NÚMEROS
Revista de didáctica de las matemáticas
N° 32, diciembre de 1997, págs. 26-42

Contrato didáctico, modelos mentales y modelos intuitivos en la resolución de problemas escolares típicos

Bruno D'Amore y Berta Martini

Resumen. En este trabajo se estudia la influencia y el papel de una cláusula del contrato didáctico que hemos llamado *de delegación formal,* así como la influencia y el papel del modelo general de problema y de los modelos intuitivos de las operaciones en la resolución de problemas escolares. Nos centramos en un problema tomado de Schoenfeld.

1 Un artículo de Schoenfeld sobre la metacognición

1.1 El problema de Schoenfeld. En su célebre artículo sobre la metacognición, Alan H. Schoenfeld (1987b) cita el siguiente problema escolar de división no entera:

> *Un autobús del ejército transporta 36 soldados. Si se tiene que llevar a 1.128 soldados al campo de entrenamiento, ¿cuántos autobuses son necesarios?*

De los 45.000 estudiantes de secundaria a los que se sometió la prueba, el 30% hizo mal la división y sólo el 70% la hizo correctamente, de los cuales el 29% dice que hacen falta 31 autobuses y que hay un resto de 12, el 18% dice que hacen falta 31 autobuses y sólo el 23% controla el resultado de la división, en base a lo que pide el problema, y responde que se necesitan 32 autobuses. Schoenfeld concluye con que «a pesar de la introducción con la «historia» del autobús, el cálculo tiene poco, o mejor nada, que ver con el mundo real».

Trabajo subvencionado por MURST (60%) y CNR (Contrato 96.0019G.CT1).

En muchas pruebas, con estudiantes y con enseñantes, pero con un número de sujetos inferior, algunas de nuestras experiencias preliminares e informales han dado resultados un poco diferentes. Cuando se permitía el uso de la calculadora, como la operación que se realiza es la división 1.128:36, que da el resultado 31,33333, obtuvimos respuestas del tipo 31,3 ó $31,\overset{\frown}{3}$, que Schoenfeld no cita explícitamente. En las charlas informales mantenidas con los individuos que no habían respondido «32», especialmente con los más adultos, nos hemos convencido que en la base de las respuestas enteras, de cualquier tipo, hay dos cláusulas del contrato didáctico: una que podríamos llamar de «delegación formal»; la otra consistente en no sentirse autorizados a escribir lo que no se pide explícitamente: si se obtiene 31,33333, no es lícito escribir 32, ya que es otra cosa que no se ha obtenido de forma explícita. Puesto que esta segunda cláusula es muy conocida y aparece bajo diversos aspectos, ligados en general a la problemática de los datos implícitos (Castro *et al.*,1996), trataremos de explicar lo que entendemos por *cláusula de delegación formal*. *Resolver* un problema escolar *coincide* con *el hallazgo de la operación o las operaciones más adecuadas*; se trata de interpretar aritméticamente el texto, pasando de su formulación en lengua natural a la expresión aritmética que lleva de los datos al resultado. Una vez cumplido este paso-delegación de traducción y formalización, se puede olvidar el texto, que no sirve ya, ni es objeto de ningún control crítico, lógico o semántico, y toda la concentración y atención del resolutor se centran en la ejecución de la operación, por escrito o con la calculadora. Cuando esto se termina, produciéndose de alguna forma un resultado, este *resultado* se interpreta automáticamente como *la respuesta* al problema, justamente por la *cláusula de delegación formal* a que nos venimos refiriendo.

La problemática suscitada por Schoenfeld es de extraordinaria importancia: interviene la metacognición, pero también la capacidad de control de la estrategia de resolución adoptada, de la respuesta encontrada y del texto del problema. Sin embargo, el análisis hecho hasta ahora no nos parece demasiado profundo. En 2 profundizaremos en el tema.

1.2 Otros ejemplos. Ya que son los alumnos quienes deben resolver los problemas en la escuela, ¿por qué no oirles? He aquí la definición de Lorenzo, un alumno de I Elemental: "un problema es un conjunto de palabras donde hay números" (Zan, 1991-92). La idea de

Lorenzo es la concepción más extendida entre los estudiantes y entre muchos profesores. Existe un deslizamiento del problema hacia ejercicios de rutina, evidenciando sin duda, como escribe Zan, «una fractura entre problemas «reales» y escolares». Veamos ahora otros dos ejemplos de investigaciones ya clásicas sobre problemas en las cuales se evidencia la distancia entre matemáticas y realidad.

En Nesher (1980) se cuenta que se propuso a muchos niños el texto siguiente: "¿Cuál será la temperatura del agua si se mete en un recipiente una jarra de agua a 80° y otra a 40°?" Muchos responden 120°. Y, sin embargo, si a los mismos niños se les propone el problema: «¿Cómo se vuelve el agua de un recipiente si metes agua caliente y agua fría?», responden: «templada». Los problemas parecen ser, pues, más «un ritual escolástico» (así se expresa Nesher) que algo que se refiera a una cierta forma de realidad empírica. Parece que el resolutor, más que contextualizar la narración del texto, busca sólo «la inferencia directa de la operación matemática necesaria desde la formulación verbal del texto del problema escolar», como dice Nesher.

Y ahora un ejemplo propuesto a niños de 5 a 12 años y descrito por Kilpatrick (1987): "El señor Lorenz y tres compañeros suyos parten de Bielefeld a las 9 y hacen 380 km hasta Frankfurt, con una parada de 30 minutos". Una *historia* como esta, en un contexto de problemas aritméticos, provoca en los niños una actitud resolutiva: realizan operaciones y dan una respuesta a una "no-pregunta"; nos parece que esta actitud refuerza lo dicho antes sobre la idea de problema que produce la práctica escolar.

