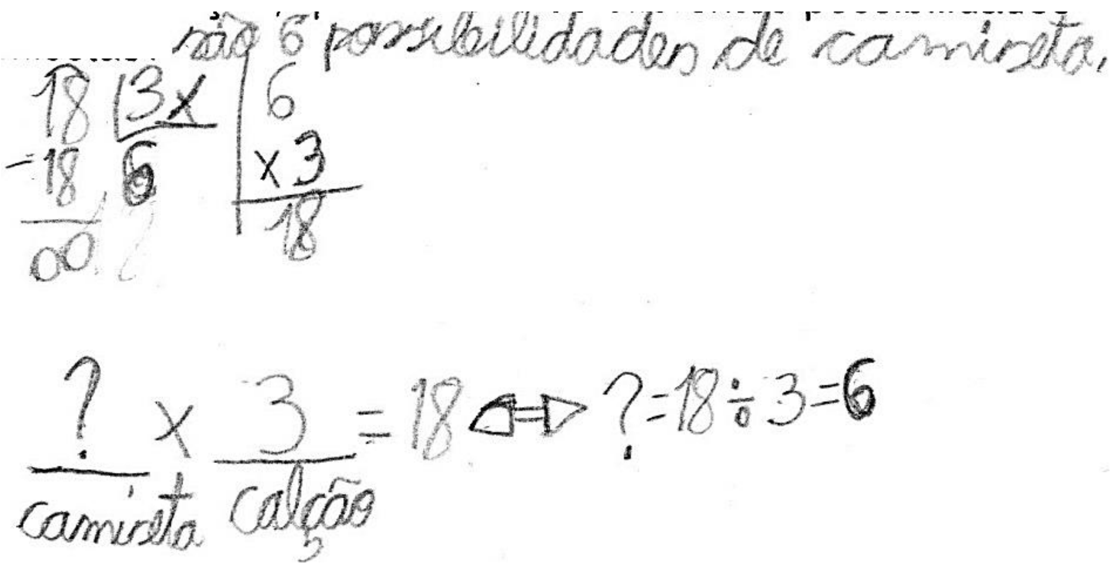

Figura 3: Encaminhamento proposto por um aluno sobre o problema 6.
Fonte: Arquivo do pesquisador.

Mesmo representando corretamente a divisão como inversa da multiplicação, 2 alunos (7,7%) não obtiveram sucesso na execução do algoritmo.

Ainda representaram a subtração como inversa da multiplicação, 4 alunos (15,4%); porém, índice menor que o registrado anteriormente.

Problema 7 (problema direto com três ações): No almoço de um restaurante são oferecidos quatro tipos de legumes (cenoura, abobrinha, pimentão e pepino), três tipos de carne (frango, peixe e linguiça) e dois tipos de verdura (alface e espinafre). De quantas formas diferentes é possível fazer um prato com esses três tipos de alimentos? Quais são essas formas?

Este problema envolve duas perguntas (quantas e quais) que serão analisadas separadamente.

Sobre quais eram as maneiras possíveis, apesar de haverem tentado, por meio de árvore de possibilidades, chegar ao resultado em problema semelhante, nenhum aluno (0,0%) havia logrado êxito na especificação de todas elas.

Após a intervenção, ainda que fossem 24 formas diferentes de organizar o prato, 7 alunos (26,9%) indicaram corretamente todas as possibilidades, representadas de variadas maneiras.

Apresentamos a seguir, dois protocolos que simbolizam formas distintas de expor como pensaram.

