CONHECIMENTOS RELATIVOS A NÚMEROS RACIONAIS E IRRACIONAIS DE UMA ALUNA INGRESSANTE NA LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

KNOWLEDGE OF RATIONAL AND IRRATIONAL NUMBERS OF AN UNDERGRADUATE STUDENT IN A COURSE IN MATHEMATICS TEACHING

Geraldo Claudio Broetto
Instituto Federal do Espírito Santo, gbroetto@gmail.com

Vânia Maria Pereira dos Santos-Wagner
Universidade Federal do Espírito Santo, profvaniasantoswagner@gmail.com

Resumo

O presente artigo se propõe a fazer um diagnóstico dos conhecimentos referentes a números racionais e irracionais trazidos por uma aluna ingressante de um curso de licenciatura em matemática. Os dados aqui apresentados são parte integrante de uma pesquisa de doutorado da qual participaram duas turmas de alunos ingressantes na licenciatura em matemática do Instituto Federal do Espírito Santo – IFES – Campus Vitória. O quadro teórico utilizado para analisar os dados foi a imagem do conceito e a definição do conceito (David Tall e Shlomo Vinner), compreensão incipiente (António Domingos), compreensão instrumental e relacional (Richard Skemp), e os exemplos protótipos (Rina Hershkowitz). Os resultados mostraram que a aluna possui imagem do conceito compatíveis com uma compreensão incipiente em relação a números racionais e irracionais.

Palavras-chave: Números irracionais, Licenciatura em matemática, Imagem do conceito.

Abstract

This article aims to make a diagnosis of knowledge regarding rational and irrational numbers brought by a newcomer student of an undergraduate course in mathematics teaching. The data presented here are part of a PhD research with the participation of two groups of students entering this undergraduate course in mathematics teaching at the Instituto Federal do Espírito Santo - IFES – Campus Vitória. The theoretical framework used to analyze the data was the concept image and concept definition (David Tall and Shlomo Vinner), incipient understanding (António Domingos), instrumental and relational understanding (Richard Skemp), and prototypes examples (Rina Hershkowitz). The results showed that the student has concept image with respect to rational and irrational numbers consistent with an incipient understanding of the subject.

Keywords: Irrational numbers, Degree in mathematics teaching, Concept image.

Introdução

Além de estar presente em todos os níveis de ensino, do fundamental ao superior, números irracionais também é um assunto frequente nos livros didáticos, em documentos oficiais como os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998, 2000), nas matrizes de referência para o Sistema de Avaliação da Educação Básica - SAEB (BRASIL, 2008), Prova Brasil (BRASIL, 2011) e Exame Nacional do Ensino Médio – ENEM (BRASIL, 2009). A preocupação com questões relacionadas ao ensino e à aprendizagem desses números também se faz presente no meio acadêmico, tendo sido objeto de trabalhos apresentados em congressos e artigos publicados em revistas científicas, bem como de pesquisas nacionais e estrangeiras. No Brasil, surgem trabalhos em nível de mestrado/doutorado relacionados aos números irracionais a partir da segunda metade da década de 1990[1].

Os resultados dessas pesquisas apontam para dificuldades e/ou insuficiências relacionadas principalmente à três aspectos: conhecimentos de professores e alunos (DIAS, 2002; FISCHBEIN; JEHIAM; COHEN, 1995; IGLIORI; SILVA, 1998; REZENDE, 2003; SILVA; PENTEADO, 2009), tratamento dado ao tema pelos livros didáticos (LIMA, 2001; POMMER, 2012; SOUTO, 2010) e formação de professores de matemática (MOREIRA; FERREIRA, 2012; SIROTIC; ZAZKIS, 2007; SOARES; FERREIRA; MOREIRA, 1999; ZAZKIS; SIROTIC, 2004). As dificuldades e/ou insuficiências relacionadas ao ensino e à aprendizagem de números irracionais relatadas por essas pesquisas nos motivam a pensar que o assunto é atual e relevante, justificando a realização desta pesquisa.

Dentre as várias possbilidades de contribuição em relação ao ensino de números irracionais, a proposta deste artigo situou-se na formação de professores de matemática. Entendemos a formação de professores como um processo apropriado para começar a romper um ciclo vicioso que, a nosso ver, encontra-se estabelecido: o egresso da educação básica ingressa na licenciatura sem uma conceituação adequada de números irracionais → o recém-formado professor sai da licenciatura em matemática sem uma formação que lhe forneça subsídios para ensinar números irracionais de uma forma apropriada para a educação básica → o egresso da educação básica ingressa na licenciatura sem uma conceituação adequada de números irracionais... e assim fecha-se o ciclo.

Ainda que apresente alguma incosistência no que tange aos números irracionais, a experiência escolar pregressa do estudante que chega ao ensino superior provavelmente já possibilitou a construção de algum conhecimento, que não deve ser desconsiderado. Em geral, algumas imagens conceituais referente a números irracionais já foram construídas durante a educação básica e, mesmo que não estejam corretas do ponto de vista da teoria matemática, o professor deve proceder a um diagnóstico dessas imagens quando os alunos ingressam no ensino superior (SOARES; FERREIRA; MOREIRA, 1999). É nesse sentido que pretendemos contribuir com este artigo, apresentando o diagnóstico que realizamos de

[1] Soares, Ferreira e Moreira (1999) afirmam que, após a realização de um extenso levantamento bibliográfico sobre o assunto, foram encontrados apenas trabalhos produzidos no exterior. Também não temos conhecimento de trabalhos de mestrado ou doutorado produzidos no Brasil antes da década de 1990 que sejam especificamente voltados às questões relativas ao ensino dos números irracionais.

uma aluna ingressante na licenciatura em matemática. Antes, porém, é preciso discorrer brevemente sobre o quadro teórico que foi utilizado para a análise dos dados obtidos.

