CONSTRUÇÃO DE FUNÇÕES A PARTIR DE PROBLEMAS GEOMÉTRICOS: UMA ABORDAGEM INVESTIGATIVA

CONSTRUCTION OF FUNCTIONS FROM GEOMETRIC PROBLEMS: AN INVESTIGATIVE APPROACH

Maria Elisa Esteves Lopes Galvão
Universidade Anhanguera de São Paulo - UNIAN-SP / elisa.gal.meg@gmail.com
Nielce Meneguelo Lobo da Costa
Universidade Anhanguera de São Paulo - UNIAN-SP / nielce.lobo@gmail.com
Maria Elisabette Brisola Brito Prado
Universidade Anhanguera de São Paulo - UNIAN-SP / bette.prado@gmail.com

Resumo

Este artigo apresenta uma pesquisa cujo objetivo foi identificar possibilidades da abordagem investigativa para o ensino de funções a partir de problemas geométricos. A proposta foi desenvolvida no âmbito de um projeto do Programa Observatório da Educação, com participação de nove professores do Ensino Médio de escolas públicas de São Paulo, em dois encontros de quatro horas. As atividades integraram conhecimentos sobre áreas e funções, foram enunciadas no quadro geométrico e implementadas com auxílio de material concreto e recursos tecnológicos e, posteriormente, aplicadas em sala de aula. Como suporte teórico consideramos as mudanças de quadros de Douady e como metodologia a qualitativa com coleta por vídeo gravação dos encontros e recolha dos registros tanto em papel e lápis quanto em arquivos digitais. A análise interpretativa evidenciou que, para os participantes, essas atividades investigativas podem auxiliar a compreensão de propriedades de funções afins e quadráticas e o estabelecimento de conexões entre elas e as áreas e perímetros das figuras geométricas estudadas. Além disso, a abordagem investigativa pode auxiliar a integrar conteúdos em campos diversos da matemática e a desenvolver a capacidade de investigação e a perseverança na busca de resultados, especialmente quanto ao uso de diferentes estratégias e técnicas de validação.

Palavras-chave: Atividades Investigativas. Funções. Geometria. Geogebra. Ensino Médio.

Abstract

This paper presents a research that aimed to identify possibilities of the investigative approach to teach functions from geometric problems. The proposal was carried out as part of a broader Brazilian project of the Programa Observatório da Educação (Education Observatory Program) and developed with a group of nine high school teachers from public schools in the city of São Paulo throughout two four-hour meetings. The activities were posed in the geometric framework and implemented with concrete materials and technological resources, later they were applied in teacher's classroom. The theoretical support came from Douady's jeux des cadres. The research methodology was qualitative, the data was comprised of teachers' productions (digital files and paper and pencil registers) and classroom materials. The interpretative analysis highlighted that, in the participant teachers' view, these investigative activities may help the students better understand aspects related with the study of functions while establishing connections among them and the areas and perimeters of the geometric figures studied. The participants concluded that the investigative approach may help the students to integrate several mathematics field contents and to develop research capacity and perseverance in the search for results, particularly regarding the use of different strategies, validation techniques and results control.

Keywords: Investigative activities. Functions. Geometry. Geogebra. High School

Introdução

Ao ensinar matemática, um desafio que se coloca aos professores é o de adotar uma abordagem de ensino que permita ao aluno uma atitude ativa e condutora da própria aprendizagem. Nesse sentido, levar o aluno a desenvolver na sala de aula uma postura investigativa em relação à matemática, de modo que ele levante conjecturas, possa testá-las, explorar situações propostas, agir por conta própria e talvez descobrir caminhos e validar soluções encontradas. Essa forma de abordagem para o ensino é particularmente desafiadora, mas depende das tarefas propostas e das atividades nas quais os alunos se envolvem, as quais devem incentivá-los e permitir ações independentes e autônomas.

O desenvolvimento de atitudes investigativas nos estudantes ao trabalhar com resolução de problemas é recomendado nos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (BRASIL, 1998) para propiciar indagações sobre a realidade, incentivar resoluções que envolvam a seleção de procedimentos e o uso do pensamento lógico, criativo, formal ou intuitivo, bem como a verificação constante de resultados e o desenvolvimento da capacidade de análise crítica. Além do incentivo à capacidade de interpretação e análise de estratégias, métodos e processos, é também destacada a importância da utilização de diferentes representações matemáticas e de recursos tecnológicos adequados à condução da discussão dos problemas. Entre os objetivos do ensino de matemática elencados nos PCN está o de levar o aluno a "estabelecer conexões entre temas matemáticos de diferentes campos e entre esses temas e conhecimentos de outras áreas curriculares" (BRASIL, 1998, p. 48).

Inspiradas nestes aspectos destacados das orientações curriculares, buscamos na literatura os trabalhos de educadores portugueses liderados por João Pedro da Ponte sobre atividades investigativas em sala de aula. Em Portugal, recomendações semelhantes às que encontramos nos PCN quanto à proposição de investigações em sala de aula motivaram Ponte, Oliveira, Brunheira, Varandas e Ferreira (1998) a pesquisarem o potencial das tarefas investigativas para a atribuição de significado pelos alunos e para auxiliar o professor a propor situações que integrem diversos conteúdos matemáticos.

No artigo analisamos uma proposta de atividades de caráter investigativo para a construção de funções a partir de problemas geométricos desenvolvida no âmbito de um projeto maior do Programa Observatório da Educação da CAPES, com a participação de nove professores do Ensino Médio de escolas públicas da cidade de São Paulo e discutimos suas possibilidades para o ensino e a aprendizagem de matemática. Neste sentido, formulamos a questão de pesquisa: Quais são as possibilidades para o ensino e a aprendizagem de conteúdos relativos à Geometria e Funções de uma abordagem por atividades investigativas?

A fundamentação teórica para a análise de dados, além das pesquisas sobre tarefas e atividades investigativas, foi complementada pelos estudos de Douady e Perrin-Glorian (1989) e de Douady (1992) sobre mudanças de quadros, uma vez que a proposta desenvolvida com professores do Ensino Médio envolveu diferentes formulações de dois problemas e permitiu uma sequência de abordagens distintas, por meio de ferramentas e técnicas. Tais problemas foram propostos no quadro geométrico e reformulados no quadro algébrico, com auxílio de material concreto e de ferramentas computacionais, para explorar o quadro original e os quadros auxiliares de trabalho.

A seguir apresentamos aspectos encontrados na literatura sobre atividades investigativas e sobre mudanças de quadros. Na sequência abordamos os procedimentos metodológicos da pesquisa, descrevemos e analisamos as atividades desenvolvidas e, finalizando, explanamos as conclusões.

