ENSINO E APRENDIZAGEM DE FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS POR MEIO DO *SOFTWARE GEOGEBRA* ALIADO À MODELAGEM MATEMÁTICA

TEACHING AND LEARNING OF TRIGONOMETRIC FUNCTIONS THROUGH *GEOGEBRA SOFTWARE* ALLIED TO MATHEMATICAL MODELING

Enaldo Vieira de Melo

Universidade Federal de Alagoas – UFAL/enaldov@gmail.com

Prof. Dr. Elton Casado Fireman

Universidade Federal de Alagoas – UFAL/ eltonfireman@yahoo.com.br

Resumo

A presente pesquisa qualitativa, delineada por um estudo de caso com pesquisa participante, analisou as contribuições da utilização do *software Geogebra* aliado à modelagem matemática no ensino e aprendizagem das funções trigonométricas seno e cosseno, à luz da Aprendizagem Significativa. O estudo foi aplicado a 18 alunos do segundo ano do Ensino Médio de uma escola pública do município de Marechal Deodoro, Alagoas. A investigação foi regida por uma sequência didática de ensino, na qual foi trabalhado o *software* junto com a modelagem matemática de fenômenos periódicos. Os resultados da pesquisa mostraram que o uso do *software Geogebra* dinamizou o processo de ensino e melhorou a aprendizagem de funções trigonométricas; foi possível utilizar a modelagem matemática como uma metodologia de ensino para a aprendizagem das funções $f(x)=a+bsen(cx+d)$ e $g(x)=a+bcos(cx+d)$; e que os discentes compreenderam o comportamento dos seus parâmetros a, b, c e d. O estudo tem como principal contribuição a conexão realizada pelos estudantes entre o conteúdo de funções trigonométricas e o cotidiano por meio de sua aplicação na previsão de fenômenos periódicos (altura da maré e fases lunares), obtendo assim, uma aprendizagem significativa.

Palavras-chave: Ensino e aprendizagem. Geogebra. Modelagem matemática. Funções trigonométricas.

Abstract

The present research qualitative, delineated by a case of study with research participating, analyzed the contributions the use of the *software Geogebra* ally to modeling Mathematics teaching and learning trigonometric functions sine and cosine, from the point of view of Meaningful Learning. The study was applied to 18 students of the second year of high school in a public school in the municipality of Marechal Deodoro, Alagoas. The investigation was ruled by a Sequence teaching didactic which was worked the *software* combined with the mathematics modeling periodic phenomena. The researches results showed that the use of the *Geogebra software* dynamized the teaching and learning process of trigonometric functions; It was possible utilize mathematics modeling as a teaching methodology for learning the functions *f(x)=a+bsen(cx+d)* and *g(x)=a+bcos(cx+d)*; and the students understoond the behavior of the parameters *a*, *b*, *c* and *d*. The study has as the main contribution the connection realized by the students between the content of the trigonometric functions and the daily through of its application in the forecast of periodic phenomena (tide height and lunar phases), getting like this Meaningful Learning.

Keywords: Teaching and Learning; Geogebra; Mathematical Modeling; Trigonometric functions.

Introdução

A presente pesquisa foi motivada por uma preocupação e inquietação pessoal diante da busca por métodos e práticas de ensino e aprendizagem que pudessem relacionar a matemática com o dia a dia. Segundo Freire, citado por Barroqueiro e Amaral (2011, p.129), “o docente deve acima de tudo ser um pesquisador e um contínuo estudioso de novos métodos e técnicas de aprendizagem para poder orientar melhor os seus alunos”. O assunto de funções trigonométricas pode ser associado a vários fenômenos periódicos do nosso cotidiano como a altura da maré, as fases lunares, o ciclo menstrual das mulheres, a variação da pressão nas paredes dos vasos sangüíneos de um indivíduo, dentre outros e, principalmente, serve de base para vários conteúdos da matemática. Assim, vimos no uso de tecnologias, por meio do *software* matemático *Geogebra* e na metodologia de ensino de modelagem matemática, um “fazer educativo que ofereça múltiplos caminhos e alternativas” (GUIMARÃES; DIAS apud COSCARELLI, 2006, p.23) que possam levar o aluno a ter outra visão do conteúdo, fazendo-lhe sentido, conectando-se com sua realidade, seu cotidiano e facilitando ainda a aprendizagem em outros conceitos matemáticos, ou seja, que ele consiga obter uma aprendizagem significativa segundo os preceitos de Ausubel (MOREIRA, 2006).

Fundamentação teórica

O acesso a computadores, *tabletes* e *smartphones*, e principalmente à internet, que neste século é cada vez maior, fazem com que haja um enorme desenvolvimento de recursos digitais e de tecnologias ligadas à informática, aumentando cada vez mais a geração de usuários denominada por Prensky (2001) de “nativos digitais” e conhecida também como geração Y (COELHO, 2012). Jovens que, nascidos a partir década de 80 e 90, não conseguem se imaginar sem as funcionalidades proporcionadas pelas tecnologias. Estão habituados a obter a informação de forma rápida e a interagir com várias mídias digitais ao mesmo tempo desde que nasceram (PESCADOR, 2010). Para Prensky, citado por Lemos (2009), é preciso que os professores, imigrantes digitais, usem da linguagem dos nativos digitais na aprendizagem de conteúdos.

A inserção das tecnologias na educação matemática tende a otimizar o processo de aprendizagem uma vez que “os ambientes gerados por aplicativos informáticos dinamizam os conteúdos curriculares e potencializam o processo pedagógico" (PARANÁ, 2008, p.65). A utilização de *softwares* relacionados ao ensino e aprendizagem deve-se à capacidade de a maioria executar os mais diversos conteúdos matemáticos de forma dinâmica, fazendo com que o aluno enxergue o conteúdo sob diversos ângulos, aguçando seu espírito de observação e de pesquisa: "visam oportunizar a motivação e apropriação do conteúdo estudado em sala de aula" (SANTOS, LORETO GONÇALVES, 2010, p.48). Além disso, o uso do *software* computacional na aprendizagem de matemática surge para facilitar processos, como a construção com lápis e papel, que além de demorado e impreciso, é estático, ou seja, após a construção, não é possível visualizar os diferentes ângulos da figura, o que pode ser feito com os *softwares* dinâmicos. A possibilidade de mover a figura, trás outra perspectiva para o estudo da disciplina: amplia o campo de conhecimentos. Bittar, citado por Calil (2011), refere - se ao *software* como um artefato, um instrumento que possui vários esquemas de uso e que, portanto, deve ser analisado pelo professor. No entanto, é preciso que sua a escolha pelo docente seja resultado de um planejamento didático-pedagógico, analisado com cuidado para que se possa atingir aos objetivos de aprendizagem de determinado conteúdo matemático. Dentre os *softwares* de Matemática Dinâmica, a escolha do *Geogebra* é justificada por ser atualmente um dos mais completos, comprovado por pesquisas realizadas, como as de Silva et al (2012), Ramalho (2013), Santos, Santos e Nunes (2014), Ferreira (2010), Gomes e Penteado (2013), Lopes (2013), Silva (2011) e Pereira (2012). Segundo o site oficial no Brasil, (http://www.geogebra.org/about), o *Geogebra* é um *software* de matemática dinâmica destinado a todos os níveis de ensino (básico e superior) reunindo geometria, álgebra, planilha de cálculo, gráficos, probabilidade, estatística e cálculos simbólicos.

Quanto à modelagem matemática, "arte de expressar por intermédio de linguagem matemática situações problemas de nosso meio" (BIEMBENGUT, HEIN, 2003, p.7), percebemos que esta é uma excelente metodologia de ensino uma vez que, à medida que se realiza uma investigação em busca de um modelo matemático que possa retratar uma determinada situação real do nosso cotidiano, o discente se depara com conceitos matemáticos necessários à sua solução (BASSANEZI, 2011, BIEMBENGUT; HEIN, 2003). O processo de modelagem matemática usado na pesquisa é o indicado por Biembengut e Hein (2003, pp.13-15), que se divide em três etapas, sendo estas, cada uma, subdivididas em duas outras: INTERAÇÃO, que é subdividida em reconhecimento da situação-problema e familiarização do problema em termos do modelo. Nesta fase faz-se um estudo sobre o assunto abordado, de forma indireta (pesquisando em revistas, jornais, livros, artigos e até mesmo na internet) ou direta, ou seja, *in loco*; MATEMATIZAÇÃO subdividida em formulação do problema e resolução do problema em termos do modelo. Nesta etapa busca-se o encadeamento do "ferramental" matemático, buscando obter expressões aritméticas, fórmulas, equações algébricas e gráficos, quer seja através de programas computacionais ou não, que levem a uma possível solução. A terceira e última etapa é a obtenção do MODELO MATEMÁTICO, subdividida em interpretação da solução e validação do modelo. Este é o momento que de fato, o modelo obtido é testado e analisado o seu nível de aproximação com a situação-problema em questão. Assim, ele é interpretado e verificado sua validação. Como explicita Bassanezi

(2011), o modelo deve pelo menos, prever o fato que o originou. Caso não se consiga os resultados esperados, deve se retornar à etapa de Matematização.