Quadro teórico

As imagens conceituais citadas por Soares, Ferreira e Moreira (1999) fazem parte do quadro teórico que foi utilizado em nossa análise de dados e estão relacionadas aos processos de aquisição e de expressão de um conceito pelo indivíduo. Os termos *concept image* e *concept definition*, que traduziremos como imagem do conceito e definição do conceito, também podem ser traduzidos como imagens conceituais e definições conceituais. Esses termos foram apresentados por Rina Hershkowitz e Shlomo Vinner durante a IV Conferência Internacional para a Psicologia da Educação Matemática (PME), realizada em Berkeley no ano de 1980 (BINGOLBALI; MONAGHAN, 2008). Porém, os termos se tornaram bastante conhecidos e difundidos a partir de um artigo publicado um ano depois por David Tall e Shlomo Vinner (TALL; VINNER, 1981).

Conforme Bingolbali e Monaghan (2008), esses termos têm resistido bem ao tempo, apesar de já poderem ser considerados antigos. São termos que, em sua concepção original, remetem apenas ao plano individual, reflexo de uma época, a década de 1980, em que muitos estudos a respeito de processos de aprendizagem estavam focados em processos cognitivos individuais. Apesar disso, de acordo com esses autores, é possível adaptá-los às tendências que surgiram na década de 1990, e considerar também os processos de aprendizagem decorrentes da interação social. O trabalho de Dias (2007) é um exemplo disso, utilizando a teoria de imagem do conceito conjuntamente com pressupostos teóricos fundamentados na perspectiva lógico-histórica e na interação indivíduo-coletividade na formação de conceitos. Não negligenciamos o efeito das interações sociais nos processos de aprendizagem de um indivíduo, mas, em nossa pesquisa (BROETTO, 2016), assim como em Domingos (2003), Giraldo (2004) e Silva (2011), os termos imagem do conceito e definição do conceito foram utilizados a partir da concepção original de David Tall e Shlomo Vinner (TALL; VINNER, 1981).

A partir de estudos desses autores, dizemos que *imagem do conceito* é toda estrutura cognitiva de um indivíduo – figuras mentais, processos e propriedades – relacionada a um determinado conceito. Essa estrutura é responsável pela aquisição e pela manipulação dos conceitos, e construída ao longo do tempo por meio de experiências variadas, podendo mudar à medida que o indivíduo encontra novos estímulos e amadurecimento. Como exemplo, citamos Giraldo (2004):

> A imagem do conceito de função real de um indivíduo pode incluir elementos, tais como formas de representação (gráficos, fórmulas, tabelas, diagramas); elementos da definição (como domínio, contradomínio) propriedades específicas (como bijetividade, linearidade, monotonicidade); exemplos particulares (como certas funções familiares); possibilidades de manipulação (como operações, inversão); e assim por diante. Assim, incluem-se na imagem do conceito de um indivíduo todos os atributos associados ao conceito em questão na sua mente (p. 8-9).

Por se tratar de uma estrutura ampla e complexa, apenas pequenas partes da imagem do conceito são utilizadas em cada situação particular envolvendo de alguma forma o conceito, como a leitura de um livro, a participação em uma aula ou palestra, resolução de um exercício, entre outras. Essas partes, figuras, processos ou propriedades associadas a um determinado conceito que são evocadas em uma situação particular são chamadas de *imagem evocada do conceito.* Elas estão diretamente relacionadas com a situação e com o momento, isto é, diferentes figuras, processos ou propriedades podem ser evocadas em momentos e situações diferentes (TALL; VINNER, 1981).

Uma definição do conceito é uma descrição de um conceito usando palavras. Mais precisamente, é uma "expressão verbal que explica acuradamente o conceito de uma forma não circular" (VINNER, 1983, p. 293, tradução nossa[2]). Em geral, essas definições são criadas por especialistas e, no caso da matemática, também são resultado de um longo processo histórico de negociação, depuração, aceitação e revisão do conceito. Contudo, o indivíduo também pode construir para si uma definição pessoal para um determinado conceito, que pode ser uma variante equivalente à uma definição do conceito aceita pela comunidade científica, ou, pode ser totalmente incoerente com ela. Segundo Tall e Vinner (1981), "para cada indivíduo a definição do conceito gera sua própria imagem do conceito, que pode, em um voo de fantasia ser chamada de imagem da definição do conceito" (p. 153, tradução nossa[3]). Nas palavras de Victor Giraldo, "a imagem do conceito pode ou não incluir uma definição do conceito pessoal, que, por sua vez, pode (ou não) ser consistente com a definição formal" (GIRALDO, 2004, p. 9).

A descrição 'quadrilátero equiângulo' é um exemplo de uma definição do conceito de retângulo e uma das possíveis variantes equivalentes seria 'paralelogramo com ângulos congruentes'. Uma definição pessoal para retângulo incoerente com essas definições, e que é comum de ser encontrada entre alunos que começam a estudar geometria, seria 'quadrilátero com quatro ângulos retos, lados opostos iguais e lados consecutivos diferentes'. Essa descrição é incoerente com a definição anterior pois, entre outras coisas, não considera um quadrado como um retângulo (GIRALDO, 2004).