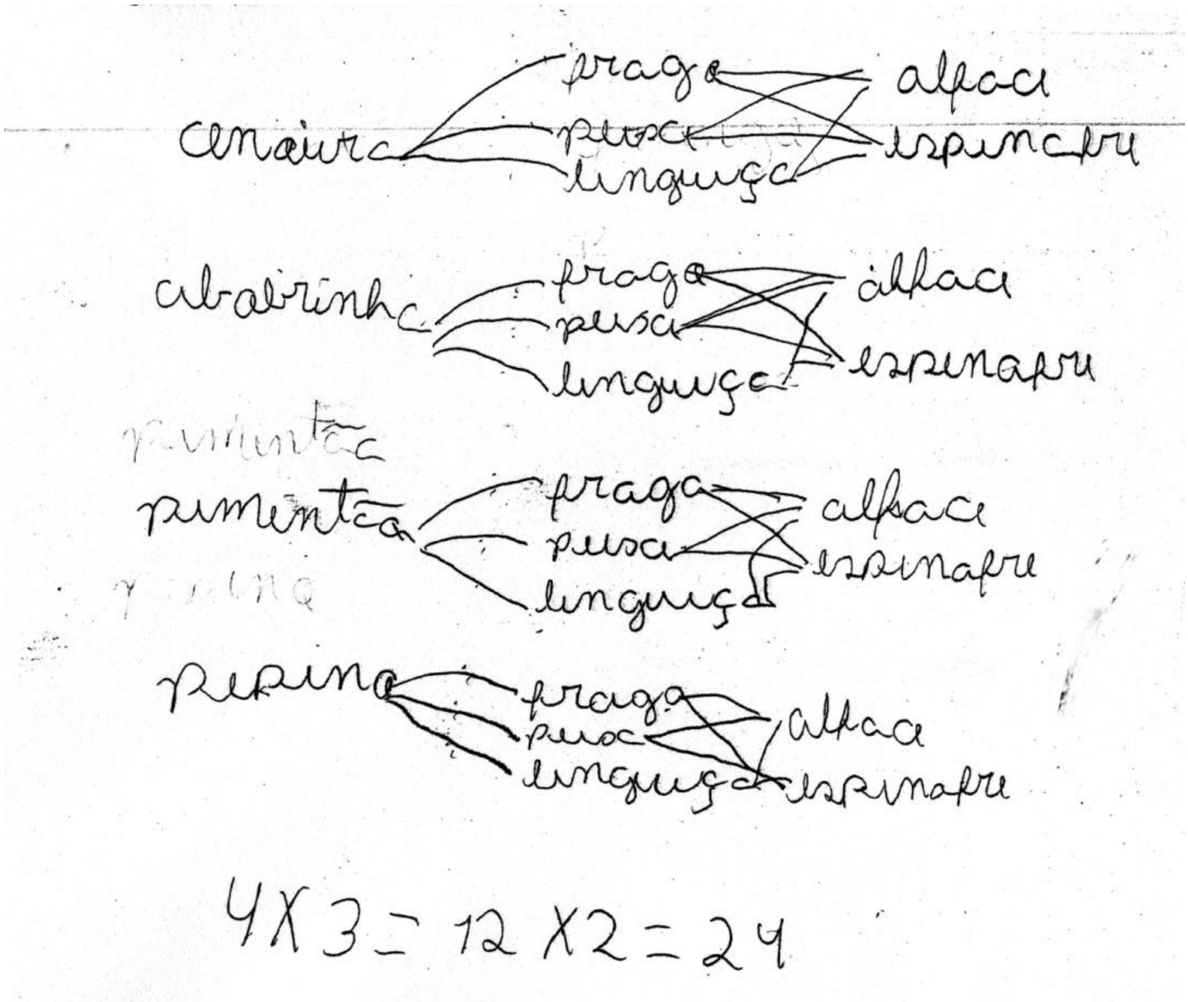

Figura 4: Encaminhamento proposto por um aluno sobre o problema 7.
Fonte: Arquivo do pesquisador.