A modelagem matemática utilizada seguiu - por ter sido aplicada a um conteúdo específico do currículo - uma vertente sua chamada de Modelação Matemática. Uma das vantagens do seu uso é que o professor deve trabalhar apenas o conteúdo da grade curricular, evitando assuntos que muitas vezes requer do professor um tempo de estudo maior. Outra vantagem se traduz no tempo de aplicação, que é menor, dado que o professor já está preparado (ou quase preparado) para suprir as dúvidas que devem surgir dos alunos. Os temas a serem usados na modelação devem estar relacionados com o conteúdo curricular. Com exceção deste, que já é definido, todas as outras etapas da modelagem são seguidas (BIEMBENGUT; HEIN, 2003). Na modelação matemática, os objetivos são: aproximar outra área do conhecimento da Matemática; enfatizar a importância da matemática para a formação do aluno; despertar o interesse pela Matemática ante a aplicabilidade; melhorar a apreensão dos conceitos matemáticos; desenvolver a habilidade para resolver problemas; e estimular a criatividade (BIEMBENGUT; HEIN, 2003, p.18).

A pesquisa também foi embasada pela Teoria da Aprendizagem Significativa de Ausubel. Esta parte do princípio de que o mais importante para que ocorra a aprendizagem, é lidar com que o aluno já sabe, ou seja, com os “aspectos específicos da estrutura cognitiva que são relevantes para a aprendizagem de uma nova informação” (AUSUBEL apud MOREIRA, 2006, p.14), também chamado por ele de “conceito subsunçor”. Tal informação a ser aprendida deve relacionar-se de forma não literal e não arbitrária a essa estrutura do indivíduo (AUSUBEL apud MOREIRA, 2006, p.13).

Metodologia e sequência didática

A sequência didática de ensino foi dividida em 05 (cinco) etapas. Antes de a iniciarmos, seguindo o aspecto qualitativo e considerando a Teoria da Aprendizagem Significativa de Ausubel, analisamos o conhecimento do aluno com relação ao conteúdo de funções trigonométricas no que diz respeito à sua visão deste assunto e sua relação com mundo real, bem como o nível de aprendizagem já construído pelos mesmos. Logo, aplicamos um questionário com perguntas abertas e fechadas, cujos resultados serão discutidos no próximo tópico.

A primeira etapa constou de uma oficina cujo objetivo foi conhecer o *software Geogebra*, suas principais funções e ferramentas, em particular, àquelas necessárias ao estudo das funções trigonométricas e posteriormente às necessárias ao processo de modelagem matemática.

A segunda atendeu a uma das etapas da modelagem que é a interação, onde o estudante deve se familiarizar com o tema escolhido para o início do processo de modelagem (BIEMBENGUT; HEIN, 2003). Para isto ministramos uma aula desenvolvida por meio de slides e vídeos discutindo a importância das funções trigonométricas para outras áreas do conhecimento, tais como computação, física, geografia, engenharias, música, arquitetura, topografia, navegação por satélites, astronomia e aviação.

Na terceira etapa, na qual os estudantes já tinham certo domínio do *software Geogebra*, desenvolvemos uma oficina que os estudantes analisaram o comportamento dos parâmetros *a*, *b*, *c* e *d* nas $f(x)=a+bsen(cx+d)$ e $g(x)=a+bcos(cx+d)$.

Na quarta foi exposto por meio de slides, o processo de modelagem e sua aplicação no mundo real. Mostramos como este se dá e algumas situações onde foram feitas modelagens na busca de solucionar questionamentos. Além disso, discutimos a importância dessas funções no contexto dos fenômenos periódicos em nosso dia a dia, e sua utilização nas diversas áreas do conhecimento. No final desta etapa, analisamos ainda, o problema que iríamos modelar no próximo encontro.

A quinta e última etapa da sequência didática, teve o objetivo de modelar dois fenômenos periódicos: a altura da maré e a porcentagem de visualização da lua (fases lunares), ambos em função do tempo, visando ao final deste processo, responder à seguinte sequência de atividades:

1. Escolha um mês e encontre a função que representa a porcentagem de visualização da lua em função do tempo.
   a) Calcule a porcentagem de visualização para alguns dias. Elas se aproximam com os do site (http://www.calendario-365.com.br)? Se sim, prossiga. Do contrário, retorne à modelação;
   b) Calcule a porcentagem de visualização para um dia qualquer do mês seguinte (Ex. você modelou um mês de 31 dias. Saber a porcentagem de visualização da lua no dia 17 do mês seguinte: chamando a função de f, basta calcular f(31+17) = f(48)). O resultado se aproxima com o do site? Se sim prossiga, do contrário retorne à modelação;
   c) Neste dia a lua esta crescendo ou decrescendo? Justifique usando a função encontrada.
2. Para o dia escolhido acima, do mês seguinte, encontre a função que representa a altura da maré (consultar dados na tábua de marés no site da marinha disponível em: http://www.mar.mil.br/dhn/chm/box-previsao-mare/tabuas);
3. Com relação a este dia, usando a função modelada:
   a) Calcule a altura da maré para as horas da tabela fornecida pela Marinha;
   b) Os resultados são aproximados? Se sim, prossiga. Do contrário, retorne à modelação;
   c) Calcule a altura da maré numa hora diferente da tabela. (Ex. dia 17, às 09h35min: chamando a função de h e convertendo os minutos em horas, calcular h(9+35/60);
   d) É uma boa hora para tomar banho? Justifique usando a função modelada mostrando a altura da maré neste horário;
   e) Considerando a fase lunar e altura da maré neste dia e nesta hora, é um bom momento para pesca?

Com esta sequência didática, esperávamos que os estudantes entendessem como os parâmetros *a*, *b*, *c* e *d*, influenciavam os gráficos das funções $f(x) =a+bsen (cx+d)$ e $g(x)=a+bcos(cx+d)$; compreendessem os conceitos de período, imagem, domínio e relação entre essas funções; e principalmente, através da modelagem, percebessem a importância da matemática e sua relação com o cotidiano.

Resultados

Questionário de conhecimento prévio

Os primeiros resultados do questionário aplicado (GIL, 2002), são relativos ao conhecimento prévio, necessário à aplicação da pesquisa, uma vez que precisávamos comparar a abordagem de ensino tradicional, ou seja, a transmissão meramente via quadro e giz, com a metodologia de ensino proposta de modelagem matemática associado ao *software Geogebra*. Assim, tínhamos que saber o nível de subsunçores adquiridos antes pelos alunos, necessários à continuidade da aprendizagem (AUSUBEL apud MOREIRA, 2006).

De maneira geral, conseguimos apurar, observando o que diz Ausubel no sentido de verificar a aprendizagem prévia do aluno (MOREIRA, 2006), que estes trouxeram consigo um leve conhecimento prévio sobre o conteúdo de funções trigonométricas no tocante às análises de gráficos, períodos e imagens. No entanto, esse pouco conhecimento foi suficiente para que pudéssemos dar continuidade ao processo de modelagem matemática usando o *software Geogebra*.

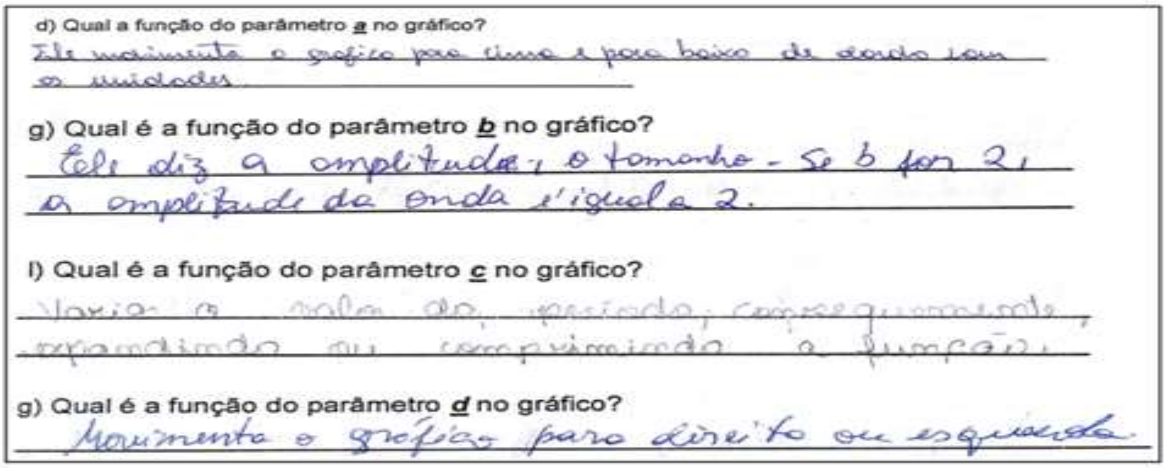
Ainda no questionário de conhecimento prévio, 67% dos alunos responderam que nunca haviam usado o *software Geogebra* para o desenvolvimento do conceito de funções trigonométricas. O restante (33%) relatou que só viu o *software* em explicações do professor, mas que não tiveram contato direto com o mesmo.