Conforme exposto em Tall (2003), após a publicação do trabalho que lançou as bases da imagem do conceito e da definição do conceito (TALL; VINNER, 1981), cada um dos pesquisadores seguiu um caminho diferente em seus trabalhos posteriores. Shlomo Vinner sempre considerou a definição do conceito e a imagem do conceito como células independentes na estrutura cognitiva do indivíduo. Para David Tall, a definição do conceito deve ser considerada como uma instância da imagem do conceito (TALL, 2003). São visões incompatíveis e que podem trazer problemas, inclusive com a própria noção de imagem do conceito. Considerar a definição do conceito separada da imagem do conceito é coerente com o entendimento da imagem do conceito como tudo que é não verbal relacionado ao conceito (DOMINGOS, 2003). Porém, entendemos que, nesse caso, não se enfatiza o caráter pessoal que a definição do conceito pode ter; isto é, o fato dela poder ser o resultado

[2] Verbal definition that accurately explains the concept in a non-circular way.

[3] For each individual a concept definition generates its own concept image (which might, in a flight of fancy be called the "concept definition image").

de uma construção pessoal do indivíduo. Além do mais, é necessário reportar-se a expressões como 'definição formal do conceito' quando se deseja mostrar que a definição do conceito do indivíduo não está de acordo com uma definição aceita pela comunidade acadêmica. Sendo assim, a despeito de ter que incluir algo que é verbal à imagem do conceito, optamos pelo caminho apontado por David Tall por que ele se mostrou mais adequado para nossa análise de dados[4].

Isso posto, acordamos que uma definição do conceito formal, ou seja, aquela que é criada e aceita pela comunidade científica, será chamada simplesmente de definição do conceito. A definição do conceito pessoal, isto é, aquela definição criada pelo próprio indivíduo, que pode ou não coincidir com a definição do conceito, será chamada de imagem da definição do conceito. Ao contrário de Tall e Vinner (1981), achamos que se trata de um voo bastante real e apropriado para o contexto deste artigo.

Outros conceitos importantes apresentados em Tall e Vinner (1981) são os *fatores de conflito potencial* e os *fatores de conflito cognitivo*. À medida que a imagem do conceito de um indivíduo se desenvolve, ela não precisa ser um todo coerente, isto é, podem ser construídas, ao longo do tempo, figuras mentais, definições ou processos incoerentes entre si. Fatores de conflito potencial são partes da imagem do conceito ou da definição do conceito que podem conflitar com outras partes da imagem do conceito ou da definição do conceito. Se esses fatores são evocados simultaneamente eles se tornam conflitantes, e serão chamados de *fatores de conflito cognitivo*. Esses fatores podem ser evocados de forma subconsciente, quando o sujeito sente que algo está errado em algum lugar, e pode demorar um tempo considerável até que a razão do conflito seja entendida conscientemente pelo sujeito.

Além da teoria desenvolvida por Tall e Vinner que descrevemos anteriormente, também utilizamos as ideias de outros autores em nossa análise de dados. Trata-se da *compreensão instrumental* e *compreensão relacional* formulados por Skemp (1976), e reformulados por Domingos (2003), e dos exemplos protótipos, conforme apresentados em Hershkowitz (1994). A compreensão relacional é aquela que possibilita saber o que fazer e porque está fazendo, enquanto a compreensão instrumental é aquela que proporciona o conhecimento de uma regra e a habilidade para usá-la, o que Skemp (1976) chama de *regras sem razões* (p. 2). Por exemplo, poderíamos citar a compreensão da ideia de divisão de frações. Em relação a um aluno que identifica o problema e resolve corretamente a divisão de frações aplicando a regra *repete a primeira e multiplica pelo inverso da segunda*, dizemos que possui um conhecimento instrumental do assunto. Já aquele estudante que, além de aplicar a regra, sabe por que ela é definida dessa forma (que envolve o conhecimento da relação dessa regra com outras operações como a multiplicação de frações, o inverso de uma fração dentre outros), dizemos que possui uma compreensão relacional. Ambas são importantes, ambas têm o seu valor, porém, no caso de um futuro

[4] Criamos, na verdade, um modelo próprio para análise de dados a partir das ideias de Tall, Vinner, Hershkowitz e Skemp. Como não é objetivo deste artigo tratar desse tema, sugerimos que o leitor veja Broetto (2016) para maiores detalhes a respeito do modelo criado e do referencial teórico tratado neste artigo.

professor de matemática, é desejável que, em algum momento de sua formação, atinja a compreensão relacional.

Domingos (2003) introduziu um nível de compreensão anterior ao instrumental, ao qual chamou de incipiente. Nesse nível, as imagens dos conceitos são muito incompletas, referindo-se a objetos elementares que por si só não traduzem o conceito pretendido. Na maior parte das vezes, essas imagens omitem várias características do objeto matemático e se referem apenas àquelas mais notórias, dificilmente estabelecendo relações significativas entre as mesmas. "Normalmente os próprios alunos estão conscientes das limitações dos seus conceitos" (DOMINGOS, 2003, p. 132).