Atividades Investigativas e Mudanças de Quadros

Neste artigo entendemos atividades investigativas como atividades de cunho aberto elaboradas para serem aplicadas com propósito de ensino e de aprendizagem. Destacamos que o conceito de investigação na atividade para ensino assumido por nós, segue Ponte (2003, p. 94), para o qual "investigar significa trabalhar a partir de questões que nos interessam e que se apresentam inicialmente confusas, mas que conseguimos clarificar e estudar de modo organizado".

O fio condutor para o desenvolvimento das atividades investigativas passa pelos momentos de exploração, conjectura, testes de hipóteses, justificação e validação pelo aluno, com o acompanhamento, a ajuda e a orientação do professor. Partimos do pressuposto que uma atividade investigativa pode impulsionar a exploração das ideias matemáticas relacionadas ao problema em análise, com a consideração sobre as possíveis estratégias a serem mobilizadas para sua solução e validação.

Ponte, Brocardo e Oliveira (2003, p. 13) ressaltam que, para os matemáticos "investigar é descobrir relações entre objetos matemáticos conhecidos ou desconhecidos, procurando identificar as respectivas propriedades". Os autores destacam manifestações de importantes matemáticos do século XX enfatizando que os principais momentos de uma investigação matemática estão relacionados à exploração e à formulação da questão ou problema, às conjecturas feitas sobre ele, aos testes e possíveis reformulações da questão, à sua justificação e avaliação dos procedimentos empregados na busca de solução e resultados obtidos. Ponte et al (2003) observam que esta trajetória de investigação e desenvolvimento do conhecimento matemático descrita acima pode ser proposta para os estudantes em sala de aula, no contexto de resolução de problemas, e isso se caracteriza como uma oportunidade de "trazer para a sala de aula o espírito da atividade matemática genuína" (p. 23). Assim sendo, entendemos que a abordagem investigativa no ensino de matemática pode propiciar o desenvolvimento crítico dos alunos em relação ao conhecimento matemático, uma oportunidade de se sentirem construtores de seus conhecimentos e acreditarem em suas potencialidades e, consequentemente, contribuir para sua autoestima, como enfatizam Ferreira, Peres e Vaz (2006). As questões explicitadas por esses pesquisadores estão relacionadas às possibilidades dos alunos tirarem proveito de um trabalho de caráter investigativo e também quanto às condições e ao tipo de trabalho de sala de aula para que o professor possa promovê-lo de maneira frutífera. Observam que atividades de resolução de problemas são propícias ao trabalho investigativo e que problemas ou exercícios simples podem desencadear uma investigação cujo desenvolvimento pode ocorrer individualmente ou em grupos, seguido por uma discussão coletiva dos resultados.

Encontramos também nos estudos de Serrazina, Vale, Fonseca e Pimentel (2002) uma discussão relacionada aos termos investigações, atividades investigativas e resolução de problemas em Matemática, seus aspectos comuns e suas diferentes características, e os reflexos nas atividades em sala de aula. As autoras observam que no contexto de uma atividade investigativa não existe primordialmente a preocupação de encontrar uma solução, mas de considerar diferentes caminhos que possam ser adotados para chegar a ela, num processo de caráter aberto e um ponto de partida que pode ser pouco definido. Recuperam pontos de vista de Ernest (1991, apud Serrazina et al, 2002), que considera uma atividade investigativa como divergente, em razão deste caráter aberto, e a resolução de problemas uma atividade convergente, com objetivo de encontrar um caminho para chegar à resposta, com algumas sugestões de heurísticas já estabelecidas. As autoras discutem o texto de Ernest sobre as diferentes abordagens para o ensino e os papéis do professor e do estudante no âmbito de cada uma delas. Esse autor distingue a abordagem investigativa da utilizada ao se propor a resolução de problemas. Na primeira o professor apresenta uma situação para a classe ou adota uma proposta de algum aluno, e os estudantes tentam estabelecer caminhos para resolvê-la. Já na abordagem de resolução de problemas, o problema é proposto pelo professor e o aluno deve encontrar o caminho para chegar à solução.

Pode ainda ocorrer na abordagem investigativa em sala de aula o que Ernest denominou de “descoberta guiada”, na qual o professor escolhe a situação e orienta o aluno para os objetivos propostos. As autoras observam que atividades investigativas e de resolução de problemas estão próximas, pois buscam engajar os alunos em processos complexos de pensamento. As concepções podem ser diversas, dependendo dos autores e do tipo de trabalho realizado, mas ambas propiciam aos participantes uma oportunidade diferenciada e inovadora para desenvolver suas capacidades cognitivas além de atitudes e valores.

A organização de uma atividade investigativa (Ponte et al, 2003, p. 29) compreende três fases: a introdução da tarefa conduzida pelo professor, a investigação propriamente dita realizada pelos estudantes individualmente ou em pequenos grupos e a discussão dos resultados, a partir dos relatórios dos participantes. Cabe ao professor garantir que todos compreendam a situação em discussão e provocar a postura investigativa dos estudantes pouco habituados a este tipo de atividade, levantando questões que apontem novos caminhos. Além disso, é importante que o professor conduza as comunicações, a sistematização dos resultados e as reflexões dos grupos sobre o trabalho realizado.

As atividades que propusemos para o trabalho investigativo estão relacionadas com problemas propostos no âmbito da Geometria, mais especialmente, tratam de área de figuras planas, contexto este que leva a caminhos que consideram o uso da Álgebra.

Vale ressaltar que ao longo deste texto utilizamos o termo atividade, segundo a acepção de Leontiev (2004) para o qual atividades são formas pelas quais o homem se relaciona com o mundo e interage com os objetos, estabelecendo intencionalmente objetivos e procurando atingi-los por meio de ações planejadas. Destacamos que em diversos contextos, como por exemplo o da Ergonomia (normas de trabalho), são diferenciados os termos atividade e tarefa. A tarefa é o trabalho prescrito, ou aquilo que a pessoa deve realizar a partir de decisões de alguma outra pessoa ou dela própria. A atividade relaciona-se à como a tarefa é realizada, ou seja, ao modo de executar a tarefa.

O trabalho de Douady e Perrin-Glorian (1989) nos forneceu o suporte teórico para analisar a situação proposta. Para as autoras, o conjunto de objetos de uma área da matemática, as relações entre eles e as imagens mentais que um aprendiz pode associar aos objetos e suas relações constituem um quadro. Num quadro, os objetos matemáticos podem ser considerados também como ferramentas ou instrumentos, se o foco do interesse é no seu uso para a resolução de um problema. As imagens mentais podem desempenhar um papel importante como ferramentas do quadro. As autoras consideram que a construção do conhecimento matemático está associada à utilização explícita e à capacidade de adaptação de ferramentas num processo de formulação e resolução de problemas. Neste processo, intervêm de forma interativa os conceitos, como objeto ou ferramenta, caracterizando a chamada dialética ferramenta-objeto.

As mudanças de quadro são as diferentes formulações de um problema que podem permitir um novo acesso e diferentes maneiras de enfrentamento das dificuldades identificadas no processo de resolução, por meio de ferramentas ou técnicas alternativas não disponíveis na abordagem anterior.