Como a pesquisa envolvia a modelagem de fenômenos periódicos que se relacionam de forma direta com a pesca (fases lunares e altura da maré), percebemos - ainda resultado do primeiro questionário - que havia uma parcela de alunos (28%), cujos pais/parentes trabalhavam com pesca na lagoa/mar, logo, a pesquisa mostrar-se-ia mais significativa para estes.

Foi percebido ainda no questionário de conhecimento prévio, que, um fato imprescindível para o entendimento das funções trigonométricas – periodicidade – não estava claro em suas mentes, uma vez que de 18 alunos, 13 responderam errado, ou não deram exemplos de fenômenos periódicos do seu dia a dia.

Oficina: trabalhando os parâmetros das funções seno e cosseno

Parte ainda dos resultados são provenientes da oficina “trabalhando os parâmetros das funções seno e cosseno no *Geogebra*” que objetivou compreender a influência de cada um dos quatros parâmetros, *a*, *b*, *c* e *d* nas funções $f(x)=a+bsen(cx+d)$ e $g(x)=a+bcos(cx+d)$ e, ao mesmo tempo, conhecer e dominar as ferramentas do *software* necessárias ao processo de modelagem.



d) Qual a função do parâmetro **a** no gráfico?

Ele movimenta o gráfico para cima e para baixo de acordo com as unidades.

g) Qual é a função do parâmetro **b** no gráfico?

Ele diz a amplitude, o tamanho - Se b for 2, a amplitude da onda é igual a 2.

l) Qual é a função do parâmetro **c** no gráfico?

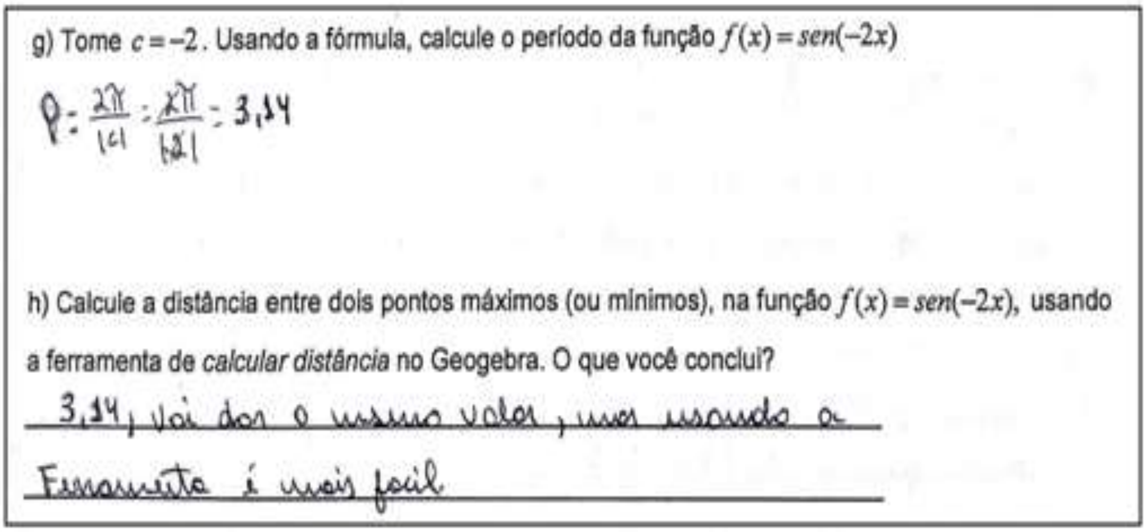
Varia o valor do período, consequentemente, expandindo ou comprimindo a função.

g) Qual é a função do parâmetro **d** no gráfico?

Movimenta o gráfico para direita ou esquerda.

Figura 1 – recorte das respostas dadas sobre o comportamento dos parâmetros.
Fonte: o autor (2016).

Ao final de cada sequência de atividade, perguntamos qual o papel de cada parâmetro (Figura 1).



g) Tome $c=-2$. Usando a fórmula, calcule o período da função $f(x)=sen(-2x)$

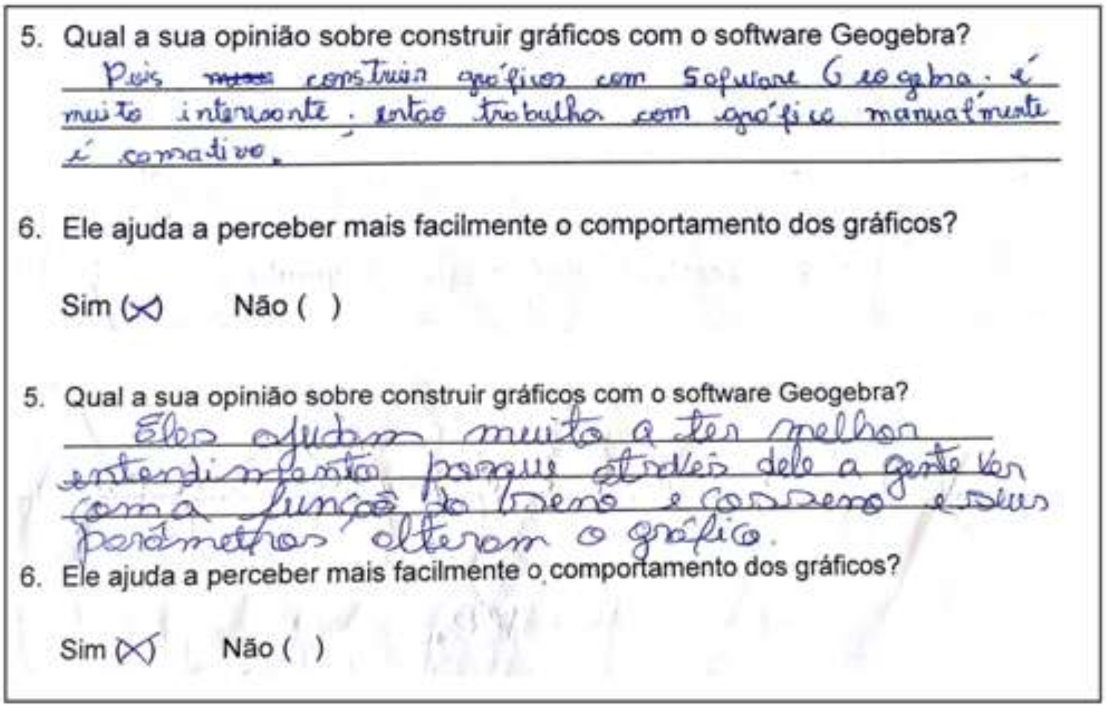
$P=\frac{2\pi}{|c|}=\frac{2\pi}{|-2|}=3{,}14$

h) Calcule a distância entre dois pontos máximos (ou mínimos), na função $f(x)=sen(-2x)$, usando a ferramenta de *calcular distância* no Geogebra. O que você conclui?

3,14, vai dar o mesmo valor, mas usando a ferramenta é mais fácil

Figura 2 – resposta do aluno J: cálculo do período de maneira manual e pelo *Geogebra*.
Fonte: o autor (2016).

Aplicamos atividades envolvendo o cálculo manual e o mesmo procedimento com o uso do *software*, objetivando que eles percebessem o quanto estas haviam sido sintetizado.


5. Qual a sua opinião sobre construir gráficos com o software Geogebra?
Pois ~~muso~~ construir gráficos com Sofware Geogebra é muito interessante, entao trabalho com gráfico manualmente é cansativo.

6. Ele ajuda a perceber mais facilmente o comportamento dos gráficos?

Sim (X) Não ( )

5. Qual a sua opinião sobre construir gráficos com o software Geogebra?
Eles ajudam muito a ter melhor entendimento porque através dele a gente ver como a função do seno e cosseno e seus parâmetros alteram o gráfico.