O conceito de *exemplos protótipos* (ou prototípicos), desenvolvido em Hershkowitz (1994), também foi utilizado em nossa análise, pois entendemos que, assim como as ideias de Skemp (1976), também se articula com a teoria da imagem do conceito. Em geral, exemplos protótipos são aqueles mais comumente encontrados nos livros didáticos e mais utilizados por professores nas aulas de matemática, tornando-se assim para os alunos os melhores exemplares de um conceito no mosaico de imagens que compõe a imagem do conceito de um indivíduo. Por exemplo, isso ocorre quando se pede a alguém para desenhar um quadrilátero. Frequentemente, o resultado observado é um quadrado, que amiúde é o exemplo protótipo de quadrilátero, porque essa figura apresenta o maior número de características que a faz pertencer a essa categoria. Segundo Hershkowitz (1994), essas características que definem as categorias podem ser classificadas como *relevantes* ou *irrelevantes,* e no caso do quadrilátero, uma característica relevante, aquela que é necessária e suficiente para definir o que é um quadrilátero, é o fato do mesmo possuir quatro lados. As características irrelevantes, aquelas que não são necessárias nem suficientes para definir um quadrilátero são ter ângulos retos, ter dois pares de lados paralelos, ter todos os lados iguais, entre outras.

Retornando à licenciatura em matemática, consideramos de suma importância que o professor conheça a imagem do conceito e a definição do conceito dos alunos antes de iniciar a discussão de qualquer assunto, não apenas dos números irracionais. No caso de um conceito como o de número irracional ou número real, trabalhados pelos licenciandos por vários anos ao longo de sua vida escolar, é ainda mais importante diagnosticar essas imagens dos conceitos previamente, pois elas são "psicologicamente resistentes" (FISCHBEIN; JEHIAM; COHEN, 1995, p. 31) e por que, se ignoradas, podem se transformar em "obstáculos para a aprendizagem" (SOARES; FERREIRA; MOREIRA, 1999, p. 97). Nas palavras de Soares, Ferreira e Moreira (1999),

> É ingenuidade acreditar que os alunos vão abandonar suas imagens, construídas ao longo da vida escolar, para substituí-las de imediato por uma definição formalmente correta apresentada pelo professor de um curso de Análise na Universidade. De um modo geral, o aluno tende a manter as suas imagens conceituais e acrescentar a elas uma versão (possivelmente distorcida da definição formal apresentada) (p. 97).

Procedimentos metodológicos

Os dados aqui apresentados são parte integrante de uma pesquisa de doutorado desenvolvida pelos autores, da qual participaram duas turmas de alunos ingressantes na licenciatura em matemática do Instituto Federal do Espírito Santo – IFES – Campus Vitória. Dezesseis estudantes da turma ingressante de 2013 participaram de um estudo exploratório enquanto dezessete estudantes da turma ingressante de 2014 participaram do estudo principal. Ambos os estudos foram compostos de duas fases principais: uma fase inicial de diagnóstico composta por dois questionários e uma fase posterior de intervenção pedagógica envolvendo alguns experimentos de ensino. Além disso, no estudo principal realizamos ainda uma entrevista final com sete licenciandos selecionados. Nesse artigo focalizamos na fase de diagnóstico do estudo principal e analisamos os dados referentes a um dos participantes, que também foi selecionado para a entrevista final, a qual chamaremos de Agatha (nome fictício).

É importante destacar que, no estudo principal, do qual foram extraídos a maioria dos dados analisados em nossa pesquisa de doutorado (BROETTO, 2016), os estudantes cursavam a disciplina de Fundamentos de Matemática, do primeiro período do curso de licenciatura em matemática. Os pesquisadores não foram responsáveis por essa disciplina, mas, em acordo com o professor da mesma, realizaram a fase de diagnóstico antes dos números irracionais serem tratados na referida disciplina. Planejamos desta forma para identificar as principais dificuldades trazidas por eles do ensino médio e trabalhar a partir delas para a criação de experimentos de ensino, durante a fase de intervenção pedagógica.

Agatha

Agatha ingressou na licenciatura em matemática do IFES em 2014, seis anos após ter concluído o Ensino Médio em uma escola da rede estadual de ensino do Espírito Santo. Escolhemos essa aluna para trazer seus resultados neste artigo porque ela participou da maior parte das atividades propostas em nossa pesquisa e porque se enquadrou em um dos quatro perfis que criamos para organizar, categorizar e analisar os dados. Agatha incluía-se no perfil de licenciandos que cometeram muitos erros antes e após a intervenção pedagógica. A respeito de seus conhecimentos referentes aos números irracionais, disse que estudou o tema na educação básica, mas que o professor de matemática não tinha muito domínio do assunto e passou muito rápido pelo mesmo[5]. Em suas próprias palavras, durante uma atividade proposta em 29/5/2014, Agatha disse que *ele [professor] passou muito rápido, foi uma coisa assim, no susto. Ele falou irracionais, mostrou um exemplo ou outro e pronto, já foi para outra matéria.* A respeito do seu sentimento em relação aos

[5] Números irracionais é um assunto que deveria ser abordado em vários momentos na educação básica e, portanto, por vários professores. Não sabemos se Agatha se refere a um professor específico ou a todos eles. Mesmo que permaneça essa dúvida, entendemos que a informação é relevante pois mostra que, de qualquer forma, o assunto foi tratado de maneira aligeirada e sem o devido aprofundamento, como em geral temos observado que acontece na educação básica. Inclusive pelos livros didáticos. Mais detalhes em Broetto (2016).

números irracionais e às suas expectativas quanto à sua participação na pesquisa, ela disse:

> ... eu acho, eu gosto, me sinto confortável, só que vou me sentir melhor a partir do momento que eu realmente aprender o que são números irracionais. Porque a princípio eu estou um pouco insegura, porque eu não sei muita coisa. Tentando resolver os questionários eu descobri que é muito mais do que, muito mesmo mais além do que eu aprendi na escola. E é isso (Durante uma atividade proposta em 29/5/2014).