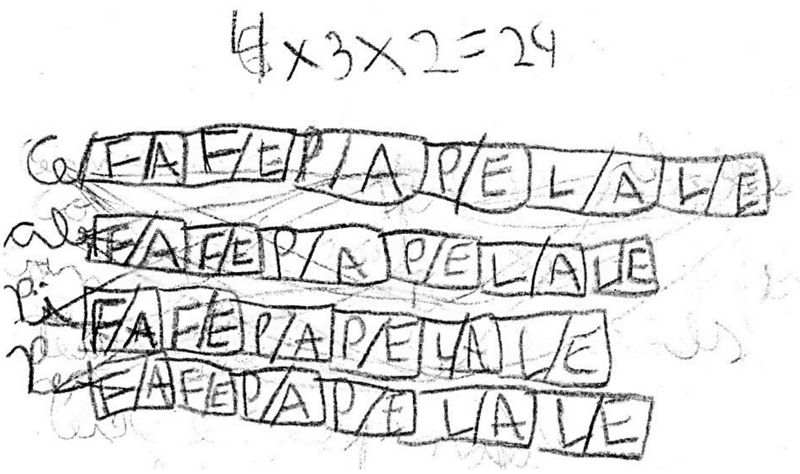

Figura 5: Encaminhamento proposto por um aluno sobre o problema 7.
Fonte: Arquivo do pesquisador.

Em relação a quantas eram as maneiras possíveis, enquanto apenas 5 alunos (22,7%) lograram êxito durante a primeira investigação, no segundo momento, 15 alunos (57,7%) – numericamente ou em diagrama de árvore – indicaram corretamente o total de formas diferentes de constituir os pratos.

A seguir, apresentamos como dois alunos representaram seus esquemas, na tentativa de resolver o problema.

Figura 6: Encaminhamento proposto por um aluno sobre o problema 7.
Fonte: Arquivo do pesquisador.

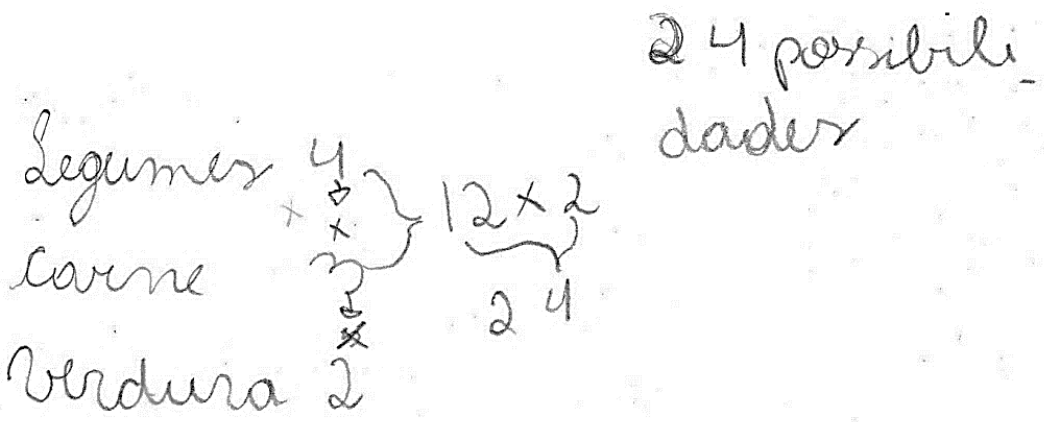

Figura 7: Encaminhamento proposto por um aluno sobre o problema 7.
Fonte: Arquivo do pesquisador.

Problema 8 (problema em forma de tabela): Há brinquedos de um Parque de diversões que oferecem brindes. No quadro abaixo estão apresentados os brinquedos que dão essa vantagem e os brindes oferecidos:

Brinquedo	**Brinde**
Roda gigante	Sorvete
Trem fantasma	Pipoca
Carrossel	Urso de pelúcia
	Maçã do amor

Quantas são as possibilidades de combinar um tipo de brinquedo utilizado com um brinde oferecido?

Já no primeiro momento, este foi o tipo de problema que apresentou o maior percentual (45,5%) de acerto. Agora, na segunda apresentação desse modelo, 21 alunos (80,8%) indicaram a quantidade correta. Enquanto um aluno descreveu os doze agrupamentos, mas não quantificou o resultado, dois alunos registraram o resultado correto, mas não apresentaram qualquer esquema de resolução. Apenas dois alunos, sem qualquer registro de resolução, apresentaram resposta inadequada.

Dos 21 alunos que acertaram o problema, ainda que não fosse solicitado, cinco deles indicaram as duas formas de resolver o problema – árvore das possibilidades e princípio fundamental da contagem.

