

A UTILIZAÇÃO DE *APPLETS* NO GEOGEBRA PARA A APRENDIZAGEM DA TRIGONOMETRIA NO ENSINO MÉDIO

THE USE OF *APPLETS* IN GEOGEBRA TO THE LEARNING OF TRIGONOMETRY IN HIGH SCHOOL

Edcarlos Pereira

Universidade Federal de Alagoas, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, edcarlos_pereira@hotmail.com

Ediel Azevedo Guerra

Universidade Federal de Alagoas, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, edielguerra@hotmail.com

Resumo

Este artigo traz o relato de uma pesquisa realizada em uma escola pública do município de Marechal Deodoro/AL com alunos do Ensino Médio, cujo objetivo principal era investigar as dificuldades e os efeitos de aprendizagem produzidos pela aplicação de uma determinada sequência didática sobre conceitos fundamentais da trigonometria. As atividades dessa sequência incluem oito *Applets*¹ (miniaplicações) no *software* GeoGebra juntamente com oito atividades investigativas elaboradas tendo como referenciais metodológicos a Teoria dos Registros de Representação semiótica de Duval, a Teoria das situações didáticas de Brousseau e a Engenharia Didática de Artigue. Os resultados, após a análise das atividades, apontam que os *Applets* são um recurso didático que tornam as aulas mais dinâmicas, motivando os estudantes e favorecendo a construção de conjecturas, de propriedades e de relações trigonométricas. A partir dos resultados obtidos no desenvolvimento, na aplicação e na análise da sequência didática, foi criado um *blog*² que pode ser utilizado pelos professores e alunos do Ensino Médio na abordagem da trigonometria.

Palavras-chave: Applet. Blog. GeoGebra. Sequência Didática. Trigonometria.

Abstract

This article presents a research conducted in a public school in Marechal Deodoro/AL with students from High School, whose main objective was to investigate the difficulties and the learning effects produced by the application of a particular teaching sequence on fundamental concepts of trigonometry. The activities of this sequence include eight Applets (applets) in the software GeoGebra along with eight elaborate investigative activities having as methodological references to Representation Records Theory of Semiotics of Duval, the Theory of didactic situations Brousseau and Didactic Engineering

¹ Applet é uma mini-aplicação que é executada uma atividade específica dentro de um programa.

² O blog pode ser acessado a partir do seguinte endereço: <http://edcarlospereira.wix.com/trigonometriaapplets>.

Artigue. The results, after the activities analysis, demonstrate that *Applets* are a didactic tool that makes the classes more dynamic, motivating the students and favoring the conjectures of properties and trigonometric relations. Based on the results obtained during the development, application and analysis of the didactic sequence, it was created a blog that can be used by teachers and students from High School in the approach to trigonometry.

Keywords: Applet. Blog. GeoGebra. Didactic Sequence. Trigonometry.

Introdução

A trigonometria, como bem se sabe, é um conteúdo de muitas aplicações científicas e tecnológicas. Essa afirmação pode ser facilmente constatada manuseando-se livros de astronomia, física, eletrotécnica, cartografia, construção civil etc. Entretanto, nas salas de aula de matemática no Ensino Médio temos constatado grande dificuldade dos estudantes na assimilação desse conteúdo.

Em consonância com essa constatação empírica, se encontra em Dionizio e Brandt (2011), por exemplo, que os alunos do Ensino Médio têm muita dificuldade em compreender conceitos trigonométricos básicos devido a esses objetos matemáticos aparecerem usualmente de forma abstrata.

Motivados pela necessidade de tornar as aulas de trigonometria mais dinâmicas e interativas, resolvemos criar uma sequência didática para o ensino e a aprendizagem dos conceitos fundamentais da trigonometria de caráter menos formal, com a mediação do *software* educacional GeoGebra, haja vista a gratuidade de acesso e facilidade de manuseio desse software. A sequência didática foi elaborada visando a construir uma resposta para a seguinte pergunta: como o *software* GeoGebra pode propiciar a aprendizagem dos conceitos fundamentais da trigonometria no Ensino Médio?

Para construção, aplicação e análise da sequência didática, tomaram-se como base os seguintes referenciais teórico-metodológicos: Teoria das Situações Didáticas de Guy Brousseau (FREITAS, 2012), Teoria de Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval (DAMM, 2012; FLORES, 2006), Engenharia Didática de Michèle Artigue (MACHADO, 2012).

A sequência didática criada abrange os seguintes conceitos básicos da trigonometria: teorema de Pitágoras, razões trigonométricas no triângulo retângulo, graus e radianos, círculo trigonométrico, seno, cosseno e tangente no círculo trigonométrico e funções trigonométricas.

Como será detalhado no corpo deste trabalho, para apresentação e exploração dos oito conceitos citados no parágrafo anterior, foi criado, para cada um deles, um *Applet* no *software* GeoGebra que os alunos puderam manipular, visualizar, analisar para entender e responder atividades propostas.

Resumo de algumas pesquisas acerca do ensino de trigonometria com o GeoGebra

No que se segue, apresentamos um quadro com uma síntese de algumas considerações acerca do emprego do GeoGebra no ensino da matemática em algumas pesquisas recentes.

Quadro 01 – Resumo de algumas pesquisas – ensino de trigonometria com o GeoGebra

Autor e ano de publicação	Pontos relevantes da pesquisa
THOMPSON (2008)	Enfatiza o caráter problemático em estratégias de ensino da trigonometria que não apresentam um modo de estabelecer uma conexão entre o contexto da trigonometria em triângulos retângulos e o contexto da trigonometria no ciclo trigonométrico. Propõe que se estabeleça essa conexão por meio do conceito da medida angular (graus e radianos).
DAMASCO (2010)	Inicialmente, afirma que a utilização de um meio computacional, por si só, não assegura melhoria no ensino. Para que se produza os efeitos desejados é necessário que essa utilização se dê com o auxílio de um procedimento metodológico adequado. Esse autor certifica que o GeoGebra tornou-se um laboratório que leva os alunos a se envolverem com o ensino de Matemática vivenciando o modo de ‘fazer Matemática’, pois eles experimentam, interpretam, visualizam, induzem, conjeturam, abstraem e generalizam. Mais adiante, ele comprova que “a metodologia baseada na teoria de Registros de Representação Semiótica de Duval aliada ao uso do GeoGebra” contribui muito para que os alunos superem as dificuldades em relação ao ensino da trigonometria.
LOPES (2010)	Sobre o uso do <i>software</i> GeoGebra no ensino de trigonometria, destaca alguns potencialidades, tais como: construção, dinamismo, investigação, visualização e argumentação. Informa também que algumas dificuldades em relação ao ensino de trigonometria por parte dos alunos podem ser minimizadas. Ela conclui “[...] que o uso do <i>software</i> GeoGebra pode auxiliar na resolução de problemas de trigonometria, especialmente em atividades investigativas, de forma que os estudantes possam interagir com as figuras construídas.”
ZENGIN, FURKAN E KUTLUCA (2012)	Relatam que o ensino da trigonometria em uma perspectiva construtivista apresenta resultados mais efetivos de aprendizagem quando nele são utilizados softwares dinâmicos como ferramenta auxiliar. Neste trabalho eles utilizam o GeoGebra.
DEMIR (2012)	Ressalta a necessidade de que se apresente uma estratégia de ensino que permita conexões entre os três contextos da trigonometria: dos triângulos retângulos, do ciclo trigonométrico e dos gráficos das funções seno e cosseno. Propõe um enfoque no qual se parte da relação direta entre o percurso anti-horário sobre o ciclo trigonométrico e a construção do gráfico da função seno antes mesmo de uma introdução preliminar do conceito de radianos.
FIGUEIREDO (2013)	Em suas reflexões sobre o estudo do <i>software</i> GeoGebra no ensino de Funções Trigonômicas, Figueiredo (2013) concorda com Lopes (2010) em relação aos <i>softwares</i> de geometria dinâmica, os quais, segundo ele, auxiliam nas atividades investigativas, quando os alunos se envolvem, e há melhoria da prática quando o professor atua como protagonista em busca de novas metodologias.
PERSICANO (2013)	Afirma que o uso de uma ferramenta tecnológica é importante, juntamente com a interdisciplinaridade, para melhoria da didática do professor, com o principal objetivo de atingir êxito no ensino e aprendizagem. Pois, com o uso das novas tecnologias, neste caso o <i>software</i> GeoGebra, a abstração dos alunos melhora a partir da dinâmica e interação com objetos matemáticos na tela do computador.