Analisaremos a seguir as respostas de Agatha aos dois questionários que aplicamos no início de nossa pesquisa, que abordavam questões referentes a números representados como frações e representações fracionárias envolvendo π e raiz quadrada, dízimas periódicas e não periódicas e definições de números racionais e irracionais. Em relação aos números $\frac{-3}{14}$, $\frac{13}{23}$ e $\frac{22}{7}$, os dois primeiros foram classificados como números irracionais, ao passo que o último foi considerado um número racional. Durante a entrevista final, pudemos confirmar uma hipótese já levantada em casos semelhantes no estudo exploratório: Agatha disse que converteu as frações para sua representação decimal, e nos casos de $\frac{-3}{14}$ e $\frac{13}{23}$, não observou que possuem uma parte periódica e por isso considerou-os irracionais.

A atitude de Agatha de converter uma fração para sua representação decimal, e a partir daí decidir se é um número racional ou irracional, já nos fornece alguma informação de como ela pensa. O procedimento realizado por Agatha também foi adotado por outros participantes da pesquisa e já nos permite uma constatação: em sua formação básica, esses estudantes não entenderam a relação de equivalência entre frações, números racionais e dízimas periódicas. Quanto aos porquês dessa atitude, entendemos que possam estar relacionados com as figuras mentais incorporadas à imagem do conceito tanto de números racionais quanto de números irracionais, ou até mesmo do próprio conceito de número construído pelos licenciandos ao longo de suas trajetórias escolares (GIRALDO, 2004; TALL; VINNER, 1981). Também pensamos em mais dois fatores que possam ser os causadores dessa postura de Agatha. Um deles diz respeito à ênfase na representação decimal observada no ensino de matemática, apontada nos livros didáticos por Souto (2010) e na formação de professores por Sirotic e Zazkis (2007). Outro fator diz respeito a uma imagem equivocada de que uma fração não representa um número, e sim uma operação que precisa ser realizada para se chegar a um número. Essa imagem equivocada também pode ser o resultado da ênfase de exemplos e de atividades de livros e/ou aulas de matemática na representação decimal.

Ainda em relação a $\frac{-3}{14}$ e $\frac{13}{23}$, observamos também que a aluna não atentou para a incoerência entre suas definições de número racional e irracional (Ver Quadro *1*) e suas afirmações a respeito desses números, o que caracteriza a presença de um fator de conflito potencial (TALL; VINNER, 1981). Em nossa pesquisa, pensamos que, no caso de Agatha e de outros licenciandos em que ocorreu uma situação semelhante, trata-se de uma definição cujo conteúdo, suas relações e implicações, não foi compreendido pelo estudante, mas apenas memorizada, porque houve apenas compreensão instrumental (SKEMP, 1976). A estrutura e o funcionamento da imagem do conceito permitem que essa definição fique ‘guardada’ em algum lugar e, mesmo que apresente incoerência em relação a outras figuras mentais, seja acionada por uma situação particular, como por exemplo, uma pergunta direta como “qual é sua definição de número racional (ou irracional)? ”. Nesse caso, entendemos que a tarefa do educador é lançar luz ao conflito cognitivo, desequilibrar cognitivamente o licenciando, fazer com que o fator de conflito potencial se torne um fator de conflito cognitivo, isto é, fazer com que ele tenha consciência do conflito e da incoerência existentes (GIRALDO, 2004; TALL; VINNER, 1981). Foram com essas ideias em mente que planejamos a entrevista final, que comentaremos adiante.

Já nos casos de razões envolvendo raízes quadradas, Agatha classificou $\frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\frac{\sqrt{5}}{2}$ como números racional e não irracional, respectivamente, enquanto $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}$ e $\frac{6}{\sqrt{3}}$ foram classificadas como números irracionais. O que está em jogo aqui são a representação fracionária e a raiz quadrada, exemplos prototípicos do número racional e do número irracional, respectivamente. Nos casos de $\frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\frac{\sqrt{5}}{2}$, a representação fracionária parece ter sido decisiva na classificação de Agatha, como apontam sua justificativa para $\frac{\sqrt{3}}{2}$ e sua definição para número racional (ver Quadro 1. Observe que a definição de número racional de Agatha menciona uma razão entre dois números, não especificando que eles devem ser inteiros). Nos outros dois casos, a imagem da raiz quadrada como número irracional sobrepõe-se à imagem da representação fracionária como número racional. Durante as atividades propostas no decorrer da intervenção pedagógica e na entrevista final, a aluna demonstrou ter dado os primeiros passos na direção da solução desse conflito cognitivo, ao reconhecer várias razões contendo raízes quadradas como números irracionais. Interessante notar que um caso semelhante, $\frac{4\pi}{3}$, não foi considerado número racional. Nesse caso, pensamos que outra parte da imagem do conceito entrou em ação, a figura do π como exemplo prototípico de número irracional, que parece tão forte que a decimal exata 3,1416 foi considerada um número irracional (ver *Quadro 1*) (HERSHKOWITZ, 1994; TALL; VINNER, 1981).

No que tange às representações decimais, Agatha classificou corretamente todas as dízimas periódicas, menos as duas decimais exatas, 3,1416 e 1,725. A primeira delas, 3,1416 foi confundida com a representação decimal de π, como já mencionamos, e, mesmo durante a entrevista final, a aluna continuava achando que se tratava de π (GIRALDO, 2004; TALL; VINNER, 1981). Em relação a 1,725, só tivemos condição de entender o raciocínio da aluna durante a entrevista final, cujo trecho transcrevemos:

> Mas eu acho que eu estava voltada...é por que eu não sabia, eu estava com tudo voltado para questão do período, aí eu imaginava que o que tinha período era racional e o que não tinha era irracional. E ainda não sei muito bem o que que é isso não (Durante a entrevista final em 16/9/2014).