6. Ele ajuda a perceber mais facilmente o comportamento dos gráficos?

Sim (X) Não ( )

Figura 3 – recorte de respostas dos alunos E e M sobre a construção de gráficos com o Geogebra. Fonte: o autor (2016).

Pelas respostas obtidas (figuras 1, 2 e 3) com questionários pós-oficina, percebemos que uma das contribuições do programa, até então, citada pelos próprios discentes, é a facilidade de percepção proporcionada pelo mesmo. Isto é reflexo do dinamismo que o mesmo proporciona, uma vez que as alterações nos gráficos, decorrentes dos parâmetros, são vislumbradas de forma instantânea, e isto implica numa aprendizagem mais eficaz, corroborando assim com as pesquisas de Borba (2012) e com as afirmações de Santos, Loreto e Gonçalves (2010, p.48) sobre *softwares* quando dizem que estes “visam oportunizar a motivação e apropriação do conteúdo estudado em sala de aula.” Logo, confirma-se o caráter facilitador e otimizador da aprendizagem proporcionada pelas atividades no *Geogebra*, que decorrem do dinamismo por meio de suas várias ferramentas. Assim sendo, podemos ratificá-lo como um material potencialmente significativo segundo os preceitos de Ausubel (MOREIRA, 2006).

Ao final da oficina, constatamos, pelas observações do caderno de campo (BOGDAN; BIKLEN,1994) e através dos questionários aplicados (GIL, 2002), que os discentes conseguiram atender à proposta da mesma: dominar as ferramentas do *Geogebra* necessárias à modelagem matemática; compreender o comportamento de cada um dos quatro parâmetros das funções seno e cosseno; e, além disso, que o *software* lhes ajudassem a entender e internalizar fatos básicos relacionados às funções trigonométricas, como o entendimento sobre período, imagem, valores máximo, mínimo e amplitudes.

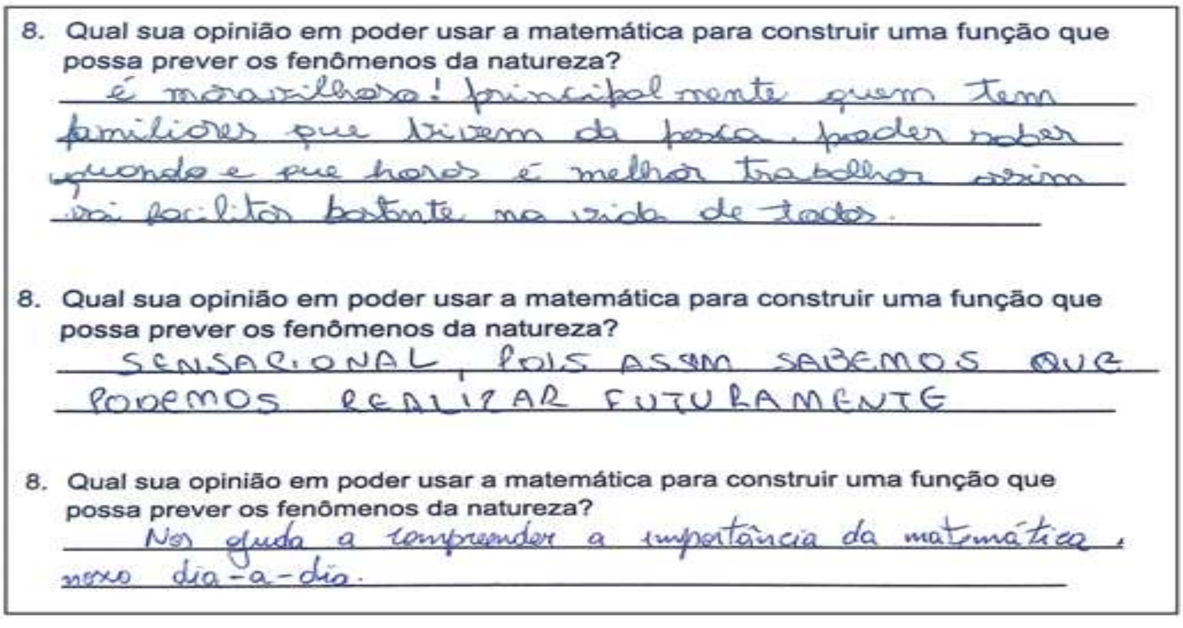
Oficina: modelagem das fases lunares e da altura da maré

Na última etapa da sequência didática realizamos a modelagem dos fenômenos periódicos. A oficina seguiu um roteiro (citado no tópico 3) de modelagem dos fenômenos, visando que os alunos adquirissem habilidade nesta. Ao fim da oficina, aplicamos uma atividade de modelagem semelhante à realizada na oficina, com o objetivo de eles realizarem esta, sozinhos. Em algumas etapas foi necessária a interferência do pesquisador no intuito de guiar a modelagem. Entretanto, este fato faz parte do próprio processo de modelagem e por ser uma característica da pesquisa participante (GIL, 2002) que adotamos para o nosso estudo.

A atividade, assim como na oficina, consistiu em os alunos encontrarem duas funções (seno ou cosseno) que traduzissem as fases lunares e a altura da maré num determinado mês e dia respectivamente. Os dados utilizados foram retirados do site <http://www.calendario-365.com.br/lua/calendario-lunar.html>, que forneceu as informações a respeito das porcentagens das fases lunares e do site da marinha <http://www.mar.mil.br/dhn/chm/box-previsao-mare/tabuas>, do qual utilizamos as informações das alturas das marés em determinadas horas. A modelagem seguiu o passo a passo sugerido por Biembengut e Hein (2003) para realização da modelação matemática: interação, matematização e modelo matemático.

Na interação, que consiste de reconhecimento da situação-problema e familiarização do problema em termos do modelo (BIEMBENGUT; HEIN, 2003), realizamos debates durante aulas com apresentações de slides e vídeos sobre os fatos que envolvem estes fenômenos: como ocorrem as fases lunares, as marés altas e baixas e como estes fenômenos estão relacionados e influenciam na pesca. Além disso, discutimos a importância das funções trigonométricas na representação de outros fenômenos naturais como pressão sanguínea e ciclo menstrual das mulheres.

Durante estes debates observamos que muitos alunos, principalmente as meninas, quando falamos sobre o fato de uma função poder representar o ciclo menstrual, estas ficaram surpresas. Além destes, também alguns alunos, cujas famílias lidam com a pesca, também se surpreenderam com a relação.


8. Qual sua opinião em poder usar a matemática para construir uma função que possa prever os fenômenos da natureza?

é maravilhoso! principalmente quem tem familiares que vivem da pesca. poder saber quando e que horas é melhor trabalhar assim vai facilitar bastante na vida de todos.

8. Qual sua opinião em poder usar a matemática para construir uma função que possa prever os fenômenos da natureza?

SENSACIONAL, POIS ASSIM SABEMOS QUE PODEMOS REALIZAR FUTURAMENTE

8. Qual sua opinião em poder usar a matemática para construir uma função que possa prever os fenômenos da natureza?

Nos ajuda a compreender a importância da matemática, nosso dia-a-dia.

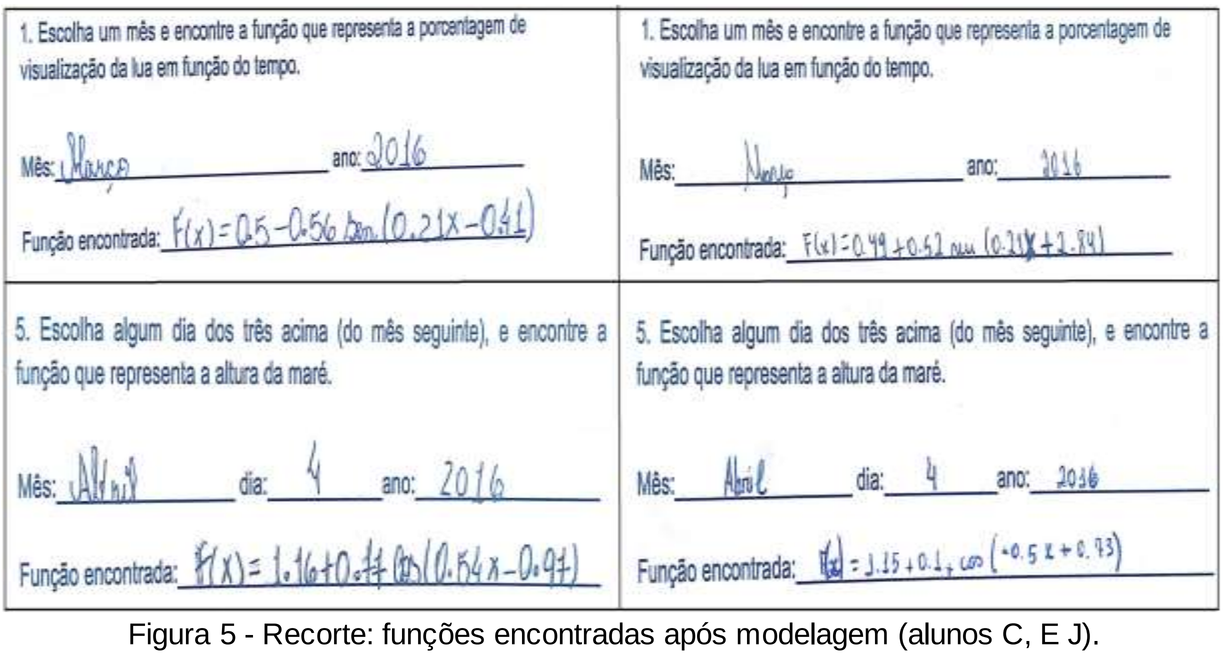
Figura 4 – recorte de respostas dos alunos A, P e R sobre o uso da matemática no cotidiano.
Fonte: o autor (2016).