O jogo de quadros é uma mudança de quadros provocada por iniciativa do professor ao propor o problema. Desta forma, pode possibilitar o surgimento de questões pertinentes para fazer avançar as fases da discussão do problema e favorecer a aprendizagem. Dado um problema formulado em um quadro, as experiências e conhecimentos do aprendiz podem levá-lo a traduzi-lo em outro quadro e, assim, reinterpretar as questões iniciais nesse novo contexto, estabelecendo possíveis correspondências. Essas correspondências em geral são parciais, e podem exigir a mobilização de novos objetos e relações que favorecem a aprendizagem. As tarefas rotineiras, em geral, ficam restritas a um único quadro. A escolha de situações adequadas à mudança ou ao jogo de quadros é especialmente importante para provocar um desequilíbrio e um posterior reequilíbrio nas correspondências estabelecidas pelo aluno entre os objetos e relações nos diferentes quadros, caracterizando a dialética ferramenta-objeto.

Para Douady (1992) uma importante característica da Matemática é a capacidade de traduzir um problema em diversos quadros: algébrico, numérico, geométrico, analítica, etc..., fazendo com que tenhamos diversas ferramentas de resolução. Por iniciativa do docente, um problema, convenientemente escolhido, pode ser abordado sob diversos enfoques, aumentando assim as possibilidades de estabelecimento de relações e de estratégias de resolução. Vale ressaltar que estes são os principais aspectos explorados nas atividades aqui relatadas e analisadas.

A Pesquisa

Este artigo discute uma pesquisa desenvolvida no âmbito de um projeto maior de formação e pesquisa intitulado Educação Continuada do Professor de Matemática do Ensino Médio: Núcleo de Investigações sobre a Reconstrução da Prática Pedagógica, do Programa Observatório da Educação da CAPES, aqui denominado Projeto “OBEDUC Práticas”.

A metodologia da pesquisa foi a qualitativa, conforme Bogdan e Biklen (1994). Essa metodologia se caracteriza por estar voltada para a compreensão dos processos e do desenvolvimento do estudo e não apenas nos resultados obtidos, por estar focada nos significados, com registro minucioso do objeto de estudo, sendo essencialmente descritiva. Os dados foram coletados por meio de gravações em vídeo dos encontros e recolha dos registros produzidos pelos professores (em papel e lápis e em arquivos digitais), bem como aqueles decorrentes da prática desenvolvida com alunos em sala de aula. A análise dos dados foi interpretativa.

Os participantes da pesquisa foram nove professores de matemática que atuam no Ensino Médio e participam de diversas outras ações de formação desenvolvidas no contexto do Projeto “OBEDUC Práticas”. Os registros das intervenções desses professores estão com nomes fictícios para preservar a identificação dos mesmos. Especificamente para a realização das atividades investigativas, que constituem o foco desse texto, foram organizados dois encontros de quatro horas cada um.

Durante esses encontros foram propostas atividades investigativas envolvendo dois problemas enunciados no quadro geométrico, os quais foram primeiramente explorados, discutidos e analisados pelos professores utilizando tanto material concreto como recursos tecnológicos (software Geogebra) e, posteriormente, os professores foram convidados a desenvolvê-los em sala de aula.

Os procedimentos metodológicos utilizados pelos pesquisadores nos encontros foram: (1) elaborar atividades de resolução de problemas que permitissem a exploração e investigação da situação posta, com o uso de materiais concretos e o uso de softwares, no caso o Geogebra; (2) desenvolver as atividades de caráter investigativo que propiciassem mudanças de quadro; (3) analisar as possibilidades para o ensino e a aprendizagem que foram identificadas pelos professores participantes, a partir do processo de formação e da aplicação com seus alunos.

A escolha da utilização de material concreto foi no sentido de possibilitar a exploração e investigação da situação dada por uma representação manipulável e dinâmica por meio da qual entendemos que haveria possibilidade imediata de formulação de conjecturas enquanto se efetuavam modificações de áreas e perímetros usando dobraduras, barbante, etc. No Geogebra as possibilidades de exploração dinâmica poderiam oferecer novas oportunidades de levantamento de conjecturas e teste de hipóteses já formuladas.

A seguir, apresentamos de forma detalhada as atividades investigativas e as análises de seu desenvolvimento pelos professores participantes.

Descrição e análise das Atividades Investigativas

As atividades integraram conhecimentos relativos a funções e ao cálculo de áreas, partindo de dois problemas enunciados no quadro geométrico. Nas implementações dessas atividades foram utilizados material concreto e recursos tecnológicos, no caso, o software Geogebra. Depois de os professores terem vivenciado o processo de resolução de atividades investigativas, no final do primeiro encontro foram instigados a experimentar essa estratégia pedagógica com seus alunos em sala de aula.

A primeira atividade proposta para investigação no encontro foi a seguinte.

Quadro 1 - Atividade 1
Fonte: Acervo do Projeto "OBEDUC Práticas"

Proposta de Investigação: Como varia a área dos retângulos que podemos construir com um **pedaço fixo de barbante**? E o perímetro (a partir de uma área fixa)? Entre todos os retângulos de mesmo perímetro, qual é o de maior área?

Para esta investigação cada dupla (ou trio) de professores recebeu um pedaço de barbante e solicitamos que anotassem suas observações. A figura1 ilustra um momento de uma das duplas investigando as possibilidades de variação da área do retângulo.

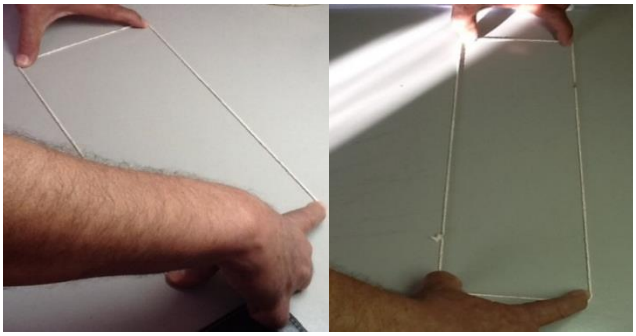


Figura 1- Investigação sobre retângulos de perímetro fixo
Fonte: Acervo do Projeto "OBEDUC Práticas"

Ao longo das investigações com o barbante, os professores participantes riscaram a lápis - em um papel que foi colocado embaixo da forma feita com o barbante - diversas possibilidades de retângulos. Em seguida, efetuaram medições desses retângulos e determinaram as áreas de diversos retângulos com mesmo perímetro, representado pelo tamanho do barbante. No processo de investigação, alguns professores organizaram uma tabela e inseriram os dados obtidos para o seu particular tamanho do barbante, observando a variação da área.

Entendemos que esta atividade e o apoio do material concreto foram propícios para levar os professores a vivenciarem uma atitude investigativa que poderia ser explorada em sala de aula, com os alunos.