Quadro 1 – Afirmações e definições de Agatha

Afirmação	***Justificativa***	***Instrumento***	***Data***
-3/14 não é racional	É um número irracional	Questionário 1	12/5/14
22/7 é racional	É uma fração		
13/23 é irracional	Seu resultado não é periódico	Questionário 2	14/5/14
$\frac{\sqrt{3}}{2}$ é racional	*É uma fração*	Questionário 1	12/5/14
$\frac{4\pi}{3}$ não é racional	[Em branco]		
$\frac{\sqrt{5}}{2}$ não é irracional	Não sei	Questionário 2	14/5/14
$\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}$ é irracional	[Em branco]	Correção de questões	21/5/14
$\frac{6}{\sqrt{3}}$ é irracional	[Em branco]		
0,0555... é racional	*É um decimal infinito*	Questionário 1	12/5/14
1,010010001... não é racional	Não é uma dízima periódica		
2,343434... é racional	É uma dízima periódica		
1,725 não é racional	[Em branco]		
0,666... é racional	É uma dízima periódica		
3,1444... é irracional	Resultado não é periódico	Questionário 2	14/5/14
1,1212212221... é irracional	Resultado não é periódico		
1,222... não é irracional	É uma dízima periódica		
3,1416 é irracional	Seu resultado não é periódico		
Definição de racional: *É o número que pode ser representado por uma razão entre dois números.*		Questionário 1	12/5/14
Definição de irracional: *É o número que não é obtido pela divisão de números inteiros.*		Questionário 2	14/5/14

Ou seja, a aluna relacionava 'ter dízima periódica' com o 'número racional', e 'não ter dízima periódica' com 'número irracional' e estendeu esse raciocínio para as decimais exatas como 1,725 e 3,1416, consideradas, portanto como irracionais.

A classificação de 3,1416 como número irracional por parte de Agatha não parece ser um caso isolado. No estudo principal, 7 licenciandos (30%) fizeram essa classificação (incluindo Agatha), no estudo exploratório também foram 7 estudantes (37%) e inclusive outras pesquisas como as de Igliori e Silva (1998) e Penteado (2004) também detectaram a associação de 3,1416 com π. Mas como esse número veio a ser considerado por Agatha como se fosse π? Como em geral esse processo se dá? Interpretamos essa situação a partir da leitura de Vinner (2011), que argumenta ser prática comum após definir números irracionais como *aquele que não pode ser expresso como uma razão de dois inteiros,* mencionar alguns números irracionais, principalmente π. Por outro lado, em um estágio posterior, é muito comum a apresentação de $\pi = 3{,}1415 \ldots$, $\pi \sim 3{,}1416$ ou $\pi \sim 3{,}14$, o que acaba fixando e/ou reforçando as primeiras casas decimais do número, como em diversas questões de prova em que o enunciado sugere "use $\pi \sim 3{,}14$". Com o tempo, o significado das reticências se perde e π pode até se tornar igual a 3,14 ou 3,1416, como ficou sugerido na fala de Agatha destacada anteriormente.

Na entrevista final, realizada em 16 de setembro de 2014, aproximadamente quatro meses após ter respondido aos itens dos primeiros questionários e ter participado de cinco atividades de nossa pesquisa, pedimos a Agatha que classificasse alguns números, e constatamos que seu desempenho foi aparentemente melhor do que nos questionários iniciais. Novamente utilizamos uma fração cuja dízima periódica tem muitos dígitos, 2/19, e ela disse que se tratava de um número racional sem converter em decimal ou recorrer à calculadora. Aparentemente estávamos diante de um avanço e de um possível uso da matemática formal via definição de número racional e de sua própria definição de número racional (TALL; VINNER, 1981). Também classificou corretamente quase todas as dízimas periódicas e não periódicas e errou apenas uma por falta de atenção. Porém, ainda na entrevista final, perguntamos mais uma vez para Agatha qual sua definição de número irracional, e ficamos surpresos com sua resposta. Ela disse que

> Se ele estiver em fração, se o resultado dele não der exato, exato assim, der uma dízima não periódica, ele é irracional. Números irracionais podem ser escritos através de raiz, né? Se não for quadrados perfeitos. Não sei, π é um número irracional, mas eu não sei te explicar, definir.

Ao longo de nossa pesquisa de campo, realizamos uma série de atividades no intuito de possibilitar que os licenciandos alcançassem uma compreensão relacional do conceito de número irracional como Skemp (1976) sugere, principalmente no que se refere à equivalência das principais definições de número irracional encontradas nos livros didáticos, quais sejam: 1) número que não pode ser representado em forma de fração de inteiros e 2) números cuja representação decimal é uma dízima não periódica. Ficamos surpresos porque, pelo trecho destacado acima, entendemos que a aluna não alcançou o que esperávamos. Ao dizer que o resultado de uma fração pode ser uma dízima não periódica, podemos inferir que ela ainda não havia entendido que uma dízima não periódica não pode ser representada por uma fração. Ou seja, apesar das diversas atividades desenvolvidas ao longo da intervenção pedagógica, suas imagens conceituais permaneciam soltas, isto é, ainda não possuíam relações umas com as outras (SKEMP, 1976; TALL;VINNER, 1981).