Apresentamos, na sequência, dois protocolos que evidenciam o fato.

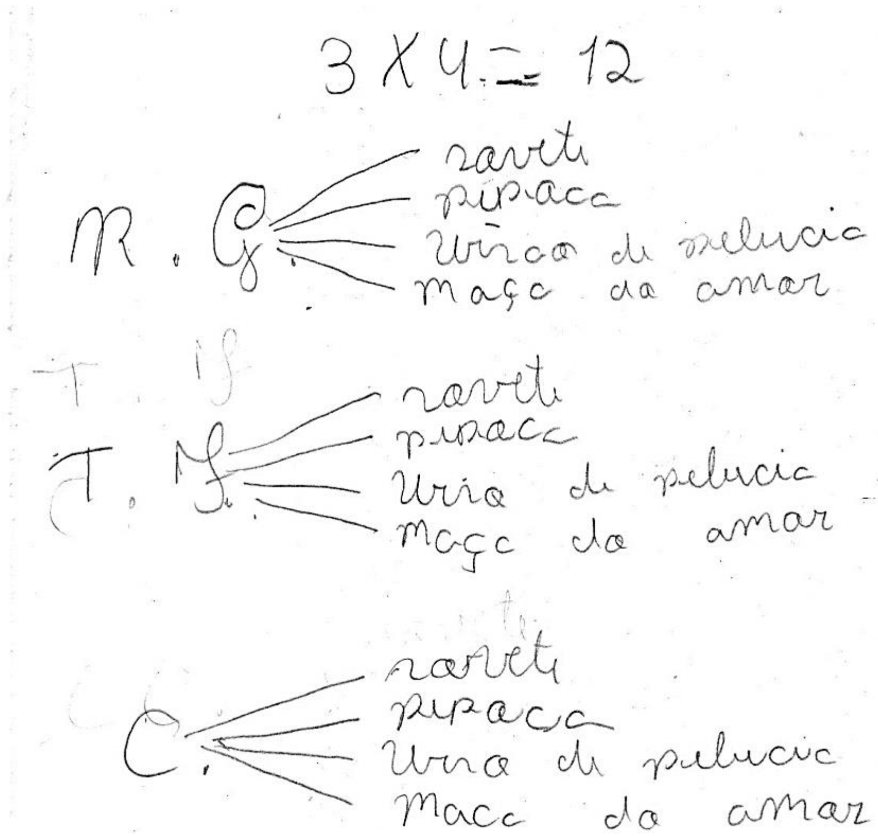

Figura 8: Encaminhamento proposto por um aluno sobre o problema 8.
Fonte: Arquivo do pesquisador.

O protocolo a seguir apresenta a clara compreensão, pelo aluno, do significado de multiplicação, em que, se uma ação (andar de roda gigante) possibilita quatro tipos diferentes de brinde, então três ações distintas oferecerão 3 X 4 = 12 possibilidades de acontecer o uso de um brinquedo com o ganho de um brinde.

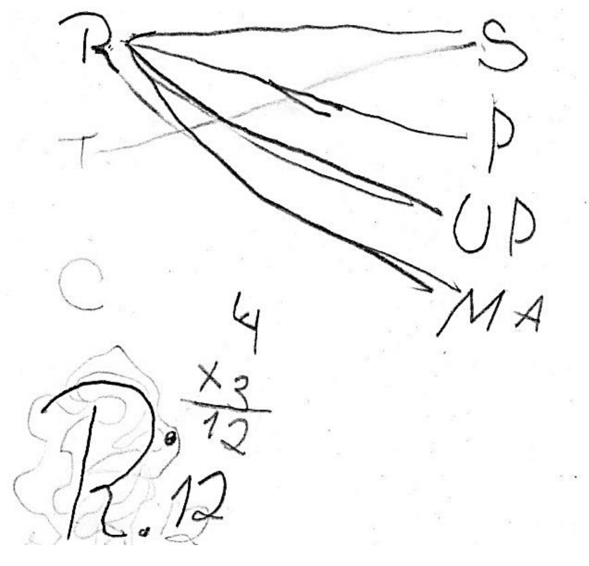

Figura 9: Encaminhamento proposto por um aluno sobre o problema 8.
Fonte: Arquivo do pesquisador.