De forma geral eles ficaram bem surpresos com este fato de as funções trigonométricas poderem representar um fenômeno real, como demonstram algumas das respostas do último questionário aplicado (figura 4).

A etapa de matematização foi otimizada pelo uso do *software Geogebra*. Nesta etapa onde se busca o encadeamento do “ferramental” matemático, o *software* foi decisivo na compreensão dos fatores que levariam à melhor função. A busca consistiu em encontrar os melhores parâmetros (a, b, c e d - representados pelos controles deslizantes do *Geogebra*) para as funções $f(x)=a+bsen(cx+d)$ e $g(x)=a+bcos(cx+d)$ donde seus gráficos deveriam ser ajustados aos pontos e segmentos que os interligava. Mesmo com a facilidade de uso dos controles deslizantes, foi necessário, na modelagem da altura maré, o uso de procedimentos já conhecidos tais como calcular o ponto médio, o período e a amplitude, na busca de parâmetros iniciais, os quais foram otimizados pelo programa, fazendo com que os discentes os internalizassem estes conceitos mais ainda. Assim nesta etapa foi preciso, como preconiza Biembengut e Hein (2003):

1. Classificar as informações (relevantes ou não), identificando fatos envolvidos;
2. Decidir quais os fatores a serem perseguidos, levantando hipóteses;
3. Selecionar variáveis relevantes e constantes envolvidas;
4. Selecionar símbolos apropriados para essas variáveis;
5. Descrever essas relações em termos matemáticos.

No processo de modelagem realizado pelos discentes, puderam-se corroborar as palavras dos autores quando dizem que “isto requer aguçado conhecimento sobre as entidades matemáticas usadas na formulação. O computador pode ser um instrumento imprescindível” (BIEMBENGUT; HEIN, 2003, p.14).


1. Escolha um mês e encontre a função que representa a porcentagem de visualização da lua em função do tempo.

Mês: Março ano: 2016

Função encontrada: F(x)=0.5-0.56 sen(0.21x-0.41)

1. Escolha um mês e encontre a função que representa a porcentagem de visualização da lua em função do tempo.

Mês: Março ano: 2016

Função encontrada: F(x)=0.49+0.52 sen(0.21x+2.84)

5. Escolha algum dia dos três acima (do mês seguinte), e encontre a função que representa a altura da maré.

Mês: Abril dia: 4 ano: 2016

Função encontrada: f(x)=1.16+0.77 cos(0.54x-0.97)

5. Escolha algum dia dos três acima (do mês seguinte), e encontre a função que representa a altura da maré.

Mês: Abril dia: 4 ano: 2016

Função encontrada: f(x)=1.15+0.1 cos(-0.5x+0.93)

Figura 5 - Recorte: funções encontradas após modelagem (alunos C, E J).

Fonte: o autor (2016).

A fase final da modelagem foi marcada pela obtenção do modelo matemático (figuras 5, 6 e 7). Os alunos fizeram então a interpretação da solução e validação do modelo matemático obtido. Testaram-no e analisaram o seu nível de aproximação com os dados que os originaram (BIEMBENGUT; HEIN, 2003).

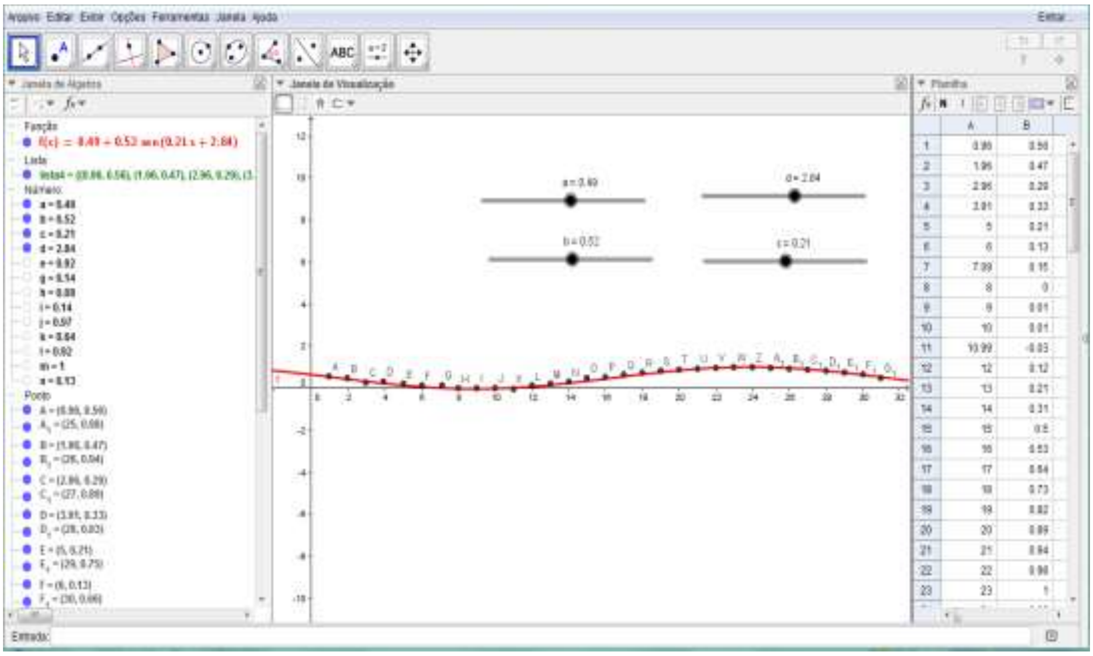


Figura 6 – Modelagem das fases lunares no Geogebra pelo aluno J.
Fonte: o autor (2016).

Todo o procedimento de obtenção do modelo matemático para a altura da maré e para as fases da lua em função do tempo (as funções) foi otimizado pelo *Geogebra* (figuras 6 e 7), levando os alunos a confrontarem de maneira mais fácil e compreensível os fatos que envolvem estes fenômenos, tais como seus ciclos.