Ainda na entrevista final, apresentamos para a aluna sua primeira definição de número irracional, dada quatro meses antes quando respondeu ao Questionário 2 (ver Quadro *1*), com o intuito de mostrar para ela que suas definições eram conflitantes, e com isso tentar criar algum fator de conflito cognitivo, conforme trecho destacado.

> Pesquisador: Você falou que irracional é aquele número que a fração não dá dízima periódica. E depois, aqui está dizendo na sua definição que o irracional não pode ser representado por uma fração, então...
>
> Agatha: Não, ele pode.
>
> Pesquisador: Ele pode?
>
> Agatha: Acho que pode. Pode, aí vai depender do resultado dela, se é racional ou não, irracional. Por que igual aqui, um exemplo, essa daqui, deixa eu ver (pausa). Esse 13/23, isso é irracional?
>
> Pesquisador: Quando você marcou lá você disse que sim, pois seu resultado não é periódico. Só que aí tem aquela questão da sua definição que quando você escreve como razão de inteiros é racional, não é? Então como que o 13/23 pode ser irracional?
>
> Agatha: Então no caso eu teria que mudar minha definição.

Do ponto de vista da teoria matemática, a primeira definição da aluna era mais próxima da definição do conceito do que a segunda, apesar de suspeitarmos da primeira se tratar de algo apenas memorizado, pois é semelhante ao que se pode encontrar em muitos livros didáticos. Ao ser estimulada para que observasse a incoerência entre as duas definições, ela descarta a primeira e mantém a segunda definição, e reforça ainda mais o que já dissemos anteriormente: ela ainda não havia entendido que uma fração não pode resultar em uma dízima não periódica e, que necessariamente será uma decimal exata ou uma dízima periódica. Ao final da entrevista, ela parece entender que precisaria mudar novamente sua definição, o que para nós representa um indício de que ela percebeu que há algo errado. Porém, pensamos que ainda seriam necessárias mais discussões, outras atividades e situações que possibilitassem que a aluna tomasse consciência do conflito cognitivo estabelecido em sua imagem do conceito de números racionais e irracionais.

Considerações finais

No planejamento da intervenção pedagógica, levamos em conta o diagnóstico prévio realizado para desenvolver atividades que possibilitassem aos futuros professores atingir uma compreensão relacional no que se refere aos números racionais e irracionais, afinal, entendemos que isso é o que se espera de um futuro professor de matemática. Porém, constatamos que a maioria dos licenciandos que participou da pesquisa não atingiu o objetivo esperado, e Agatha é um exemplo disso. A presença de imagens dos conceitos incoerentes, a incapacidade de usar suas próprias definições para reconhecer números racionais e irracionais e as dúvidas que ainda estavam presentes durante a entrevista final mostram que a aluna não atingiu uma compreensão relacional a respeito de números racionais e irracionais (GIRALDO, 2004; SKEMP, 1976; TALL;VINNER, 1981).

Em relação ao tratamento dado aos números irracionais, o histórico escolar de Agatha pode explicar o seu desempenho em nossa pesquisa. Como ela mesma relatou, sua experiência anterior com os números irracionais não foi a mais adequada. Mas o que seria um tratamento adequado? No ensino fundamental, os PCN recomendam que a abordagem dos números irracionais não siga por um caminho formal, evitando-se a associação de número irracional com radicais. Do ponto de vista da aprendizagem, espera-se que

> [...] o aluno identifique o número irracional como um número de infinitas casas decimais não-periódicas, identifique esse número com um ponto na reta, situado entre dois racionais apropriados, reconheça que esse número não pode ser expresso por uma razão de inteiros; conheça números irracionais obtidos por raízes quadradas e localize alguns na reta numérica, fazendo uso, inclusive, de construções geométricas com régua e compasso (BRASIL, 1998, p. 83).

O que os PCN apregoam para a aprendizagem de irracionais, segundo nosso referencial, pode ser chamado de conhecimento instrumental. A nosso ver, trata-se de um norte a seguir, uma base para depois se trabalhar e aprofundar os porquês, indo além das “regras sem razões” (SKEMP, 1976, p. 2) e possibilitando o desenvolvimento de uma compreensão relacional. Analisando a participação de Agatha na pesquisa como um todo, por não ter atingido o que é esperado pelo PCN, ela não alcançou uma compreensão instrumental. Pelos erros apresentados, como achar que uma fração de inteiros pode resultar em um número racional ou irracional, e por apresentar vários sinais de “memorização e ventriloquismo” (DOMINGOS, 2003, p. 133), a aluna parece ainda estar em um nível incipiente de compreensão. Para atingir o nível instrumental, e posteriormente o relacional, concluímos que seriam necessárias mais discussões, situações e atividades diversas que possibilitassem a aluna tomar consciência dos conflitos cognitivos estabelecidos em sua imagem do conceito de números racionais e irracionais.

Referências

BINGOLBALI, Erhan; MONAGHAN, John. Concept image revisited. **Educational Studies in Mathematics**, v. 68, n. 1, p. 19–35, 2008.

BRASIL. **Matriz de referência Prova Brasil –** matemática, 4a série do Ensino Fundamental. Brasília: Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira, 2011.

______. **Matriz de referência para o ENEM 2009**. Brasília: Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira, 2009.

______. **Plano de Desenvolvimento da Educação**: SAEB, ensino médio, matrizes de referência, tópicos descritores. Brasília: MEC/SEB, 2008.

______. **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio -** Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC/SEMT, 2000.