Após a manipulação com o barbante, a constatação de que deve haver um retângulo com área máxima foi discutida coletivamente. O grupo conjecturou que a área máxima ocorre quando o retângulo é um quadrado. Enfatizamos que, para professores de matemática, a questão da área máxima é familiar, mas o mesmo provavelmente não ocorrerá com os alunos do Ensino Médio. Assim sendo, a partir da investigação com os diversos retângulos é interessante, quando em sala de aula, promover uma discussão coletiva para que os alunos possam expor suas argumentações e justificativas de modo a concluírem que a área máxima ocorre quando o retângulo é quadrado.

A exploração do modelo em barbante e a verificação de que cada retângulo pode ser construído a partir do semiperímetro orientaram a construção de um modelo para o problema com o software Geogebra. A dinâmica do modelo construído no Geogebra permitiu a constatação de que o retângulo de área máxima deveria ser o quadrado. Aqui a exploração e investigação foi auxiliada pela mudança de quadros, no caso, do geométrico para o algébrico.

Para impulsionar a investigação propusemos a questão:

Como podemos representar a área da região retangular por meio de uma função, e estudar o comportamento dessa função (no Geogebra no papel e lápis)?

A exploração com o software Geogebra dependia de se construir um retângulo a partir de um segmento tal que $AB = p$ fosse o valor do semiperímetro do retângulo e considerar um ponto P pertencente ao segmento $\overline{AB}$, de modo que a medida AP fosse a largura x do retângulo e PB a medida $p - x$ do comprimento do retângulo. Movendo-se o ponto P ao longo de $\overline{AB}$, modifica-se o valor de x e de $p - x$ mudando a área e mantendo o perímetro.

A figura 2 apresenta telas com o ponto P em duas posições entre A e B.

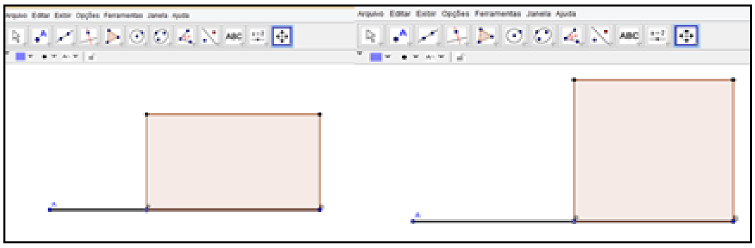


Figura 2 - Tela no Geogebra
Fonte: Acervo do Projeto "OBEDUC Práticas"

Construída a figura, foi possível investigar as possibilidades e gerar o gráfico da função. Movendo o ponto P ao longo de $\overline{AB}$ foi possível observar o valor correspondente da função área. Na figura 3 apresentamos o modelo matemático em telas de participantes.

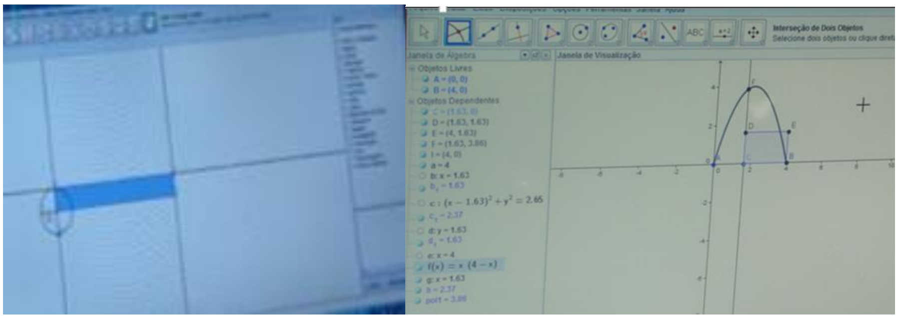


Figura 3 - Telas e resolução dos participantes
Fonte: Acervo do Projeto “OBEDUC Práticas”

No ambiente do papel e lápis, a investigação partiu do que fora concluído com a exploração anterior utilizando o barbante e o software. Assim, os professores participantes procuraram estabelecer um valor para o perímetro e a partir dele construir uma função que expressasse a área do retângulo. Apresentamos, na figura 4, a solução de uma dupla que considerou o perímetro 8. Nesse caso, o semiperímetro é 4 e os comprimentos dos lados do retângulo podem ser representados por x e $4 - x$.

Desse modo a área em função de x pode ser escrita por $A(x) = 4x - x^2$.

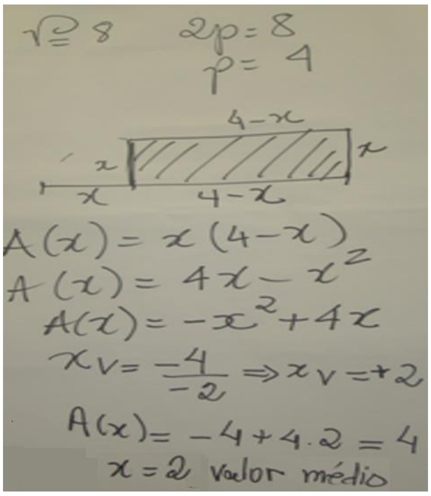


Figura 4 - Protocolo com a função que representa a área do retângulo
Fonte: Acervo do Projeto “OBEDUC Práticas”

A partir do estabelecimento da função foi possível estudar seu comportamento e, neste caso, afirmar que ela apresenta um ponto de máximo para x = 2, o que significa dizer que, nesse exemplo os lados do retângulo terão todos medida 2, sendo portanto um quadrado.

Vale ressaltar que as investigações empreendidas foram orientadas pelas pesquisadoras. Na sequência solicitamos aos professores que pensassem em outro modo de construção do modelo geométrico para viabilizar novas investigações. No caso, era nossa intenção levá-los a investigar a situação de modo mais autônomo, usando procedimentos semelhantes aos já realizados.

A nova proposta foi a seguinte:

Dado o perímetro, comece construindo um quadrado e verifique o que acontece com a área à medida que o transformamos em um retângulo com esse mesmo perímetro.

Os professores participantes exploraram e investigaram com uso do software. Mas, mesmo assim, precisaram de auxílio e orientações para a construção geométrica do retângulo no Geogebra, que partisse de um quadrado e permitisse mover um ponto E sobre o lado de modo a variar a área mantendo fixo o perímetro.

Por exemplo, na figura 5 foi construído um quadrado $ABCD$ de área 16, ou seja, o lado $AD = 4$. Escolhido um ponto E sobre o lado $\overline{AD}$ tal que $x = AE$, a área de qualquer retângulo de perímetro 16 pode ser expressa por $A(x) = (4 - x)(4 + x) = 16 - x2$.