Fonte: Pereira, 2015.

Referenciais teóricos e procedimentos metodológicos

Como já mencionado anteriormente, os instrumentos teóricos que nos forneceram princípios básicos fundamentais para realização de nossa pesquisa, foram: a Teoria das Situações Didáticas de Guy Brousseau, a Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval e a Engenharia Didática de Michèle Artigue.

A seguir é apresentado nos quadros 02, 03 e 04 um resumo de cada referencial teórico.

Quadro 02 – Resumo da teoria das situações didáticas

Teoria das Situações Didáticas de Brousseau (FREITAS, 2012)	
Recomenda-se que o professor faça a devolução de um bom problema ou proponha um jogo de estratégia. Na devolução o professor cede ao aluno uma parte da responsabilidade pela aprendizagem.	
Ocorrências	Resumo
Situação adidática de ação	O aluno tem o primeiro contato com o problema e utilizando conhecimentos anteriores ele busca uma solução para o problema.
Situação adidática de formulação	Os alunos elaboram explicações das estratégias utilizadas.
Situação adidática de validação	Os alunos socializam as respostas, com a intermediação do professor.
Situação de institucionalização	O professor sintetiza e expõe os conhecimentos relevantes durante a validação.

Fonte: Pereira, 2015.

Quadro 03 – Resumo da teoria de representações semióticas

Teoria de Representações Semióticas de Duval (DAMM, 2012; FLORES, 2006)	
Para Duval a apreensão dos objetos matemáticos somente será possível quando os sujeitos fazem uso das três atividades cognitivas a seguir.	
Realizações	Resumo
Formação de uma representação identificável	Refere-se a uma determinada língua natural, à composição de um texto, a desenhos de uma figura geométrica, à escrita de uma fórmula, a um gráfico, etc.
Tratamento	É a transformação de uma representação dentro do próprio registro.
Conversão	É a operação de transformação de um registro de representação para outro de um mesmo objeto matemático.

Fonte: Pereira, 2015.

Quadro 04 – Resumo da engenharia didática

Engenharia Didática de Artigue (MACHADO, 2012)	
A Engenharia Didática é dividida em 4 fases.	
Fases	Resumo
Análises preliminares	Fundamentação para criação da sequência didática.
Concepção e análise <i>a priori</i>	Construção da sequência didática.
Experimentação	Aplicação da sequência didática.
Análise <i>a posteriori</i> e validação.	Análise dos dados obtidos confrontando-os com as expectativas elaboradas na análise <i>a priori</i> .

Fonte: Pereira, 2015.

Participantes

Os sujeitos de nossa pesquisa são 12 alunos do 2º ano B do curso Técnico Integrado de Guia de Turismo de uma escola pública de Alagoas, que foram selecionados por sorteio entre quatro turmas dos segundos anos que o autor da pesquisa leciona. Todos os alunos mostraram interesse em participar da pesquisa.

Os encontros

Para aplicação da sequência didática foram realizados dez encontros de 1 hora e 40 minutos cada, com a turma citada anteriormente em seus horários regulares de aulas. Os encontros ocorreram semanalmente, iniciando no começo de setembro de 2014 e terminando por volta do dia 15 de novembro de 2014, totalizando, assim, um período de dois meses e meio.

Coleta de dados

Para obter as informações ou os dados de nossa pesquisa, utilizamos a observação dos estudantes em atividade, os questionários, os registros escritos dos alunos durante as aplicações das atividades e os relatórios das falas dos alunos no momento da socialização e da institucionalização dos conhecimentos.

Resultados das análises prévias

Passamos, agora, a resumir os principais resultados das análises prévias ou preliminares empreendidas neste trabalho de investigação, as quais serviram de guia na elaboração da sequência didática visada. Na Engenharia Didática as análises prévias consistem na análise histórica e epistemológica, na análise didática do objeto em estudo e da análise cognitiva dos sujeitos da pesquisa. Seguem-se as sínteses das análises empreendidas.

Síntese da análise histórica e epistemológica:

O exame do desenvolvimento da trigonometria permite destacar alguns momentos epistemologicamente relevantes de características marcadamente distintas:

- a) um primeiro momento, no mundo antigo (Babilônia, Egito, Grécia), os conhecimentos trigonométricos eram utilizados para dar suporte à resolução de problemas ligados à agrimensura, à construção de obras de engenharia e à astronomia. Eram problemas cuja solução envolvia o emprego de conhecimentos da geometria métrica do triângulo, da relação métrica entre o comprimento de um arco de circunferência, o comprimento da corda e a medida do ângulo central subtendido por ele, além do desenvolvimento de elementos da trigonometria esférica;
- b) um segundo momento, a constituição da trigonometria como uma área do saber matemático, descolada de suas aplicações práticas, surge com o astrônomo e matemático Regiomontanus, no século XV, na sua obra “De triangulis omnimodis” (BOYER; MERZBACH, 2012, p.194);
- c) um terceiro momento, a emergência de conceitos trigonométricos na criação e no desenvolvimento dos fundamentos do cálculo diferencial sucedeu por volta do século XVII (principalmente nas obras de Wallis, de Isaac Newton e de Leibniz);
- d) um quarto momento, a conexão entre a descrição de movimentos circulares e de outros fenômenos periódicos por meio das funções trigonométricas do seno e do cosseno é principiada. Nessa etapa foram de fundamental importância as contribuições de Euler, no século XVIII, responsável pela introdução da função de Euler da trigonometria (isto é, a função que a cada número real x associa um ponto P sobre a circunferência unitária, marcado a partir do ponto $A = (0, 1)$, de modo que o arco AP mede x unidades. Para a obtenção do ponto P , anda-se sobre a circunferência no sentido anti-horário se x for positivo e no sentido horário se x for negativo. O seno de x é dado pela ordenada do ponto P ; o cosseno de x é dado pela coordenada de P);
- e) um quinto momento, destacam-se os trabalhos em torno da elaboração e da demonstração do teorema de Fourier, no qual se dá condições sob as quais é possível expressar os valores de uma função contínua por uma série cujos termos são funções trigonométricas.

Síntese da análise cognitiva:

A análise cognitiva revelou que os sujeitos desta pesquisa apresentaram dificuldades em conceituar e aplicar conteúdos básicos fundamentais, que são necessários para sua evolução, tais como: compreensão da aplicabilidade do teorema de Pitágoras, aplicação da regra de três simples. Além disso, não conheciam o GeoGebra.