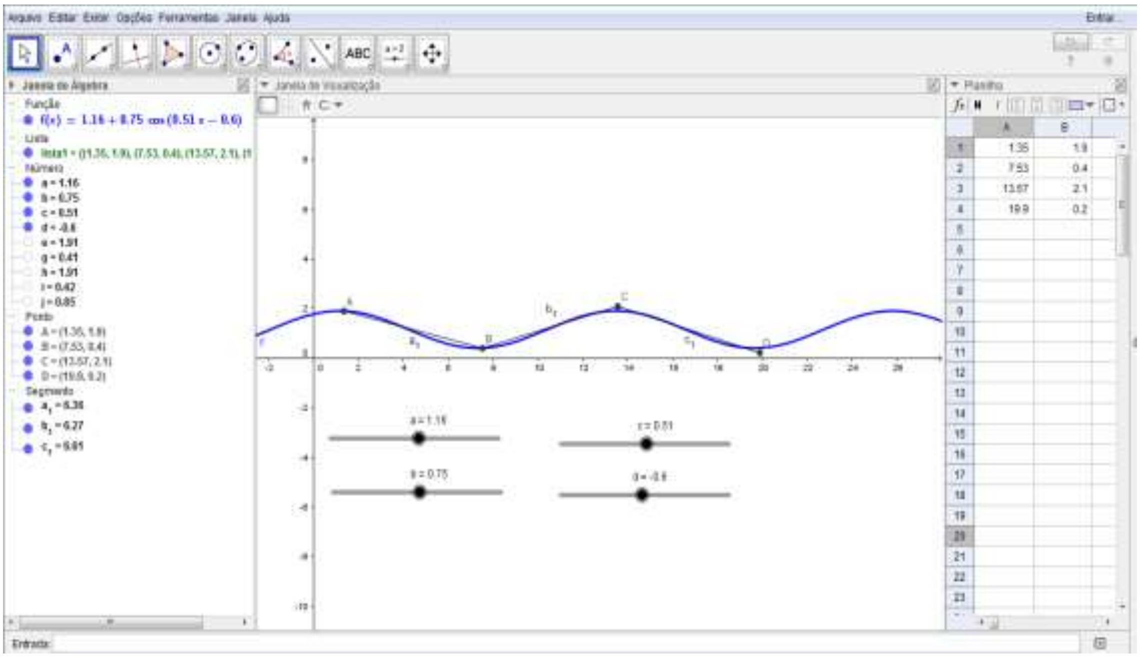
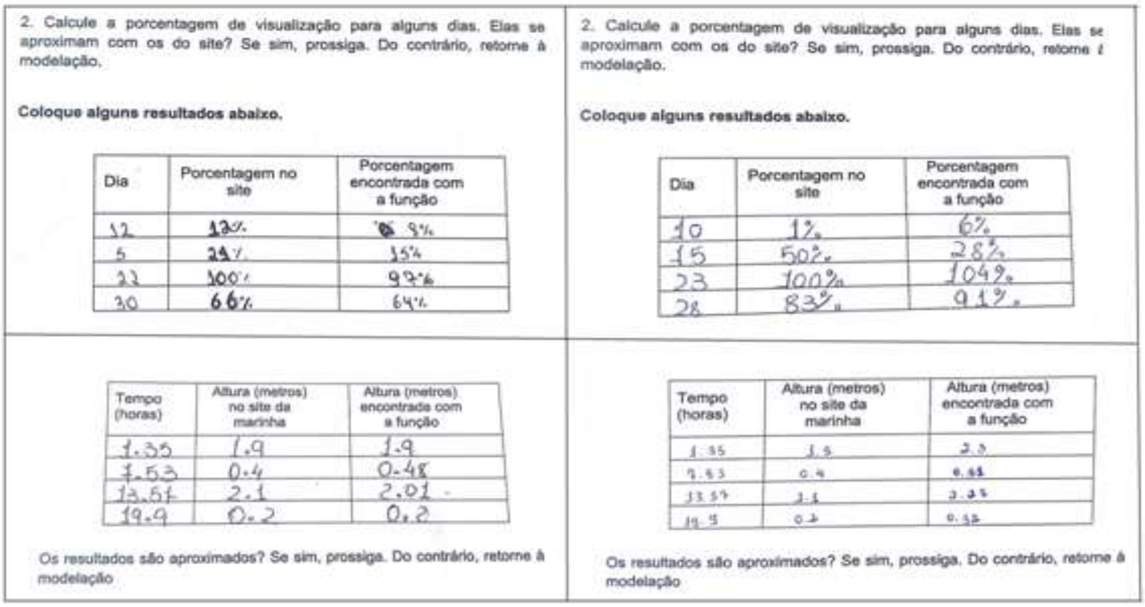


Figura 7 - Modelagem da altura da maré no Geogebra pelo aluno R.
Fonte: o autor (2016).

Estes resultados positivos obtidos com o uso do *software* também são observados nas Diretrizes Curriculares da Educação Básica do estado de Paraná:

> Atividades com lápis e papel ou mesmo quadro e giz, para construir gráficos, por exemplo, se forem feitas com o uso dos computadores, permitem ao estudante ampliar suas possibilidades de observação e investigação, porque algumas etapas formais do processo construtivo são sintetizadas (PARANÁ, 2008, p.65).

Os discentes estavam cientes de que os modelos obtidos deveriam pelo menos, prever os fatos que os originou (figura 8) e que, caso não conseguissem os resultados esperados, deveriam retornar à etapa de Matematização (BASSANEZI, 2011).



2. Calcule a porcentagem de visualização para alguns dias. Elas se aproximam com os do site? Se sim, prossiga. Do contrário, retome à modelação.

Coloque alguns resultados abaixo.

Dia	Porcentagem no site	Porcentagem encontrada com a função
12	12%	9%
5	24%	15%
22	100%	97%
30	66%	64%

Tempo (horas)	Altura (metros) no site da marinha	Altura (metros) encontrada com a função
1.35	1.9	1.9
1.53	0.4	0.48
13.51	2.1	2.01
19.9	0.2	0.2

Os resultados são aproximados? Se sim, prossiga. Do contrário, retome à modelação

2. Calcule a porcentagem de visualização para alguns dias. Elas se aproximam com os do site? Se sim, prossiga. Do contrário, retome à modelação.

Coloque alguns resultados abaixo.

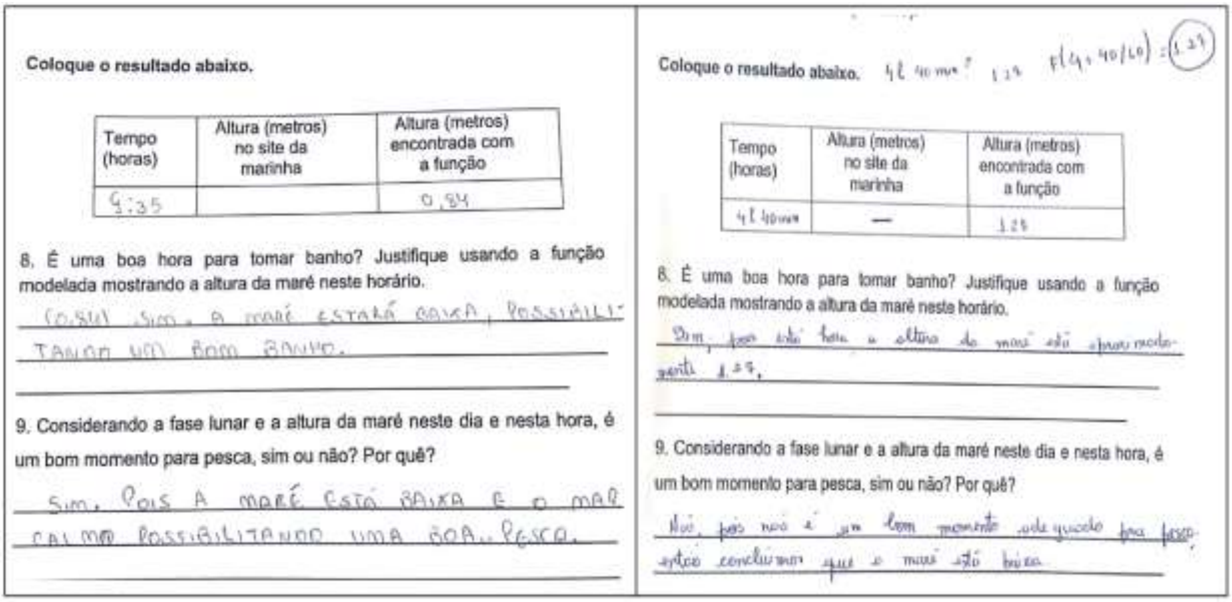
Dia	Porcentagem no site	Porcentagem encontrada com a função
10	1%	6%
15	50%	28%
23	100%	104%
28	83%	91%

Tempo (horas)	Altura (metros) no site da marinha	Altura (metros) encontrada com a função
1.35	1.5	2.3
1.53	0.4	0.45
13.57	2.1	2.25
19.5	0.2	0.32

Os resultados são aproximados? Se sim, prossiga. Do contrário, retome à modelação

Figura 8 – recorte: confrontando com os dados originais (alunos J, E e C).
Fonte: o autor (2016).

Este foi o momento principal do trabalho, onde os discentes puderam sentir, verdadeiramente, a matemática “tomar vida”. Foi o momento onde associaram a teoria com a prática (figuras 5, 6, 7 e 8).


Coloque o resultado abaixo.

Tempo (horas)	Altura (metros) no site da marinha	Altura (metros) encontrada com a função
9:35		0,84

8. É uma boa hora para tomar banho? Justifique usando a função modelada mostrando a altura da maré neste horário.

(0,84) SIM. A MARÉ ESTARÁ BAIXA, POSSIBILITANDO UM BOM BANHO.

9. Considerando a fase lunar e a altura da maré neste dia e nesta hora, é um bom momento para pesca, sim ou não? Por quê?

SIM, POIS A MARÉ ESTÁ BAIXA E O MAR CALMO POSSIBILITANDO UMA BOA PESCA.