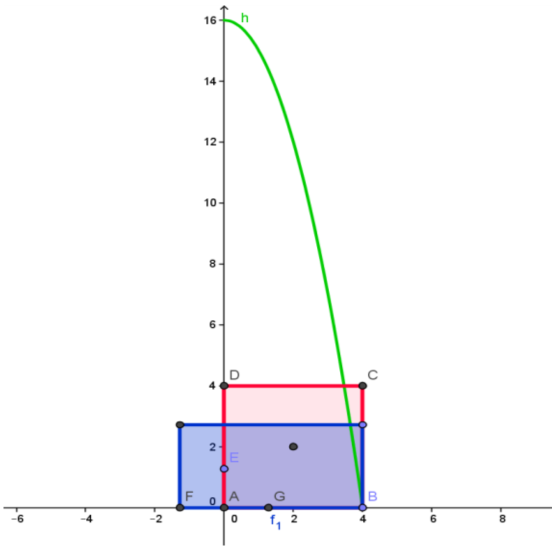


Figura 5 - Representação gráfica no Geogebra
Fonte: Acervo do Projeto “OBEDUC Práticas”

Movendo E e considerando $AF = AG = x$, construímos retângulos com o mesmo perímetro do quadrado e também a representação gráfica da função área correspondente.

Os professores perceberam que poderiam investigar as áreas de todos os retângulos construídos desta maneira com perímetro 16 e concluir que a maior área possível, para o perímetro dado, ocorre quando a figura é um quadrado.

Em ambas as situações investigadas o jogo de quadros propiciou a análise mais aprofundada e uma compreensão mais ampla da maximização da área.

Na parte final do encontro as seguintes questões foram objeto de reflexão:

- No seu trabalho em sala de aula, já foram consideradas possibilidades de atividades que integrem conteúdos distintos? Quais?

- No seu trabalho em sala de aula, já foram consideradas possibilidades de atividades que integrem conteúdos com o uso de tecnologia?

A conclusão foi que, para o grupo, tais atividades não faziam parte do trabalho do dia a dia em sala de aula. Mesmo a atividade de resolução de problemas, quando usada por eles pouco envolvia situações novas e se aproximavam mais de aplicações rotineiras dos conteúdos ensinados do que de propostas para exploração e resolução genuína dos problemas. Os participantes revelaram que nunca tinham desenvolvido atividades de natureza investigativa, e que pouco se utilizavam dos recursos tecnológicos disponíveis nas escolas. Dois dos professores se sentiram motivados e tomaram a iniciativa de trabalhar com o software imediatamente após o primeiro encontro.

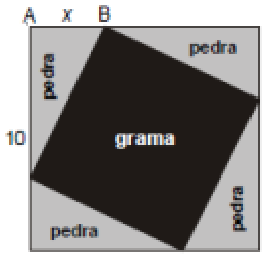
No início do segundo encontro foram discutidos aspectos das Orientações Curriculares Nacionais, PCN (BRASIL, 1998) e PCNEM (BRASIL, 2000), relacionados ao uso de recursos tecnológicos e à atividade investigativa e as possibilidades para sua condução em sala de aula. Especialmente quanto a indicação dos PCNEM(BRASIL, 2000) de que se deve levar o aluno a estabelecer conexões entre temas matemáticos de diferentes campos e entre esses temas e conhecimentos de outras áreas curriculares, alguns professores participantes se manifestaram da seguinte forma:

> Isso é difícil para a gente: mudar os quadros: do geométrico para o algébrico. Geometria é um campo e funções, por exemplo, é outro... (Prof. Cel)
>
> O que é mais simples é conectar conhecimentos de geometria com física, por exemplo. (Prof. Al)

Na sequência, foi proposta uma segunda atividade de investigação, com base na situação que se encontra no quadro a seguir.

Quadro 2 – Atividade 2
Fonte: Acervo OBMEP 2005 - N3 – 2ª Fase

Um prefeito quer construir uma praça quadrada de 10 m de lado, que terá quatro canteiros triangulares de pedra e um canteiro quadrado de grama, como na figura.
O prefeito ainda não decidiu qual será a área do canteiro de grama, e por isso o comprimento do segmento AB está indicado por x na figura



a) Calcule a área do canteiro de grama para $x = 2$.
b) Escreva a expressão da área do canteiro de grama em função de x e esboce seu gráfico.
c) Sabe-se que o canteiro de grama custa R$ 4,00 por metro quadrado e os canteiros de pedra custam R$ 3,00 por metro quadrado. Use esta informação para responder aos dois itens a seguir.
Qual a menor quantia que o prefeito deve ter para construir os cinco canteiros?
Se o prefeito tem apenas R$ 358,00 para gastar com os cinco canteiros, qual é a área do maior canteiro de grama que a praça poderá ter?Qual a menor quantia que o prefeito deve ter para construir os cinco canteiros?

Observamos que a figura do problema nos remete à suposta primeira demonstração do teorema de Pitágoras, baseada na igualdade das áreas na figura 6.

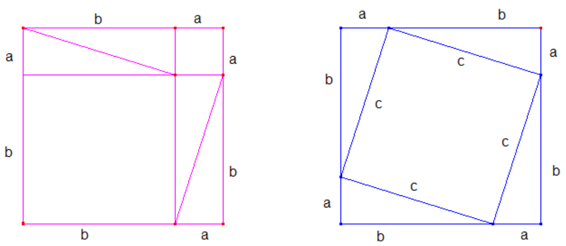


Figura 6 - Ilustração do Teorema de Pitágoras por decomposição
Fonte: Eves (2004, p.103)

Para encaminhar a atividade de investigação propusemos que os professores construíssem, um modelo da praça no papel e que utilizassem esse modelo para suas explorações da situação. Os professores dobraram os triângulos para “dentro” do quadrado. Dessa forma puderam observar que, com as dobras, surge um novo quadrado no interior, como nos modelos da figura 7.

Em seguida, no modelo elaborado com a ajuda do software, os participantes observaram que a área do quadrado interno variava de um valor inicial para um valor mínimo e voltava a crescer.

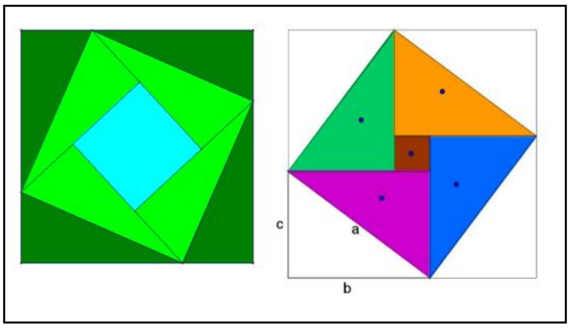


Figura 7 - Dobraduras em papel construídas para a investigação
Fonte: Acervo do Projeto “OBEDUC Práticas”

Como no problema anterior, encontraram a função que descreve a área e prepararam, em duplas, as soluções para uma discussão coletiva.

O modelo (como na figura 8) permitiu discutir o que ocorre com a área do novo quadrado quando variamos o segmento escolhido como cateto do triângulo retângulo no quadrado original.