Síntese da análise didática:

No tocante à análise didática das práticas de ensino da trigonometria no Ensino Médio empreendida, destacamos os seguintes pontos: a) introdução dos conceitos básicos da trigonometria de maneira abstrata, pautada por um enfoque estático, sem dinamicidade, sem a participação ativa do estudante na formulação de conceitos e de propriedades trigonométricas; b) pouca ênfase nas condições de aplicabilidade do teorema de Pitágoras, ou seja, nas condições sob as quais esse teorema pode ou não pode ser aplicado; c) ênfase em atividades manipulativas de verificação de identidades trigonométricas sem que o estudante tenha ainda revelado a compreensão dos conceitos; d) as TIC oferecem novas possibilidades para o ensino do caráter mais dinâmico da trigonometria; e) os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) recomendam a utilização das TIC “desde que os alunos sejam encorajados a desenvolver seus processos metacognitivos e sua capacidade crítica e o professor veja reconhecido e valorizado o papel fundamental que só ele pode desempenhar na criação, condução e aperfeiçoamento das situações de aprendizagem” (BRASIL, 1998, p43); f) a escola na qual desenvolveremos nossa investigação disponibiliza Laboratório de Recursos Computacionais para as aulas de Matemática.

Análise *a priori* da sequência didática

Como já frisado anteriormente, a fase da análise *a priori* comporta, segundo Artigue (1996 apud MACHADO, 2012), uma parte descritiva e uma parte preditiva. É preciso descrever as escolhas efetuadas, definindo variáveis de comando, no âmbito global, mais amplo e mais geral, e no âmbito local, descrevendo cada atividade proposta.

As primeiras escolhas dizem respeito a *variáveis globais*, aquelas que se referem à organização global da Engenharia. Neste caso, são elas:

1. Buscar enfatizar os aspectos dinâmicos envolvidos nos conceitos trigonométricos;
2. Utilizar computadores e o *software* GeoGebra de geometria dinâmica, por ser *software* livre e de fácil manuseio;
3. Introduzir o teorema de Pitágoras e propiciar a compreensão da sua aplicabilidade;
4. Introduzir de forma dinâmica o conceito de círculo trigonométrico;
5. Explorar dinamicamente os conceitos do seno, do cosseno e da tangente no círculo trigonométrico;
6. Exercitar a representação escrita dos fenômenos observados na tela do computador.
7. Criar situações de aprendizagem que possibilitem o trabalho coletivo dos estudantes e operações de conversão e de registros de representação semiótica.

A partir dessas escolhas globais, passamos à elaboração da sequência didática com a apresentação das sessões das oficinas onde evidenciamos as escolhas locais ou microdidáticas que foram feitas, com as respectivas expectativas de aprendizagem.

Criação e apresentação da sequência didática – Applets

Nesta seção é descrita a sequência didática (constituída de oito atividades), levando-se em conta os condicionantes levantados nas análises prévias ou preliminares. (Para ter acesso à sequência didática completa acesse o *blog*).

Mediante os resultados da análise cognitiva, como já informado anteriormente, incluímos na sequência didática uma oficina de reconhecimento do software GeoGebra com os sujeitos da pesquisa.

Na elaboração das atividades, decidimos propiciar atividades que permitissem a interação dos participantes, a produção e a conversão de registros, visto que “[...] as representações (semióticas) não são somente necessárias para fins de comunicação, elas são igualmente essenciais para as atividades cognitivas do pensamento.” (DUVAL 1993, apud DAMM, 2012, p. 177). Ou seja, as representações semióticas têm um papel essencial e necessário na construção do conhecimento do sujeito que aprende.

Descrição dos objetivos dos Applets

O objetivo do *Applet* 01 (Um Teorema no Triângulo Retângulo) era avaliar até que ponto o trabalho dos sujeitos da pesquisa com esse *Applet* permitiria a aprendizagem de uma justificativa do teorema de Pitágoras – isto é, por meio da demonstração de Perigal (Figura 1) – e da aplicação do teorema de Pitágoras em uma situação particular.

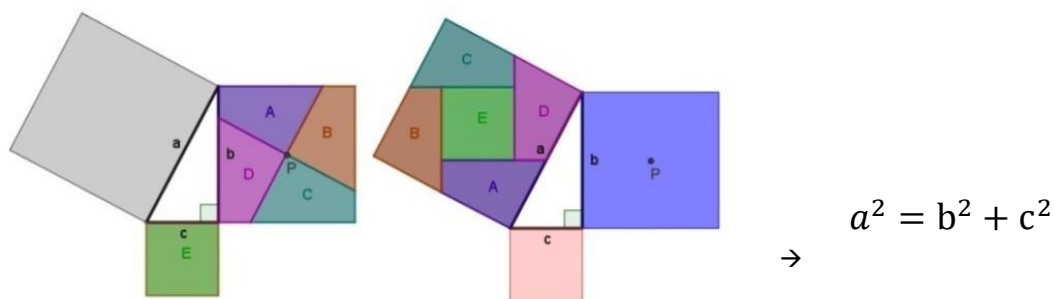


Figura 1 – Teorema de Pitágoras – Demonstração de Perigal.
Fonte: Pereira, 2015.

Já do *Applet* 02 (Razões Trigonométricas no Triângulo Retângulo), esperava-se que, após a manipulação, os estudantes fossem capazes de entender as razões trigonométricas no triângulo retângulo, conhecer os nomes das razões trigonométricas, calcular as razões dos ângulos notáveis e construir o quadro com os ângulos notáveis (Figura 2), seguindo as orientações da Atividade 02, que contém quatro questões.

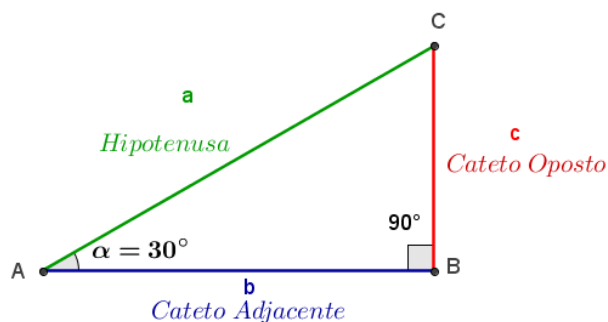


Figura 2 – Triângulo Retângulo.
Fonte: Pereira, 2015.

Ao manipular e investigar o Applet 03 (Graus e Radianos) a nossa expectativa era de que os estudantes aprendessem o conceito de graus na circunferência, conjecturassem uma equação matemática para o comprimento da circunferência, entendessem como é construído o radiano, descobrissem quantos graus equivalem a um radiano e fizessem as conversões entre radianos e graus ou inversamente (Figura 3). Para essa finalidade eles seguiriam as informações da Atividade 03, que é formada por cinco questões.

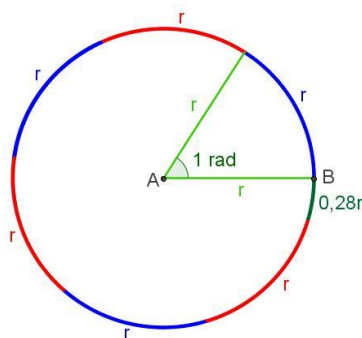


Figura 3 – Comprimento da Circunferência.
Fonte: Pereira, 2015.