______. **Parâmetros Curriculares nacionais**: matemática (3° e 4° ciclos do ensino fundamental). Brasília: MEC/SEF, 1998.

BROETTO, Geraldo Claudio. 2016. **O ensino de números irracionais para alunos ingressantes na licenciatura em matemática**. Tese (Doutorado em Educação). Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, 2016.

DIAS, Marisa da Silva. **Formação da imagem conceitual da reta real**: um estudo do desenvolvimento do conceito na perspectiva lógico-historica. 2007. Tese (Doutorado em Educação). Universidade de São Paulo, São Paulo, 2007.

______. **Reta real**: conceito imagem e conceito definição. 2002. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2002.

DOMINGOS, António. **Compreensão de conceitos matemáticos avançados** – a matemática no início do superior. 2003. Tese (Doutorado em Ciências da Educação). Universidade Nova de Lisboa, Lisboa, 2003.

FISCHBEIN, Efraim; JEHIAM, Ruth; COHEN, Dorit. The concept of irrational numbers in high-school students and prospective teachers. **Educational Studies in Mathematics**, n. 29, p. 29–44, 1995.

GIRALDO, Victor Augusto. **Descrições e conflitos computacionais**: o caso da derivada. 2004. Tese (Doutorado em Ciências em Engenharia de Sistemas). Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2004.

HERSHKOWITZ, Rina. Aspectos psicológicos da aprendizagem da geometria. **Boletim GEPEM**, v. 32, p. 3–31, 1994.

IGLIORI, Sonia Barbosa Camargo; SILVA, Benedito Antônio da. Conhecimentos das concepções prévias de estudantes sobre números reais: um suporte para melhoria do ensino-aprendizagem. In: REUNIÃO ANUAL DA ANPED, 21., 1998, Caxambu. **Anais**... Caxambu: Anped, 1998.

LIMA, Elon Lages (Ed.). **Exame de textos**: análise de livros de matemática para o ensino médio. Rio de Janeiro: VITAE/IMPA/SBM, 2001.

MOREIRA, Plínio Cavalcanti; FERREIRA, Maria Cristina Costa. O que é número real? Os números reais na formação do professor de matemática. In: CURY, Helena Noronha; VIANNA, Carlos Roberto (Org.). **Formação do professor de matemática**: reflexões e propostas. Santa Cruz do Sul: IPR, 2012. p. 49–94.

PENTEADO, Cristina Berndt. **Concepções de professores do ensino médio relativas à densidade do conjunto dos números reais e suas reações frente a procedimentos para a abordagem desta propriedade**. 2004. 247 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica, São Paulo. 2004.

POMMER, Wagner Marcelo. **A construção de significados dos números irracionais no ensino básico**: uma proposta de abordagem envolvendo os eixos constituintes dos Números Reais. 2012. 246 f. Tese (Doutorado em Educação). Universidade de São Paulo, São Paulo. 2012.

REZENDE, Wanderley Moura. **O ensino de Cálculo**: dificuldades de natureza epistemológica. 2003. 468 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática). Universidade de São Paulo, São Paulo. 2003.

SIROTIC, Natasa; ZAZKIS, Rina. Irrational numbers on the number line – where are they? **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**, v. 38, n. 4, p. 477–488, 15 jun. 2007.

SKEMP, Richard R. Relational understanding and instrumental understanding. **Mathematics Teaching**, n. 77, p. 20–26, 1976.

SILVA, Ana Lúcia Vaz. **Números reais no ensino médio -** identificando e possibilitando imagens conceituais. 2011. 340 f. Tese (Doutorado em Ciências Humanas – Educação). Pontifícia Universidade Católica, Rio de Janeiro. 2011.

SILVA, Benedito Antonio da; PENTEADO, Cristina Berndt. Fundamentos dos números reais: concepções de professores e viabilidade de início do estudo da densidade no ensino médio. **Educação Matemática em Pesquisa**, v.11, n. 2, p.351-371, 2009.

SIROTIC, Natasa; ZAZKIS, Rina. Irrational Numbers: the gap between formal and intuitive knowledge. **Educational Studies in Mathematics**, v. 65, n. 1, p. 49–76, 2007. Disponível em: <http://link.springer.com/10.1007/s10649-006-9041-5>. Acesso em: 25 set. 2013.

SOARES, Eliana Farias; FERREIRA, Maria Cristina Costa; MOREIRA, Plinio Cavalcanti. Números reais: concepções dos licenciandos e formação matemática na licenciatura. **Zetetiké**, v. 7, n. 12, p. 95–117, 1999.

SOUTO, Alexandre Machado. **Análise dos conceitos de número irracional e número real em livros didáticos da educação básica**. 2010. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática). Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio Janeiro, 2010.

TALL, David. Concept image and concept definition. 2003. Disponível em: http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/themes/concept-image.html. Acesso em: 17 set. 2015.

TALL, David; VINNER, Shlomo. Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. **Educational studies in mathematics**, v. 12, p. 151–169, 1981.

VINNER, Shlomo. The role of examples in the learning of mathematics and in everyday thought processes. **ZDM**, v. 43, n. 2, p. 247–256, 2011. Disponível em: http://link.springer.com/10.1007/s11858-010-0304-3.

______. Concept definition, concept image and the notion of function. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**, v. 14, n. 3, p. 293–305, 1983.

ZAZKIS, Rina; SIROTIC, Natasa. Making sense of irrational numbers: focusing on representation. In: CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 28., 2004, **Anais**... Bergen: PME, 2004, p. 497–504.

Submissão: 22/11/2015
Aceite: 23/02/2017