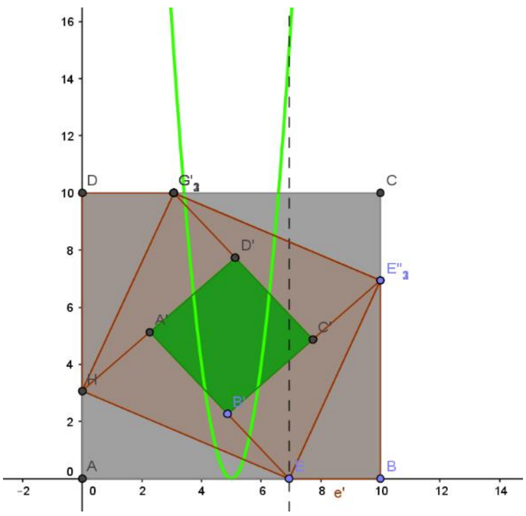


Figura 8 - Imagem no Geogebra
Fonte: Acervo do Projeto “OBEDUC Práticas”

A investigação se prestaria a responder à questão que corresponde ao item b da atividade 2:

“Qual será a expressão para a área do novo quadrado?

Novamente, as propriedades observadas na construção do modelo em papel deram suporte à construção de um modelo no Geogebra cuja exploração pode levar a novas descobertas e a informações a serem acrescentadas às obtidas anteriormente. Essas manipulações orientaram a mudança do quadro geométrico para o algébrico, de forma a obter a solução do problema.

Após a investigação, os participantes passaram a trabalhar em duplas com papel e lápis. A partir das discussões nas duplas, surgiram três encaminhamentos distintos para os cálculos das áreas. Na apresentação desses encaminhamentos para o grupo todo, foram discutidas possíveis ideias para serem desenvolvidas em sala de aula.

O primeiro encaminhamento exibido na Figura 9 foi geométrico e partiu da área do quadrado maior, de lado 10 cm, e dele retirou os quatro triângulos dados, considerando $x = 2$.O segundo encaminhamento foi também puramente geométrico, por decomposições que permitiram encontrar um quadrado de lado 6 cm e quatro triângulos retângulos de catetos 2cm e 8 cm, de modo que a soma dessas áreas representasse a área do canteiro para $x = 2$. O terceiro modo partiu dos triângulos retângulos de catetos x e $10 - x$. Inicialmente foi determinada a hipotenusa y do triângulo retângulo (considerando o valor $x = 2$ e depois o valor genérico x) e a seguir a área y^2 do quadrado que representa o canteiro de grama.

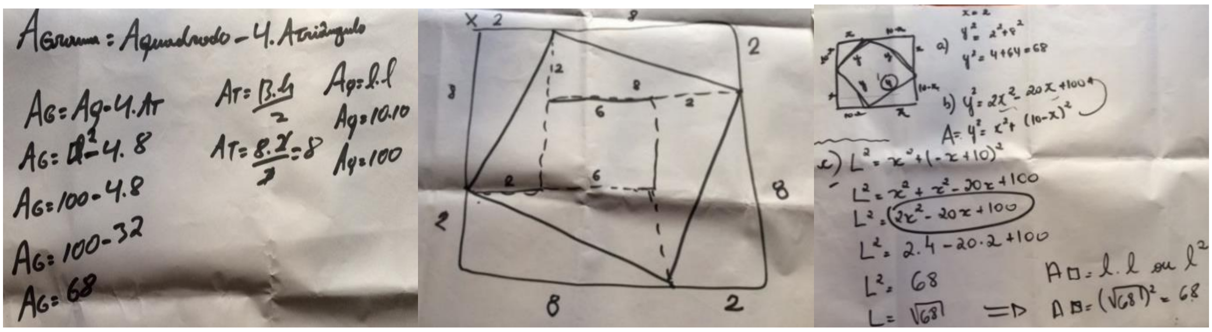


Figura 9 - Resoluções dos professores participantes
Fonte: Acervo do Projeto “OBEDUC Práticas”

Foi discutida com o grupo a importância, ao se ensinar por investigações, da discussão coletiva das conjecturas, hipóteses e soluções que apareceram no trabalho individual ou em duplas, como enfatizam Ponte et al (2003). A figura 10 ilustra registros da discussão coletiva.

Figura 10 - Momento de discussão das diferentes estratégias de resolução em papel e lápis
Fonte: Acervo do Projeto "OBEDUC Práticas"

A análise das manifestações dos professores participantes evidenciou que, na visão deles, essas atividades investigativas poderiam auxiliar os alunos na compreensão de aspectos relativos às funções e no estabelecimento de conexões entre elas e as áreas e perímetros das figuras geométricas estudadas. Seguem alguns dos depoimentos feitos pelos professores:

> O aluno hoje tem grande dificuldade de abstrair e essa proposta de que perceba que pela decomposição é possível transformar uma figura em outra é interessante. (Prof. Al)
>
> O mais difícil para eles é associar e analisar a matemática envolvida. (Prof.Cel)

Os professores participantes observaram também que a abordagem investigativa pode auxiliar os alunos a integrar conteúdos em campos diversos da matemática e a desenvolver a capacidade de investigação e a perseverança na busca de resultados, especialmente quanto ao uso de diferentes estratégias, de técnicas de validação e controle de resultados. Contudo alertam que:

> Para essas investigações o aluno precisa ter construído o conceito de área, perímetro.... Conhecimentos que precisam ser usados nessa situação. (Prof. Cel)
>
> É preciso um trabalho antes para ensinar a usar o Geogebra, pois nele se consegue movimentar o ponto e daí manter as propriedades da figura [retângulo]... (Prof. Al)

Ao final do encontro, lançamos um desafio: Como você utilizaria o problema a seguir (figura 11), para uma proposta investigativa para seus alunos?

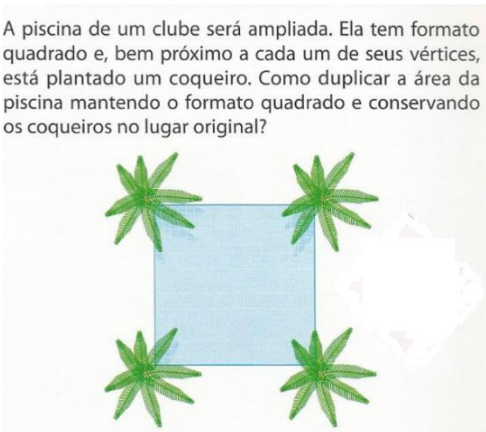


Figura 11- Problema sobre a ampliação de uma piscina
Fonte: Matemática, 8º ano, Projeto Araribá. Ed. Moderna (2013)

Uma das professoras participantes, a professora Nil correspondeu a esse desafio, construiu e levou à sala de aula uma proposta investigativa, conforme descrita no quadro 3, utilizando como ponto de partida o problema da figura 11.