Com o Applet 04 (Círculo Trigonométrico) os alunos possivelmente seriam capazes de compreender o conceito do círculo trigonométrico com a sua divisão em quadrantes, verificariam sentidos de percurso, determinariam ou perceberiam o comprimento do raio, determinariam nos eixos coordenados o seno e o cosseno e as duas relações fundamentais da trigonometria (Figura 4). Para isso eles fariam a Atividade 04, que é organizada em cinco questões.

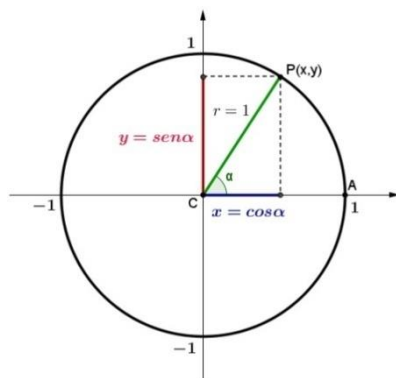


Figura 4 – Círculo trigonométrico.
Fonte: Pereira, 2015.

Ao visualizar e examinar o *Applet 05* (Seno no Círculo Trigonométrico) os alunos poderiam compreender o conceito do seno no círculo trigonométrico, identificar os sinais do seno nos quatro quadrantes, conjecturar as propriedades do seno e verificar em qual intervalo os valores do seno é limitado (Figura 5). Para atingir esses objetivos recomendou-se que eles seguissem os passos da Atividade 05, que tem cinco questões.

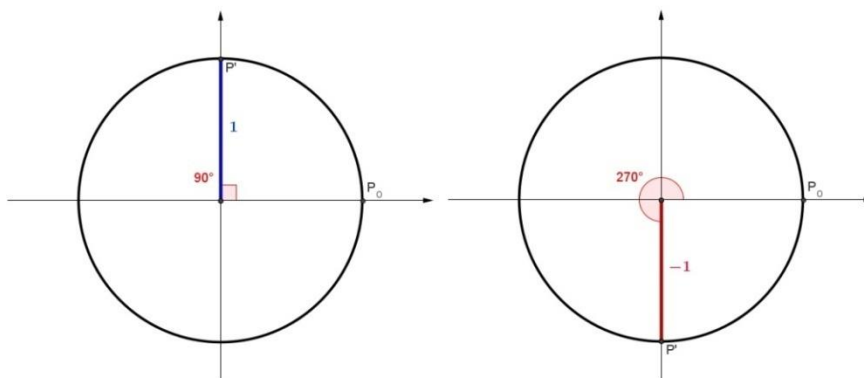


Figura 5 – Seno de 90 – Figura 5(a) e Seno de 270 graus – Figura 5(b).
Fonte: Pereira, 2015.

Ao manusear e explorar o *Applet 06* (Cosseno no Círculo Trigonométrico) a expectativa era de que os estudantes compreendessem o conceito do cosseno no círculo trigonométrico, identificassem os sinais do cosseno nos quatro quadrantes, conjecturassem as propriedades do cosseno e verificassem em quais intervalos os valores do cosseno é limitado (Figura 6). Para alcançar esses propósitos eles cumpririam os estágios da Atividade 06, que é integrada por cinco questões.

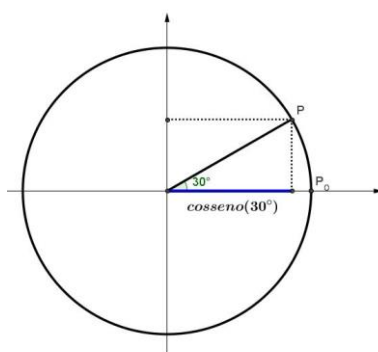


Figura 6 – Cosseno de 30 graus.
Fonte: Pereira, 2015.

O *Applet 07* (Tangente no Círculo Trigonométrico) tem como finalidade subsidiar a aprendizagem do conceito da tangente no círculo trigonométrico, da identificação dos sinais da tangente nos quatro quadrantes, da conjecturação das propriedades da tangente e da determinação do intervalo no qual os valores da tangente é limitado (Figura 7). Para alcançar esses objetivos recomendou-se que os estudantes fizessem a Atividade 07, que é constituída de cinco questões.

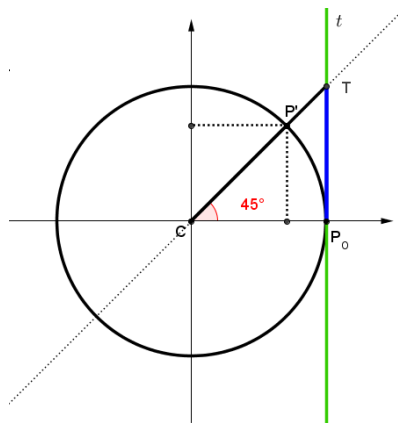


Figura 7 – Tangente no Círculo Trigonométrico.
Fonte: Pereira, 2015.

Ao investigar e manipular o Applet 08 (Funções Trigonômicas) a expectativa era de que os estudantes entendessem os conceitos das funções seno e cosseno, entendessem os gráficos das funções seno (Figura 8) e cosseno, compreendessem e encontrassem os períodos das funções seno e cosseno e descobrissem quais são os domínios e imagens das funções seno e cosseno. Para construírem esses conhecimentos recomendou-se que eles realizassem a Atividade 08, que é formada por cinco questões.

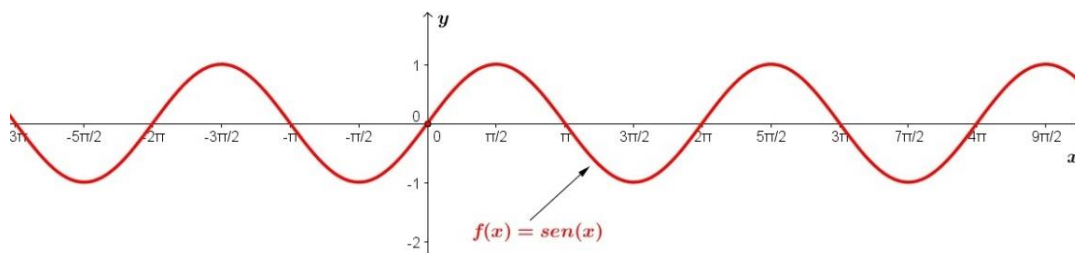


Figura 8 – Gráfico da Função Seno.
Fonte: Pereira, 2015.

Experimentação e análise *a posteriori*

Os 12 alunos, sujeitos de nossa pesquisa, para realização das atividades, foram divididos em duplas, as quais nomeamos como: dupla 1, dupla 2, dupla 3, dupla 4, dupla 5 e dupla 6.

Nas aplicações das oito atividades (*Applets*), seguimos a Teoria das Situações Didáticas de Guy Brousseau. Inicialmente, propusemos um problema para os alunos e demos um tempo para elaboração da solução em dupla. Posteriormente, eles socializaram suas estratégias, com nossa intermediação, e por fim, sintetizamos e destacamos os conhecimentos relevantes durante a validação, fazendo uso da linguagem matemática formal.

No geral, o objetivo principal da atividade 01 – que era compreender e aplicar o teorema de Pitágoras, com a demonstração de Perigal, manipulando o *Applet* 01 – foi alcançado, pois as seis duplas responderam as três questões da atividade 01 encontrando respostas esperadas ou parcialmente corretas. Após a manipulação do *Applet* 01 todas as seis duplas conjecturaram que num triângulo retângulo de lados a, b e c , onde a é a hipotenusa, b e c os catetos, vale a equação: $a^2 = b^2 + c^2$.