Considerações finais

Por entendermos que o desenvolvimento da competência matemática dos alunos só se dá por meio de atividades que lhes sejam significativas, nossa proposta, para as sequências de atividades, foi a de elaborar situações-problema diversificadas e compatíveis com suas realidades.

Acreditamos, ainda, que para o desenvolvimento dessa competência matemática e consequente melhora no desempenho das atividades escolares é necessário melhorar o conhecimento matemático dos professores que trabalham com os anos iniciais do Ensino Fundamental.

O Projeto do qual participamos – autores deste texto, escola, classe público-alvo, professora da turma – dá vez e voz a todos os envolvidos no que tange às discussões sobre os temas trabalhados. Relação direta do professor-pesquisador com sua orientadora, com a professora da turma e seus alunos tornaram muito próximo o suporte do professor-pesquisador à professora da classe pesquisada, agindo como um parceiro mais experiente.

Esse acompanhamento permitiu-nos dosar adequadamente as sequências de atividades que tinham como propósito, identificar como as crianças transitam por situações de natureza combinatória.

Nesse sentido, pudemos observar que para o *problema direto com duas ações*, que interpretávamos ser o de maior facilidade para as crianças, não identificamos a simplicidade esperada, entretanto, após a intervenção, pudemos constatar considerável melhora nos resultados.

Para o *problema inverso,* que já antevíamos apresentar dificuldade na resolução durante o primeiro momento, foi-nos possível observar que, no segundo momento, apesar de toda dificuldade que, habitualmente, os alunos têm nos problemas que envolvem a operação inversa, 46,2% (38,5% + 7,7%) dos alunos se apropriaram da compreensão dessa ideia.

Para o *problema direto com três ações,* ainda não trabalhado com eles no caderno do EMAI, entendíamos ser possível que tivessem maior dificuldade, tanto que nenhum aluno identificou **quais** eram as maneiras, apesar de 22,7% dos alunos terem registrado **quantas** eram. No segundo momento, após a intervenção, esses índices subiram para 26,9% em relação a **quais** eram as maneiras e 57,7% em relação a **quantas** eram.

Para o *problema em forma de tabela,* também não trabalhado no caderno do EMAI, até aquele momento, os alunos não apresentaram a dificuldade que era esperada, pois 10 alunos (45,5%) acertaram a resposta, ainda que apenas 8 deles tenham feito a indicação do produto. Já no segundo momento, o índice de acerto atingiu a marca de 80,8%.

Esses resultados apresentados refletem a importância da integração Universidade-Escola num trabalho conjunto, no qual a universidade participa com o apoio na formação do professor e a escola, com a possibilidade na melhoria da qualidade de ensino.

Referências

BORBA, R. E. S.; AZEVEDO, J. A construção de árvores de possibilidades com recurso computacional: o desenvolvimento do raciocínio combinatório de Karine e Vitória. In: SPINILLO, A. G.; LAUTERT, S. L. (Orgs.) **A pesquisa em psicologia e suas implicações para a educação matemática.** Recife: Ed. Universitária da UFPE, 2012.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** ensino médio. Brasília: Ministério da Educação, 1999.

SCHLIEMANN, A. A compreensão da análise combinatória: desenvolvimento, aprendizagem escolar e experiência diária. In: CARRAHER, T.; CARRAHER, D.; SCHLIEMANN, A. **Na Vida Dez, Na Escola Zero**. São Paulo: Cortez Editora, 2010.

VERGNAUD, G. **A criança, a matemática e a realidade: problemas do ensino da matemática na escola elementar**. Trad. Maria Lúcia Faria Moro. Curitiba: Ed. Da UFPR, 2009.

______. A teoria dos campos conceptuais. In: BRUN, J. (Dir.) **Didáctica das Matemáticas**. Lisboa: Instituto Piaget, 1996.

Submissão: 30/11/2015

Aceite: 20/05/2016