Coloque o resultado abaixo. 4h 40 min? 1,29 f(4+40/60) = 1,29

Tempo (horas)	Altura (metros) no site da marinha	Altura (metros) encontrada com a função
4h 40min	—	1,29

8. É uma boa hora para tomar banho? Justifique usando a função modelada mostrando a altura da maré neste horário.

Sim, pois nesta hora a altura da maré está aproximadamente 1,29.

9. Considerando a fase lunar e a altura da maré neste dia e nesta hora, é um bom momento para pesca, sim ou não? Por quê?

Não, pois não é um bom momento adequado para pesca, pois concluímos que a maré está baixa.

Figura 9 – recorte: situações indagadas na modelagem dos fenômenos (alunos E e R).
Fonte: o autor (2016).

O momento foi enriquecido por debates que surgiam durantes as modelagens como as discussões de qual o melhor dia e horário para tomar banho de mar, dada a altura da onda medida pela função encontrada para a altura da maré; se neste dia iríamos ter maré alta ou baixa e melhor dia de pesca observando ainda a altura da maré e as respectivas fases lunares via funções obtidas.

Questionário final

Encerramos o estudo com a aplicação de um questionário que abordou todo o processo da pesquisa. Foram levantadas questões inerentes ao *software Geogebra*, à metodologia de ensino de modelagem matemática e aos fatores inerentes à aprendizagem significativa das funções seno e cosseno.

Com relação ao *software Geogebra* (figura 10), foi consenso entre os estudantes que este facilita a aprendizagem, considerando-o um excelente *software* para estudo, e que no caso específico do estudo de funções trigonométricas, dinamiza o seu entendimento uma vez que é possível visualizar o seu comportamento à medida que se alteram seus parâmetros, auxiliando assim na compreensão dos conceitos relativos a este assunto como período, imagem, domínio, amplitudes e construção gráfica.

O fato de este *software* ter uma interface de fácil manuseio faz com que os estudantes possam operá-lo sem tanta dificuldade. Mesmo assim, alguns estudantes ainda sentiram um pouco. No entanto isto foi devido a estes terem pouca habilidade com o uso de computador. Eis que isto ocorreu apenas no início. Percebemos que à medida que o aluno começa a manusear o programa cada vez mais, ele acaba aprendendo, de forma natural, a executar suas ferramentas e isto é decorrência ainda, de uma interface gráfica bastante intuitiva.

1. Qual sua opinião sobre o software Geogebra?

Que é bem interessante e que ajuda bastante na aprendizagem.

1. Qual sua opinião sobre o software Geogebra?

UM ÓTIMO PROGRAMA PARA ESTUDOS.

1. Qual sua opinião sobre o software Geogebra?

O software Geogebra facilita na compreensão de comportamento da função através de seus parâmetros, e também ajuda a compreender que as funções trigonométricas podem ser empregadas em nosso cotidiano.

1. Qual sua opinião sobre o software Geogebra?

Um software que provavelmente fosse usado por alunos ajudaria bastante na área da Matemática, na aprendizado e também por ser fácil de mexer e obter o software.

1. Qual sua opinião sobre o software Geogebra?

É ótimo facilita porque fica melhor a visualização no gráfico onde você o período da função e seu deslocamento

Figura 10 – recorte: respostas sobre o *software Geogebra* (alunos J, MG, MA, P e R).
Fonte: o autor (2016).

Na questão 07(sete) pedimos aos alunos que opinassem sobre aprender matemática fazendo modelagem. Nas respostas (figura 11) percebemos que eles consideraram como fazendo parte da metodologia, o uso da ferramenta *Geogebra*. Isso mostra como as duas podem andar perfeitamente juntas, confirmando o que têm observado Borba e Malheiros (2007), ao se referirem às TIC como atrizes no processo de modelagem.

7. Qual a sua opinião sobre aprender um assunto de matemática fazendo modelagem?

Muito interessante e aprender matemática no software é uma forma divertida.

7. Qual a sua opinião sobre aprender um assunto de matemática fazendo modelagem?

É muito mais prático e bem mais fácil de aprender os cálculos não são tão difíceis

7. Qual a sua opinião sobre aprender um assunto de matemática fazendo modelagem?

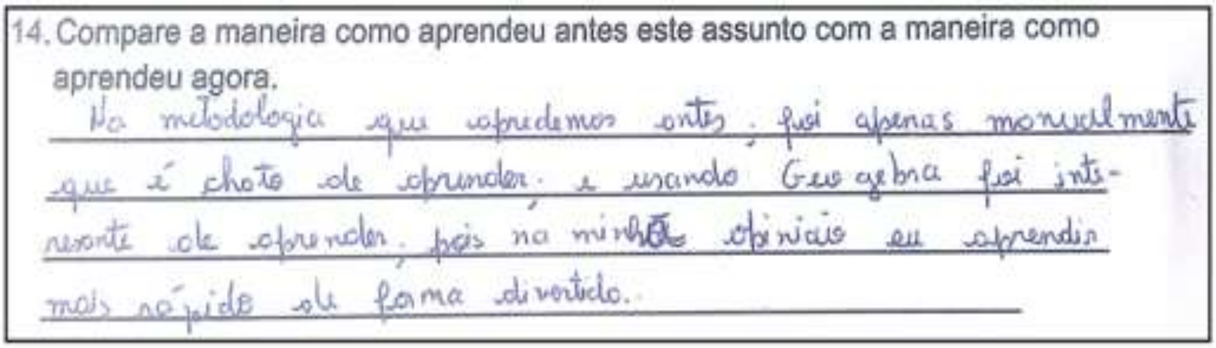
Eu gostei porque com o software fica bem mais construir o gráfico e ver a mudança que ele sofre dependendo da função

7. Qual a sua opinião sobre aprender um assunto de matemática fazendo modelagem?

Que ajuda bastante na interação e chama mais atenção do aluno

Figura 11 – respostas de alguns alunos sobre o processo de modelagem matemática.
Fonte: o autor (2016).

Com relação à metodologia tradicional de ensino (quadro e giz), foi pedido no questionário (figura 12) que comparassem este, com esta abordagem de ensino, ou seja, o uso do *software* *Geogebra* aliado à modelagem matemática.


14. Compare a maneira como aprendeu antes este assunto com a maneira como aprendeu agora.

Na metodologia que apredemos antes; foi apenas manualmente que é chato de aprender. e usando Geogebra foi inte-
resante de aprender. pois na minha opinião eu aprendir mais rápido de forma divertido.

Figura 12 – comparação de metodologias: resposta do aluno E.
Fonte: o autor (2016).

As respostas elucidam (como, por exemplo, na fala do(a) aluno(a) M: *"Bem simplificado e de melhor entendimento pelo geogebra porque da forma tradicional o aluno não imagina que o assunto possa ser aplicado em fenômenos e no cotidiano."*) uma aprendizagem significativa proporcionada pelo tipo de abordagem dada ao assunto de funções trigonométricas e ratificam o *software* como um material potencialmente significativo (MOREIRA, 2006). As opiniões dos alunos corroboram ainda com as palavras de Moran, Masetto e Behrens (2013, p.34), quando dizem que "o modelo de passar conteúdo e cobrar sua devolução é insuficiente [...]. Aprender hoje é buscar, comparar, pesquisar, produzir, comunicar" e isto é proporcionado pelo *software Geogebra* aliado à modelagem matemática. É perceptível ainda, o descontentamento com a abordagem tradicional observadas nas respostas transcritas, tal como na fala do(a) aluno(a) E: "*Na metodologia que aprendemos antes; foi apenas manualmente que é chato de aprender; e usando o Geogebra foi interesante de aprender; pois na minha opinião eu aprendir mais rápido de forma divertido*".

De um total de 14 questões, exceto 01, 07, 08 e 14, as restantes foram perguntas objetivas que trazem à tona respostas sobre o processo de modelagem com o *software Geogebra.*

Quadro 1 – Quantitativo das respostas dadas pelos discentes.

Fonte: o autor (2016).

2. Sentiu alguma dificuldade em manuseá-lo?		
Sim	02	15%
Não	11	85%
3. De forma geral, como foi para você modelar os fenômenos com o software Geogebra?		
Fácil	11	85%
Difícil	02	15%
4. Suas ferramentas são complicadas?		
Sim	03	23%

Não	10	77%
5. Ele ajuda a perceber melhor o comportamento das funções seno e cosseno?		
Sim	13	100%
Não	00	0%
6. É mais interessante construir gráficos:		
Manualmente	01	8%
Software	12	92%
9. Você sentiu dificuldades em modelar os fenômenos periódicos?		
Sim	04	31%
Não	09	69%
11. Com essa metodologia de ensino você conseguiu relacionar o conteúdo de funções trigonométricas com o seu dia a dia?		
Sim	12	92%
Não	01	8%
12. Você gostaria que seu professor usasse essa maneira de ensinar?		
Sim	12	92%
Não	01	8%
13. Você se sentiu mais motivado para aprender o assunto com essa maneira de ensinar usando o Geogebra?		
Sim	12	92%
Não	01	8%

De forma geral, é fato – observando a respostas dadas (quadro 1) – que os alunos conseguiram ter uma compreensão maior e melhor do assunto das funções trigonométricas seno e cosseno; conseguiram relacioná-lo ao cotidiano; não sentiram tanta dificuldades em manipular o software, pelo contrário, viram-no, de maneira geral, como uma ferramenta de fácil manuseio; gostariam ainda que o seu professor adotasse tal metodologia em sala de aula. Além disso, alegaram ser mais motivador aprender dessa forma.