Apesar de as seis duplas formularem corretamente a equação, três delas deram explicações não tão claras. Observe na Figura 9 a justificativa da dupla 2, por exemplo.

a) Que equação matemática você pode concluir em relação à comparação entre as áreas dos quadrados (cinza, azul e rosa), após a visualização e análise do Applet 01? Justifique sua resposta.

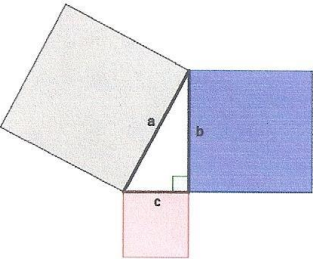


Figura 1 – Triângulo com quadrados sobre seus lados.
Fonte: Arquivo pessoal do professor pesquisador.

$a^2 = b^2 + c^2$

Poris a soma dos dois catetos sempre vai dar o mesmo valor da hipotenusa, e essa equação faz com que as letras a, b e c represente estes lados do triângulo retângulo.

Figura 9 – Resposta da dupla 2 – Questão 1, Item a da Atividade 01.
Fonte: Pereira, 2015.

A justificativa da dupla 2, após escrever corretamente a equação de Pitágoras, esquecendo de informar que os lados a, b, c do triângulo retângulo devem ser elevados ao quadrado, revela desatenção ou falta de prática de redigir justificativas de problemas matemáticos. As outras duplas que apresentaram dificuldade, cometeram um equívoco semelhante a esse.

Já no item b da questão 1, apenas a dupla 5 explicou passo a passo a demonstração de Perigal para o teorema de Pitágoras (Figura 10).

b) Baseado na apresentação do Applet 01, explique com suas palavras a demonstração de Perigal para o teorema de Pitágoras.

- 1) Ele pegou o triângulo retângulo de medidas aleatórias;
- 2) Em cada lado do triângulo retângulo ele construiu um quadrado que tinha lados iguais aos lados do triângulo retângulo;
- 3) Ele encontrou a área de cada quadrado, a área do quadrado de lado a é igual a^2 (lado da hipotenusa), a área do quadrado de lado b é dado por b^2 (cateto b), a área do quadrado de lado c é dado por c^2 (cateto c).
- 4) Após isso ele fez uma reta paralela à hipotenusa e outra perpendicular a ela;
- 5) Fez um ponto central no quadrado médio (quadrado b);
- 6) Com as linhas, a linha perpendicular e a diagonalmente o quadrado médio no ponto central que ele fez, e a linha paralela a hipotenusa o quadrado médio, dividindo-o em quatro partes iguais, de áreas iguais;
- 7) Colocou os lados cortados do quadrado médio em cada aresta do quadrado maior;
- 8) Encaixando-o o quadrado menor (quadrado c) no espaço restante do quadrado maior, que é a parte central, cobriu toda a área do quadrado hipotenusa.

Figura 10 – Resposta da dupla 5 – Questão 1, Item b da Atividade 01.
Fonte: Pereira, 2015.

Confirmou-se o que já era esperado: que a maioria dos alunos tivesse dificuldade em explicar a demonstração de Perigal para o teorema de Pitágoras. Por exemplo, a dupla 3 escreveu “Na demonstração que mostra três quadrados (pequeno, médio e grande). Onde a soma do quadrado pequeno mais o médio dar [sic] o valor do quadrado grande.” Como as demais duplas expressaram justificativas semelhantes e resumidas, talvez a questão 1, item b, devesse ser reformulada nos seguintes termos: “Baseado na apresentação do *Applet* 01, explique com suas palavras, passo a passo, a demonstração de Perigal para o teorema de Pitágoras”. Provavelmente com essa alteração os objetivos nessa atividade, de modo geral, poderiam ter sido alcançados.

Os objetivos da atividade 02 – que eram conhecer, entender e calcular as razões trigonométricas no triângulo retângulo utilizando o *Applet* 02 – foram atingidos, mesmo ocorrendo dificuldades em alguns conteúdos exigidos pela atividade e nas explicações reveladas pelos alunos na fase da análise cognitiva.

Todas as duplas afirmaram que as razões não mudam, quando fixamos o ângulo α e alteramos os lados do triângulo retângulo, na questão 1, item a. Mas nenhuma dupla foi capaz de explicar por que isso ocorre. Observe abaixo na Figura 11 a resposta da dupla 4.

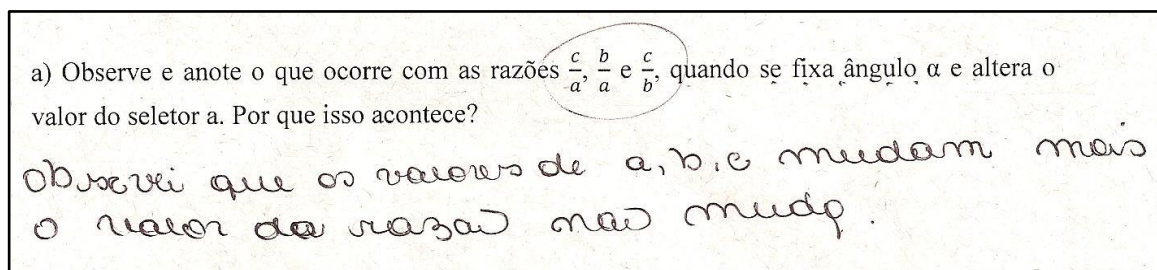


Figura 11 – Resposta da dupla 4 – Questão 1, Item a da Atividade 02.
Fonte: Pereira, 2015.

Os alunos não apresentaram respostas explicativas para a pergunta “por que isso acontece?”, provavelmente por não entenderem o conceito de triângulos semelhantes, pois em outros conteúdos apresentados no questionário de diagnóstico eles demonstraram grande dificuldade em tópicos relacionados a esse. No momento da institucionalização foi esclarecido o porquê das razões não mudarem, quando se fixa o ângulo.

Na atividade 03, sobre a apresentação do conceito das medidas de ângulos (graus e radianos), por meio do *Applet* 03, todos os objetivos da atividade foram alcançados. Apenas duas das seis duplas apresentaram dificuldade em interpretar as questões e concluir suas respostas. Por exemplo, a dupla 5 cometeu um erro na simplificação e expressou que o ângulo central interno correspondente a uma volta completa é $2\pi r$. Isso nos leva a concluir que foi um equívoco, como se pode observar a solução da dupla 5 na Figura 12.

3) Podemos definir 1 radiano (1 rad) como a medida do ângulo central que é determinado na circunferência por um arco cujo comprimento é igual ao raio (figura 1). Dessa forma, o ângulo com vértice no ponto A tem medida 1 rad (radiano). Utilizando o resultado da questão 2 e regra de três, conjecture a medida do ângulo x em radianos de uma volta completa numa circunferência (figura 2).

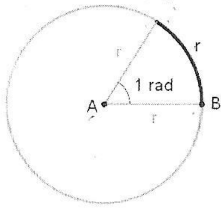


Figura 1 – Radianos.

Fonte: Arquivo pessoal do professor pesquisador.

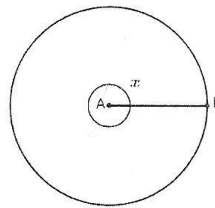


Figura 2 – Ângulo de uma volta completa.