Quadro 3 – Proposta da Professora Nil
Fonte: Acervo do Projeto "OBEDUC Práticas"

Descrição da Atividade Investigativa

1ª. Etapa: Propor e analisar a situação problema, compreender o enunciado e buscar procedimentos para a resolução do problema;
2ª. Etapa: Investigar e determinar qual será a medida do lado da piscina. Ao se deparar com a medida $a\sqrt{2}$, conduzir à percepção de que a medida não poderá ser obtida na régua. Nesse momento, distribuir papel sulfite, tesoura, régua, compasso, para que os alunos possam obter a medida $a\sqrt{2}$ por diferentes processos: por construção(régua e compasso), por dobraduras ou recortando figuras, etc...
3ª. Etapa: Obtendo a medida procurada, solicitar que façam o esboço ou a representação do "novo quadrado", utilizando qualquer um dos meios: construção, dobradura, composição e decomposição e figuras, etc...
4ª. Etapa: Feito o esboço, propor a construção no *Geogebra*, justificando e observando todo o processo de construção.
5ª Etapa: Aproveitando o momento, solicitar aos alunos que efetuem algumas medidas (ângulos, diagonais, segmentos, etc...), conduzindo-os a identificar e confirmar algumas propriedades de acordo com os procedimentos de construção.

Analisando a proposta descrita no quadro 3 constatamos que a professora Nil adaptou as fases apresentadas por Ponte et al (2003) para o desenvolvimento de tarefas investigativas em sala de aula. Foi feito o lançamento da tarefa, conduzida pela professora, de modo a levar os alunos a compreenderem o problema proposto. Em seguida foi encaminhada a fase da investigação propriamente dita, desenvolvida pelos alunos, no estilo da "descoberta guiada" como explicita Ernest (1991, apud Serrazina et al, 2002). A professora sugeriu a montagem de modelos em papel que servissem para a investigação, planejou possíveis intervenções e sugeriu também a construção de um modelo digital no Geogebra.

Essa fase com o modelo em papel auxiliou especialmente a exploração da situação problema e o levantamento de conjecturas, fase que foi acompanhada pela professora Nil orientando os alunos em suas dificuldades e no desenvolvimento das ideias profícuas.

A investigação com o software Geogebra, empreendida pelos alunos, partiu das descobertas que fizeram na fase anterior, com o modelo em papel e, com isso, surgiram diversos tipos de construção na classe, duas delas ilustradas na figura 12.

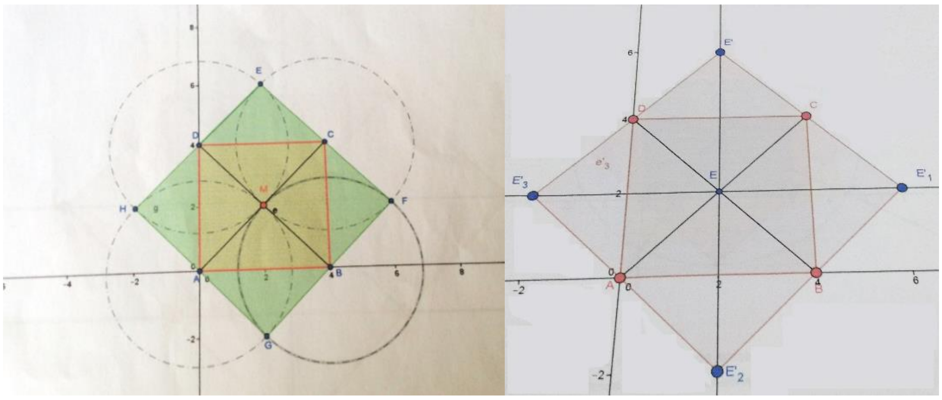


Figura 12-Imagens no Geogebra para o problema da ampliação da piscina.
Fonte: Acervo do Projeto "OBEDUC Práticas"

A primeira construção obtida, à esquerda na figura 12, partiu de um quadrado $ABCD$ de lado “a” para representar a piscina original (No exemplo $a = 4$) e em seguida foram construídos triângulos retângulos isósceles de catetos $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ sobre os lados do quadrado $ABCD$, obtendo o quadrado $FEHG$ que soluciona o problema dado.

A segunda construção feita pelos alunos, que se encontra à direita na figura 12, também partiu de um quadrado $ABCD$ de lado “a” para representar a piscina original (no exemplo $a = 4$). Em seguida foi determinado o centro do quadrado, indicado pelo ponto E na figura e, usando a ferramenta “reflexão de um ponto em relação à uma reta”, foram obtidos os simétricos de E em relação a cada lado do quadrado e determinado o quadrado $E'E'_1E'_2E'_3$ que soluciona o problema dado.

A terceira construção obtida pelos alunos está reproduzida na figura 13. Essa construção, partindo do quadrado $ABCD$, considera a diagonal $\overline{AC}$ e o ponto E, que é o centro do quadrado. Em seguida, se determinam as retas paralelas aos eixos cartesianos passando por E e as paralelas à $\overline{AC}$ pelo ponto D e J, obtendo os pontos F e H, de modo a determinar a circunferência de centro E e raio $\overline{EF}$.

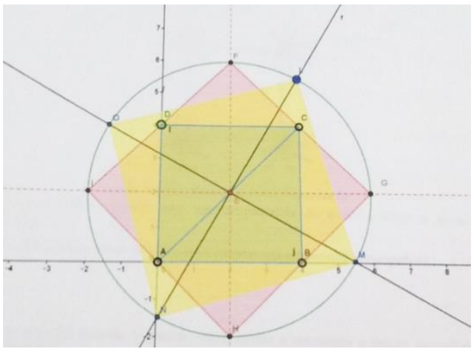


Figura 13 - Imagem com construção feita no Geogebra.
Fonte: Acervo do Projeto “OBEDUC Práticas”

O quadrado $FGHI$ representa a solução do problema. Uma solução alternativa com o dobro da área original pode ser obtida escolhendo um ponto L sobre a circunferência. A animação do ponto L (recurso viabilizado pelo Geogebra) permite a verificação da existência de uma infinidade de quadrados de áreas $2a^2$, mas apenas o quadrado $FGHI$ resolve o problema de duplicar a área da piscina mantendo os coqueiros no lugar.