Considerações finais

Antes de iniciarmos a pesquisa com esta turma, fizemos um teste piloto, aplicando-a em outra turma de uma escola de outro município de Alagoas. Este nos fez melhorar alguns aspectos quanto à logística de tempo de aplicação em sala de aula, uma vez que queremos usar a modelação matemática, ou seja, a modelagem matemática aplicada a um conteúdo específico do currículo. Portanto temos que pensar nos aspectos, como nos fala Biembengut e Hein (2003), que fazem ser possível tal aplicação, como o tempo de aula, a quantidade de alunos e assegurar a ementa curricular. Quanto a este aspecto percebemos durante a execução da pesquisa que a mesma precisa ser sintetizada, diminuindo ainda mais o seu tempo de aplicação. No entanto, alguma etapa, como o conhecimento *software Geogebra* de forma geral, podem ser omitidos, dando ênfase apenas àquelas ferramentas necessárias à modelagem.

Concluímos a pesquisa em 05 (cinco) encontros com duração de duas aulas de 50 minutos cada. Pelas respostas obtidas nos vários questionários aplicados, e nas observações anotadas no caderno de campo, podemos afirmar que uso do *software Geogebra* otimizou o ensino e ampliou a aprendizagem de funções trigonométricas; que é possível utilizar a modelagem matemática como uma metodologia de ensino para a aprendizagem das funções seno e cosseno; que os discentes compreenderam o comportamento de cada um dos parâmetros *a*, *b*, *c* e *d* nas funções $f(x)=a+bsen(cx+d)$ e $g(x)=a+bcos(cx+d)$; e, principalmente, os discentes conseguiram estabelecer uma conexão entre o conteúdo de funções trigonométricas e o cotidiano, através de sua aplicação na previsão de fenômenos periódicos (altura da maré e fases lunares), entendendo ainda a importância deste assunto para outras áreas do conhecimento, como física, astronomia, biologia e medicina.

Podemos, portanto, concluir que as contribuições da utilização do *software Geogebra* aliado à modelagem matemática no ensino e aprendizagem das funções trigonométricas seno e cosseno, à luz da Aprendizagem Significativa, são, além daqueles citados acima:

- Aproximar da matemática outras áreas do conhecimento, como física, astronomia, biologia e medicina;
- Conectar a matemática teórica com a prática;
- Despertar o interesse pela Matemática ante a aplicabilidade;
- Melhorar a apreensão dos conceitos matemáticos;
- Despertar o espírito de pesquisa/investigação nos discentes;
- Estimulamos a criatividade.
- Contribuir para formação em tecnologias.
- Aprender de forma significativa o assunto.

Portanto, acreditamos que o estudo realizado foi de grande valia para os estudantes participantes e será de suma importância para aqueles, cujos professores o utilizarem em suas aulas, quer seja da maneira que a fizemos, quer seja fazendo suas próprias adaptações. A pesquisa realizada contribui ainda com a Educação Matemática, no sentido de mostrar novos caminhos e possibilidades para melhoria da qualidade do ensino e da aprendizagem de matemática. Esperamos ainda que esta sequência didática de ensino possa ser utilizada e difundida no meio docente.

Referências

BARROQUEIRO, C. H; AMARAL, L. H. **O Uso das Tecnologias da Informação e da Comunicação no Processo de Ensino e aprendizagem dos Alunos Nativos Digitais nas Aulas de Física e Matemática**. Revista de Ensino de Ciências e Matemática, v. 2, n.2, jul/dez 2011.

BASSANEZI, R. C. **Ensino e aprendizagem com modelagem matemática**. São Paulo: Contexto, 2011.

BIEMBENGUT, M.S; HEIN, N. **Modelagem matemática no Ensino.** São Paulo: Contexto, 2003.

BOGDAN, R. BIKLEN, S. K. **Investigação qualitativa em educação**. Porto editora, LDA: Portugal, 1994.

BORBA, M. C; PENTEADO, M. **Informática e educação matemática.** 5. ed. Belo Horizonte, MG: Autêntica, 2012. 104 p.

CALIL, A. M. **Caracterização da utlização dasTIC pelos professores de Matemática e diretrizes para ampliação do uso**. Pós-Graduação em Educação Matemática. Mestrado Profissional em Educação Matemática – Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal, Juiz de Fora (MG), 2011.

COELHO, P. M. F. **Os nativos digitais e as novas competências tecnológicas**. Ano: 2012 – Volume: 5 – Número: 2. Disponível em: <http://periodicos.letras.ufmg.br/index.php/textolivre>. Acesso em 28 abr. 2015.

COSCARELLI, C. V. (Org.). **Novas tecnologias, novos textos, novas formas de pensar**. 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2006. 144 p.

FERREIRA, R. C. **Ensinando Matemática com o Geogebra**. ENCICLOPÉDIA BIOSFERA, Centro Científico Conhecer - Goiânia, vol.6, N.10, 2010.

GIL, A. C. Como **elaborar projetos de pesquisa**. 4. ed. São Paulo: Atlas, 2002.

GOMES, G. H, PENTEADO, M. G. **Geometria dinâmica na sala de aula: desenvolvimento do futuro professor de matemática diante da imprevisibilidade**. Ciênc. Educ., Bauru, v. 19, n. 2, p. 279-292, 2013.

LEMOS, S. **Nativos digitais x aprendizagens: um desafio para a escola**. B. Téc. Senac: a R. Educ. Prof., Rio de Janeiro, v. 35, n.3, set./dez. 2009.

LOPES, M. M. **Sequência didática para o ensino de trigonometria usando o software Geogebra**. Bolema, Rio Claro (SP), v. 27, n. 46, p. 631-644, ago. 2013.

MORAN, J. M; MASETTO, M. T; BEHRENS, M. A. **Novas tecnologias e mediação pedagógica.** 21. ed. Campinas: Papirus, 2013.

MOREIRA, M. A. **A teoria da aprendizagem significativa e sua implementação em sala de aula**. Brasília: Editora Universidade de Brasília, 2006. 186 p.

PARANÁ, Secretaria de Estado da Educação. **Diretrizes Curriculares da Educação Básica**. 2008.

PEREIRA, T. L. M. **O uso do software Geogebra em uma escola pública: interações entre alunos e professor em atividades e tarefas de geometria para o ensino fundamental e médio**. Dissertação de Mestrado. Programa de Mestrado Profissional em Educação Matemática, Juiz de Fora, Set. 2012.

PESCADOR, C. M. **Tecnologias digitais e ações de aprendizagem dos nativos digitais**. V CINFE – Congresso Internacional de Filosofia e Educação. Caxias do Sul – RS, maio de 2010.

PRENSKY, M. **Digital natives, digital immigrants**. Lincoln: MCB University Press, On The Horizon, Vol. 9 No. 6, outubro, 2001.

RAMALHO, L. V. **O uso do Geogebra no Ensino de Matemática.** IV Encontro Goiano de Educação Matemática. 16-18 de maio de 2013.

SANTOS, R., LORETO, A. B., GONÇALVES, J. L. **Avaliação de softwares matemáticos quanto a sua funcionalidade e tipo de licença para uso em sala de aula**. Revista Ensino de Ciências e Matemática, v. 1, n. 1, p. 47-65, 2010.

SANTOS, T. T, SANTOS, T. B, NUNES, D. M. **Utilização do software Geogebra nas aulas de geometria no Ensino Médio**. IV EIEMAT – Escola de Inverno de Educação Matemática, 06-08 ago. 2014.

SILVA, J. W. A., *et al*. **O uso do Geogebra no estudo de alguns resultados da Geometria Plana e de Funções .**1ª. Conferência Latino Americana de GeoGebr. 2012.

SILVA, M. F. **Trigonometria, modelagem e tecnologias: um estudo sobre uma sequência didática**. Dissertação (Mestrado) – Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais. Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática. Belo Horizonte, 2011.

Submissão: 29/09/2016
Aceite: 01/11/2016