Fonte: Arquivo pessoal do professor pesquisador.

$$\frac{1 \text{ rad}}{x} = \frac{1 r}{2\pi r}$$

$$1 r x = 2\pi r \cdot 1 \text{ rad}$$

$$x = \frac{2\pi r}{1 r}$$

$$x = 2\pi r$$

De uma volta completa equivale $2\pi r$

Figura 12 – Resposta da dupla 5 – Questão 3 da Atividade 03.

Fonte: Pereira, 2015.

A atividade 04 foi elaborada com a finalidade da compreensão do círculo trigonométrico, da identificação da representação do seno e do cosseno nos eixos coordenados e da demonstração das duas relações fundamentais da trigonometria. Para construir esses conhecimentos as duplas manipularam o *Applet* 04. Todas as intenções desta atividade foram atingidas, embora algumas duplas tenham apresentado dificuldades em analisar algumas questões e explicar suas respostas.

Por exemplo, as duplas 4 e 6 tiveram dificuldade em obter a conclusão de que $\text{sen}^2\alpha + \text{cos}^2\alpha = 1$, para um ângulo α dado, de medida entre 0° e 90° . As demais duplas não apresentaram nenhuma dificuldade, como se pode ver na resposta da dupla 3 (Figura 13).

4) Das questões 2 e 3, segue que um ponto P pertencente ao círculo trigonométrico pode ser expresso da seguinte forma: $P(x, y) = P(\text{cos } \alpha, \text{sen } \alpha)$. Utilizando o Teorema de Pitágoras na figura 1 e a medida do comprimento do raio r encontrada na questão 1, mostre que $\text{sen}^2\alpha + \text{cos}^2\alpha = 1$, isto é, primeira relação fundamental da trigonometria.

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$x^2 = y^2 + r^2$$

$$1 = \text{sen}^2\alpha + \text{cos}^2\alpha$$

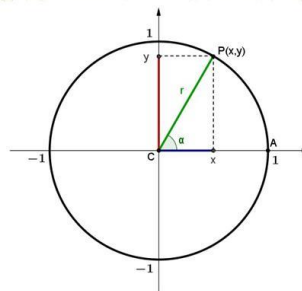


Figura 1 – Círculo Trigonométrico.

Fonte: Arquivo pessoal do professor pesquisador.

Figura 13 – Resposta da dupla 3 – Questão 4 da Atividade 04.

Fonte: Pereira, 2015.

Em relação à expressão $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{cos}\alpha}$, a dupla 4 exibiu uma resposta incompleta (Figura 14). As demais duplas concluíram que a tangente de α pode ser calculada pela a razão entre $\operatorname{sen}\alpha$ e o $\operatorname{cos}\alpha$.

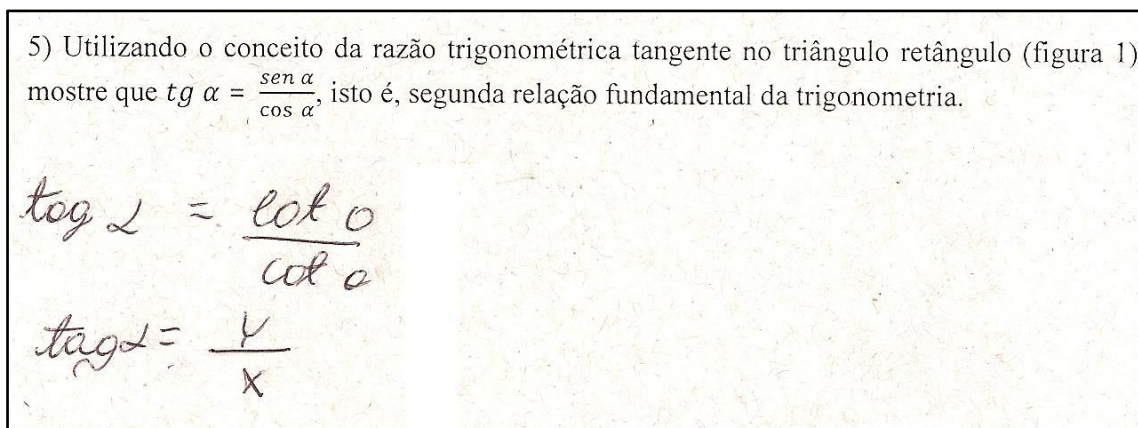


Figura 141 – Resposta da dupla 4 – Questão 5 da Atividade 04.

Fonte: Autor.

O propósito principal da atividade 05 era compreender o conceito do seno no círculo trigonométrico manejando o *Applet* 05. Todos os propósitos desta atividade foram alcançados, conquanto alguns alunos mostrassem algumas dificuldades. Todas as duplas acertaram o valor dos senos dos ângulos de 0° , 90° , 180° , 270° e 360° . Também, todas as duplas perceberam que o sinal do seno é positivo no primeiro e segundo quadrantes e negativo no terceiro e quarto quadrantes. Porém, não responderam sobre os intervalos de ângulos onde o seno é positivo e negativo.

No terceiro quesito, todas as duplas constataram que: $\operatorname{sen}30^\circ = \operatorname{sen}150^\circ$, $\operatorname{sen}45^\circ = \operatorname{sen}135^\circ$ e $\operatorname{sen}60^\circ = \operatorname{sen}120^\circ$. Entretanto, as duplas 3 e 4 não souberam explicar o que se pode concluir. Veja a resposta e a explicação da dupla 5 na Figura 15.

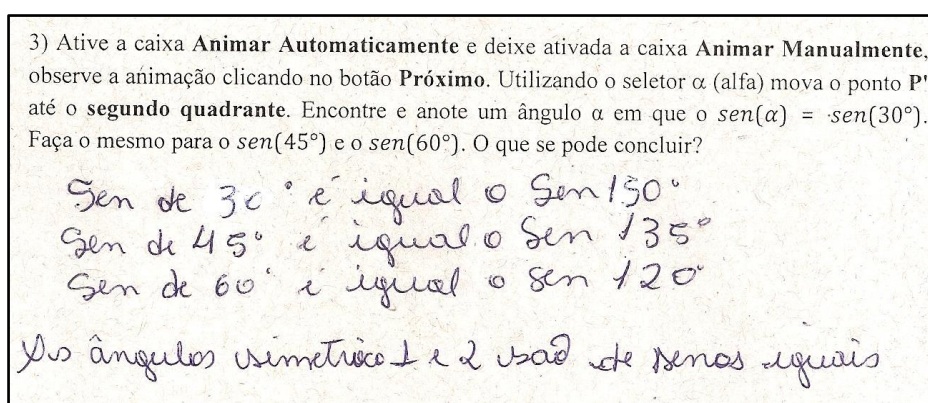


Figura 15 – Resposta da dupla 5 – Questão 3 da Atividade 05.

Fonte: Pereira, 2015.

Apesar da dupla 5 ter omitido a palavra “quadrante” e não ter redigido em linguagem formal a sua explicação, é possível entender sua resposta. Esse fato provavelmente está relacionado à falta de prática em redigir respostas para os problemas matemáticos.

O intuito principal da atividade 06 era compreender o conceito do cosseno no círculo trigonométrico utilizando o *Applet* 06. O desempenho dos estudantes nesta

atividade foi semelhante àquele já apresentado no *Applet* 05. Na questão 2, todas as duplas exibiram respostas corretas semelhantes às da dupla 6 (Figura 16).