Diversas ferramentas do software foram utilizadas nas construções, assim como vários conhecimentos geométricos mobilizados, o que evidencia as vantagens de se permitir aos alunos explorarem e investigarem a situação problema, propondo caminhos e validando seus argumentos, com ou sem a ajuda ou orientação do professor. Sobre as possibilidades para o ensino, viabilizadas pela proposta de investigação, a Professora Nil apresentou o seguinte depoimento:

> Considero essa uma atividade muito rica. De acordo com o nível de conhecimento dos alunos, ela permite direcionamentos diversos: abordagens de vários conceitos, elementos da geometria, propriedades (inclusive a verificação e a confirmação por meio das tecnologias, sem demonstração), proposição de outras situações e “problemas específicos de matemática”, utilização de conhecimentos matemáticos, generalização

> de alguns resultados (recurso algébrico), o desenvolvimento da capacidade de investigação, a importância das observações, das manipulações, construções, formulação de hipóteses, a organização de dados e condições necessárias para iniciar uma demonstração (mostrar ao aluno o caminho de algumas demonstrações simples), fatores que contribuem de forma determinante no processo de aprendizagem significativa. (Prof. Nil)

Pelo depoimento da professora Nil notamos que, em sua visão, a atividade investigativa permitiu a cada aluno explorações próprias, de acordo com os conhecimentos que esse possui e consegue mobilizar nas tentativas de resolução da situação posta. Outro ponto notável na percepção da professora é que, a partir dos diversos direcionamentos alguns alunos chegaram a generalizações de resultados esboçaram possibilidades para justificativas e demonstrações, o que é interessante no ensino de matemática.

Tanto na atividade proposta como nos comentários da professora estão evidenciadas as características das mudanças de quadros que foram viabilizadas na procura da solução.

Observamos que a professora Nil não promoveu na sala de aula a discussão coletiva dos resultados, a partir das “descobertas” dos participantes, como se recomenda para a última fase do desenvolvimento de uma atividade investigativa com os alunos. Assim sendo, não foram socializadas com a classe as diversas possibilidades de construção apresentadas para a solução do problema.

Entendemos que a professora Nil tomou consciência do potencial de trabalhar com esse tipo de atividade com os alunos. Ela demonstrou um processo de construção de uma nova prática docente, mas que ainda precisa perceber como deve propiciar a discussão coletiva com os alunos de modo a poder retormar suas descobertas, suas argumentações no sentido de fazer as sistematização dos conceitos envolvidos de modo que o alunos possa atribuir significado e construir o conhecimento matemático.

Trabalhar na perspectiva investigativa de fato requer do professor romper com uma prática de “dar aula” sedimentada numa abordagem pedagógica que não reconhece o potencial de se criar situações que favoreçam ao aluno explorar, experimentar, questionar, conjecturar e explicitar suas descobertas no coletivo da sala de aula para que possa realmente se envolver no processo de aprendizagem.

Considerações Finais

Os participantes da formação continuada, mesmo com pouca experiência com o software *Geogebra*, realizaram as construções e discutiram as conclusões obtidas. Na segunda atividade aqui descrita foram dados três encaminhamentos distintos para os cálculos das áreas e discutida a utilização das atividades em sala de aula e as possibilidades de promoção de atitudes investigativas entre os alunos. No caso do uso em sala de aula, aqui exemplificada com a proposta da professora Nil, com investigações a partir de um problema sugerido na formação, também foram evidenciadas possibilidades de explorações feitas pelos alunos e diferentes estratégias para solução.

A análise dos dados nos permitiu concluir que foram identificadas, na proposta de abordagem por atividades investigativas, as seguintes possibilidades para o ensino e a aprendizagem de conteúdos relativos à Geometria e Funções:

(1) a utilização de experimentações e investigações com passagens pelo concreto e pelo *Geogebra*, que tanto podem despertar o interesse dos alunos quanto auxiliar na aprendizagem, especialmente com o trabalho prévio à construção;

(2) a utilização das construções geométricas com régua e compasso, embora as atividades não as indicassem explicitamente, uma vez que os recursos do software são equivalentes;

(3) o raciocínio com suporte tecnológico; dado o caráter dinâmico do software e o incentivo à validação de resultados;

(4) o trabalho intradisciplina, uma vez que as atividades viabilizam lidar com vários conteúdos associados, tais como: área, perímetro, funções, o que auxilia a estabelecer conexões entre tais conteúdos e entre os quadros geométrico e algébrico;

(5) a promoção de uma aprendizagem ativa por parte do aluno, pois as atividades discutidas auxiliam a "tirar o professor da lousa", como declarou um dos professores participantes.

Finalizando, vale ressaltar que os participantes do processo formativo enfatizaram em suas manifestações a necessidade de o professor se preparar, dominar o assunto, estar aberto às sugestões dos alunos e consciente que neste tipo de atividade podem surgir muitas soluções não esperadas, uma vez que os alunos dominam rapidamente os recursos do software, masnem sempre sabem o que fazer com eles. Nesse sentido o preparo, o planejamento e a atuação do professor são fundamentais para a condução de uma aula com um caráter investigativo.

Referências

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. **Investigação qualitativa em educação:** Uma introdução à teoria e aos métodos. Porto: Porto Editora, 1994.

BRASIL. MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E DO DESPORTO/ SECRETARIA DE EDUCAÇÃO FUNDAMENTAL. **PCN Parâmetros Curriculares Nacionais:** Matemática. Brasília: Ministério da Educação e do Desporto, MEC/SEF, 1998. 142 p.

BRASIL. MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E DO DESPORTO/ SECRETARIA DE EDUCAÇÃO FUNDAMENTAL. **PCNEM Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio:** Matemática. Brasília: Ministério da Educação e do Desporto, MEC/SEF, 2000. 109 p.

DOUADY, R. Des apports de la didactique des mathématiques à l'enseignement. **Repères IREM**, 1992.

DOUADY, R., PERRIN-GLORIAN, D'apprentissage du Concept D'aire de Surface Plane, **Educational Studies in Mathematics**,Vol. 20(4),1989. 387-424.

EVES, H., **Uma Introdução à História da Matemática,**3ª. Ed.,EDUNICAMP,2002.

FERREIRA, A. R., PERES. G. J.; VAZ, I. C. **Construindo significados para o conhecimento matemático através de atividades investigativas em diferentes**

modalidades de ensino. IV Encontro Mineiro de Educação Matemática. Diamantina: [s.n.]. 2006.

LEONTIEV, A. **O desenvolvimento do psiquismo**. 2. ed. São Paulo: Centauro, 2004. 353 p.

PONTE, J. P., OLIVEIRA. H., BRUNHEIRA. L., VAZ. J. M., FERREIRA. C., O trabalho do professor numa aula de investigação matemática. **Quadrante**, 7(2), 1998. 41-70. Disponivel em: <http://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/3042/1/98 Ponte%20etc%20Quadrante-MPT_.pdf>. Acesso em: 8 junho 2015.

PONTE, J. P. D. Investigação sobre investigações matemáticas em Portugal. **Investigar em Educação**, Minho, Portugal, 2003.

PONTE, J. P.; BROCARDO, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações matemáticas na sala de aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2003.

SERRAZINA, M. D. L. et al. Investigações matemáticas e profissionais na formação de professores. In: PONTE, J. P., et al. **Actividades de investigação na aprendizagem da matemática e na formação de professores**. [S.l.]: [s.n.], 2002. p. 41-58.

Submissão: 08/03/2017

Aceite: 01/06/2017