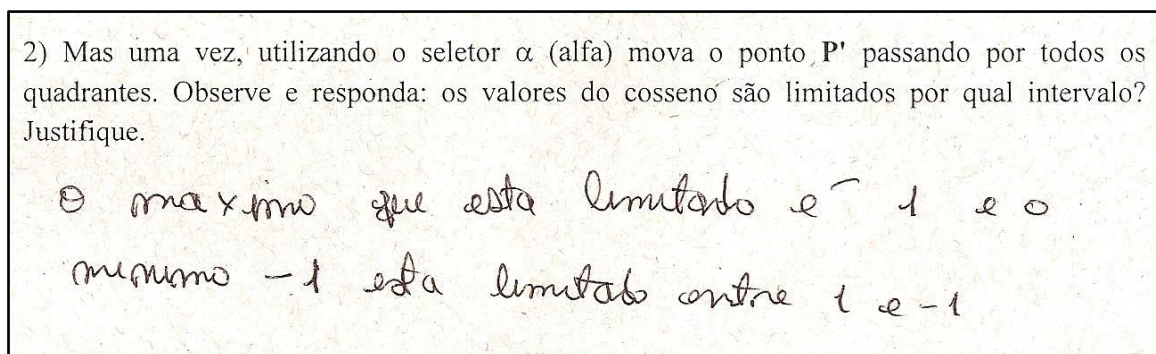


Figura 162 – Resposta da dupla 6 – Questão 2 da Atividade 06.
Fonte: Pereira, 2015.

A meta principal da atividade 07 era compreender o conceito da tangente no círculo trigonométrico por meio da manipulação do *Applet* 07. Todas as metas da atividade 07 foram atingidas, embora alguns alunos tenham formulado respostas equivocadas. Por exemplo, a pergunta de número 2, as duplas 2 e 3, afirmaram equivocadamente que a tangente é limitada por $[-11,47, 11,47]$ e por $[-1,1]$, respectivamente. O erro da dupla 2 foi devido ao fato do *Applet* 07 no GeoGebra marcar ângulos de 5 em 5 graus, assim, exibindo $tg(85^\circ) = 11,47$ e $tg(275^\circ) = -11,47$. Já o erro da dupla 3 deve estar ligado ao raio do círculo trigonométrico ou simplesmente à repetição das respostas aos *Applets* do seno e do cosseno, realizados anteriormente. As demais duplas relataram, semelhantemente à dupla 4, “que a tangente não é limitada por algum valor”.

Na pergunta de número 1, item a, todas as duplas preencheram corretamente as lacunas da tangente de: 0° , 90° , 180° , 270° e 360° . Quanto à $tg(90^\circ)$ e à $tg(270^\circ)$, três duplas não justificaram por que não existem. Já as duplas 1, 2 e 3 apresentaram respostas parcialmente corretas, como as da dupla 3 na Figura 17.

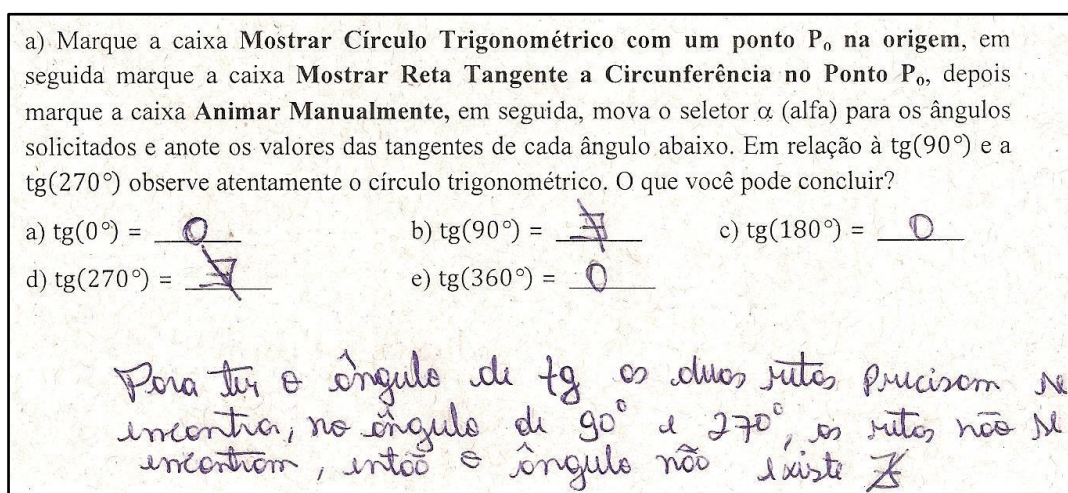


Figura 17 – Resposta da dupla 3 – Questão 1, item a da Atividade 07.
Fonte: Pereira, 2015.

Consideramos parcialmente correta, porque a dupla 3 afirmou que “o ângulo não existe”, mas na verdade é a tangente dos ângulos de 90° e 270° que não existem.

Já na oitava e última atividade, propusemos como objetivo principal entender os conceitos das funções trigonométricas seno e cosseno por meio da manipulação do *Applet* 08. Na primeira questão, item a, todas as duplas preencheram o quadro corretamente, como o fez a dupla 4 (Figura 18 a seguir).

a) Marque a caixa **Função Seno**, em seguida marque a caixa **Animar Manualmente**, agora mova o **seletor α** (alfa) entre 0° e 360° . Verifique para que número real x está associado cada ângulo abaixo e preencha o quadro com estes números reais x e com os senos destes números.
OBS: Observe como é construído o gráfico do seno ao mover o **seletor α** (alfa).

Ângulo	x	$f(x) = \text{sen}(x)$
0°	0	$f(0) = \text{sen}(0) = 0$
90°	$\frac{\pi}{2}$	$f(\frac{\pi}{2}) = \text{sen}(\frac{\pi}{2}) = 1$
180°	π	$f(\pi) = \text{sen}(\pi) = 0$
270°	$3\frac{\pi}{2}$	$f(3\frac{\pi}{2}) = \text{sen}(3\frac{\pi}{2}) = -1$
360°	2π	$f(2\pi) = \text{sen}(2\pi) = 0$

Figura 18 – Resposta da dupla 4 – Questão 1, item a da Atividade 08.

Fonte: Pereira, 2015.

Apenas uma dupla soube expressar corretamente o que ocorre no gráfico da função seno do tipo $f(x) = a + b \cdot \text{sen}(cx + d)$, quando se altera algum dos valores dos coeficientes a, b, c e d . Por exemplo, a dupla 2 escreveu que “a linha muda na imagem” quando $b > 1$ ou $0 < b < 1$ e “o valor de x continua e o y muda” quando $b < 1$. Já a dupla 3, afirmou que “não muda o intervalo entre -1 e 1 ” quando $c < 1$ ou $0 < c < 1$ e $c < 0$, apesar de estar correto, não era uma resposta esperada. As duplas 4, 5 e 6 expressam respostas confusas semelhantes às das duplas 2 e 3. Acredito que isso ocorreu devido ao fato delas desconhecerem os conceitos de amplitude e de frequência.

Na socialização das respostas, as duplas informaram que compreenderam a diferença entre o gráfico da função seno e a do cosseno. Na fase de institucionalização, foi dedicado um tempo especial para a abordagem do comportamento dos gráficos das funções seno $f(x) = a + b \cdot \text{sen}(cx + d)$ e cosseno $f(x) = a + b \cdot \text{cos}(cx + d)$, quando alteramos os coeficientes a, b, c e d . Também, foram destacados os conceitos de amplitude e de frequência.

Todos os objetivos da atividade 08 foram alcançados, mesmo que alguns alunos tenham apresentado respostas incorretas.

Validação da sequência didática

Após fazer a confrontação entre a análise *a priori* (fase na qual se levantam as hipóteses) e a análise *a posteriori* (fase na qual se dá o tratamento dos dados), podemos concluir os seguintes resultados:

- As miniaaplicações (*Applets*) podem tornar o conteúdo de trigonometria dinâmico e interativo, em que os alunos manipulam e tiram suas próprias conclusões.
- Os *Applets* criados no *software* GeoGebra podem, de fato, facilitar a conjectura de propriedades, relações e equações trigonométricas.
- O *software* GeoGebra com seu dinamismo, interação e possibilidades de visualização de um mesmo objeto matemático de várias formas, favorece a realização das operações de conversão entre registros de representação semiótica.
- O *software* GeoGebra tem suas limitações nas construções de certos *Applets*, as quais podendo levar a conclusões equivocadas, como por exemplo, aquelas obtidas pela manipulação do *Applet* 07 quando alguns alunos concluíram que a tangente é limitada por $[-11,47, 11,47]$. Entretanto, a intervenção do professor pode esclarecer esses possíveis equívocos.

Considerações finais

Ao longo da aplicação da sequência didática que produzimos, cresceu a nossa convicção de que é necessário que as atividades a serem desenvolvidas pelos estudantes sejam organizadas, direcionadas e assistidas, corroborando assim, a afirmação de Damasco (2010) no que diz respeito à utilização de um projeto metodológico.

Foi constatado durante a realização deste trabalho que uma sequência didática, com base na teoria das situações didáticas de Guy Brousseau e da teoria das representações semióticas de Duval é capaz de produzir efeitos relevantes no processo de ensino de Trigonometria. Ela contribuiu efetivamente na motivação e na redução das dificuldades dos alunos em relação à Trigonometria. Assim, confirmando a declaração de Damasco (2010), em relação à utilização das representações semióticas de Duval juntamente com o uso do GeoGebra que auxiliou os alunos na superação das dificuldades de aprendizagem em trigonometria.

As análises empreendidas confirmaram as constatações apresentadas: (1) por Thompson (2008) e Demir (2012), de que uma proposta de ensino que contemple os três contextos da trigonometria favorece a aprendizagem desse conteúdo; (2) por Zengin, Furkan e Kutluca (2012), de que um ensino da trigonometria numa perspectiva construtivista com auxílio do GeoGebra apresentam resultados mais efetivos.

Verificou-se que os *Applets* criados no GeoGebra, em geral, facilitam a compreensão de trigonometria, pois ao visualizar um objeto matemático movimentando na tela do computador e podendo manipular várias vezes o objeto em apenas uma aplicação, o estudante, nessa interação, faz perguntas, levanta conjecturas e testa hipóteses. Corroborando assim, as conclusões de Damasco (2010), Lopes (2010), Figueiredo (2013) e Persicano (2013) em relação ao uso do *software* GeoGebra.

Portanto, o estudo de Trigonometria pode ser apresentado de maneira dinâmica e interativa por intermédio do *software* GeoGebra, com bons efeitos de aprendizagem, desde que a sequência didática aplicada siga uma metodologia adequada de elaboração e de aplicação.

A sequência que criamos, aplicamos e analisamos, está disponível no *blog*, o qual pode ser utilizado por estudantes e professores na aprendizagem e no ensino da trigonometria. O texto deste artigo, com o relato dos efeitos de aprendizagem em uma turma de Ensino Médio, poderá ser útil ao professor que pretende fazer uso das atividades do nosso *blog*.

Referências

- BOYER, Carl; MERZBACH, Uta. **História da Matemática**. São Paulo: Blucher, 2012.
- BRASIL, Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais Ensino Médio**, Parte III - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC/SEF, 1998.
- DAMASCO, José Roque Neto, **Registros de Representação Semiótica e o Geogebra: um ensaio para o ensino de Funções Trigonométricas**. Dissertação (Mestrado em Educação Científica e Tecnológica) Universidade Federal de Santa Catarina. Florianópolis – SC, 2010.
- DAMM, Regina Flemming. **Registros de Representação**. In: MACHADO, Sílvia. Dias Alcântara Machado. (Org.). Educação Matemática: uma (nova) introdução. 3ª ed. São Paulo: EDUC, 2012. pp.167 - 188.
- DEMIR, Öskan. **Students' concept development and understanding of sine and cosine functions: a new theoretical and educational approach**. Thesis submitted for MSc in Mathematics and Science Education. Universiteit van Amsterdam Korteweg-de Vries Institute for Mathematics Science, Amsterdam, Netherlands, 2012.
- DIONIZIO, Fátima Queiroz, BRANDT, Célia Finck. **Análise das Dificuldades Apresentadas pelos alunos do Ensino Médio em Trigonometria**. X Congresso Nacional de Educação – EDUCERE, 2011. Disponível em: <http://educere.bruc.com.br/CD2011/pdf/4728_2885.pdf> Acesso em: 17 fev 2014.
- FIGUEIREDO, Sonner Arfux de, **Atividades Práticas Integradas ao Componente Curricular: o Software GeoGebra no Ensino de Funções Trigonométricas**. XI ENEM – Encontro Nacional de Educação Matemática, 2013.
- FLORES, Cláudia Regina, **Registros de Representação Semiótica em Matemática: História, Epistemologia, Aprendizagem**. Bolema, Rio Claro (SP), Ano 19, nº 26, 2006, pp. 77 - 102.
- FREITAS, José Luiz Magalhães. **Teoria das Situações Didáticas**. In: MACHADO, Sílvia. Dias Alcântara Machado. (Org.). Educação Matemática: uma (nova) introdução. 3ª ed. São Paulo: EDUC, 2012. pp.77 - 111.
- LOPES, Maria Maroni, **Construção e Aplicação de uma Sequência Didática para o Ensino e Aprendizagem de Trigonometria Usando o Software GeoGebra**. Dissertação (Mestrado em Educação Científica e Tecnológica) Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Natal-RN, 2010.

MACHADO, Sílvia Dias Alcântara. **Engenharia Didática**. In: MACHADO, Sílvia. Dias Alcântara Machado. (Org.). Educação Matemática: uma (nova) introdução. 3ª ed. São Paulo: EDUC, 2012. pp. 233 - 247.

PEREIRA, Edcarlos, **A Utilização de Applets no Geogebra para a Aprendizagem da Trigonometria no Ensino Médio**, 2015. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) Universidade Federal de Alagoas. Maceió – AL, 2015.

PERSICANO, Hélio Evangelista, **A Importância do Uso das Novas Tecnologias no Processo de Ensino Aprendizagem: Aplicação do Software GeoGebra no Estudo das Funções Trigonométricas**. Dissertação (Mestrado Profissional) Universidade Federal de Goiás. Goiânia – GO, 2013.

THOMPSON, P. W. **Conceptual analysis of mathematical ideas: Some spadework at the foundations of mathematics education**. In O. Figueras, J. L. Cortinas, S. Alatorre, T. Rojano & A. Sepulveda (Eds.), *Plenary Paper presented at the Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (Vol 1, pp. 45-64). Morélia, Mexico: PME, 2008.

ZENGIN, Y., Furkan, H., & Kutluca, T. **The effect of dynamic software geogebra on student achievement in teaching of trigonometry**. *Procedia – Social and Behavioral Sciences*, 31, 183-187, 2012.

Submissão: 10/09/15

Aceite: 10/08/16