Que el resolutor no se haga una idea precisa de la situación descrita ha sido estudiado en D'Amore (1997) y el que exista una separación casi total entre lo formal y las situaciones concretas se ha estudiado en Cassani *et al.* (1996).

2 Posibles causas del comportamiento de los resolutores

Examinamos a continuación algunos posibles temas de investigación para buscar las causas que puedan explicar el comportamiento de los resolutores ante el problema de los soldados.

2.1 La cláusula de *delegación formal*. Sobre la delegación formal hemos hablado ya. Lo normal es que el éxito en la resolución de un problema coincida con la elección de la operación; por tanto, hecha la traducción-formalización desde el enunciado hasta la expresión aritmética resolutora, la tarea superior (lógico-estratégico) se ha terminado y se pasa a la fase meramente ejecutiva, de carácter inferior (algoritmico-ejecutivo).

2.2 Modelo general de problema y de resolución de problemas. Entre los estudiantes, como vimos en 1.2, hay un modelo general de problema, producido más por la práctica que por las cláusulas explícitas del contrato didáctico (Zan, 1991-92). Como se puede verificar fácilmente, hay una interacción estrechísima entre el modelo general de problema (cómo se espera sea «confeccionado», cómo se espera sea hecho explícito, cómo se espera sea propuesto y recibido, cómo piensa el resolutor que lo quiere resuelto el proponente,...) y el comportamiento resolutivo (utilizar todos y sólo los datos expresados númericamente en el texto, crear situaciones que neutralicen el problema en caso de eventuales datos implícitos o que falten, ...). Parece entonces obvio que, ante el problema de los soldados, el resolutor no se sienta obligado a realizar una acción que no se pide; es decir, dar sentido al resultado numérico (obtenido gracias a una división) en relación a la tarea planteada en la pregunta explícita del enunciado, con referencia al mundo real. Normalmente esto no forma parte del modelo general de problema o del comportamiento resolutivo típico pedido.

2.3. Modelo mental que se hace el resolutor de la situación descrita en el texto. Cuando se resuelve un problema cuyo texto se ha dado escrito, lo primero que hace el resolutor es un modelo mental de la situación descrita, ... o, al menos, esto es lo que se suele decir. Que ese modelo sea una ayuda para resolver el problema, como se suele pensar, ha sido cuestionado recientemente, al menos en parte (D'Amore, 1997). En base a tales resultados, nos planteamos hasta que punto hace falta construir modelos mentales *detallados*. O mejor, más específicamente: ¿qué imagen se hace de la situación el resolutor del problema de los soldados?, ¿imagina *realmente* a los 1.128 soldados?, ¿los imagina en formación, ordenados todos o amontonados?, ¿dónde?, ¿en una plaza, por una carretera o en el campamento?, ¿con el uniforme?, ¿qué experiencia tiene el estudiante sobre cosas de este tipo?, ¿cómo se imagina el autobús?, ¿son todas estas preguntas fútiles y, realmente, la situación imaginada es imprecisa caótica y no detallada?, ¿no se puede creer que el resolutor delegue a la operación de división *también* la imagen mental de la situación?, ¿o que la imagen mental se limite a una pincelada, a una parte del total?; por ejemplo, ¿a un grupo de soldados que está subiendo, en fila, a un autobús? Estas preguntas no son ociosas.

Si la imagen mental es necesaria para resolver el problema, ante la imposibilidad de imaginar 1.128 soldados, la delegación de que se hablaba en 2.1 resulta *obligada*, de tal modo que ello podría explicar la no lectura hacia atrás (es decir, la falta de control semántico) una vez encontrado el cociente entre 1.128 y 36. Surge así la realización de una prueba que tenga como características: 1) un problema similar, pero en una situación fácilmente imaginable; 2) con datos tan pequeños que no haga falta delegar la imagen mental en la expresión aritmética resolutiva. Elaboramos entonces la prueba siguiente:

> *Un coche transporta a 4 niños. Si se debe transportar a 6 niños a la escuela, ¿cuántos coches se necesitan?*

Se puede esperar que, ante un texto como éste, se pueda imaginar fácilmente la situación descrita, gracias a la experiencia, de tal forma que no sea necesaria ni la delegación descrita en 2.1, ni se haga prácticamente operación alguna: la resolución debería llegar porque se imagina la situación, más que ejecutando la división 6:4. La respuesta «2 coches» debería ser dada por todos o casi todos los resolutores, pero no mediante un control semántico de la pregunta-respuesta, sino más bien por lo que se imagina. Si esto fuera así, entonces se demostraría que: 1) la cláusula citada en 2.1 interviene sólo cuando el problema implica números grandes o, en cualquier caso, se trata de una situación problemática no dominable si no es a través de operaciones formales; 2) el modelo general de problema tiene que ver sólo con problemas de un cierto grado de complejidad formal; 3) el modelo mental de la situación puede coincidir, en ciertos casos, con la misma resolución del problema. Hemos realizado esa prueba y aportaremos los resultados un poco más adelante, en 3.

2.4. Modelos intuitivos de las operaciones. Por ahora es imposible prescindir de las investigaciones sobre los modelos intuitivos de las operaciones si se desea estudiar cómo se resuelven problemas, ya que juega un papel de extraordinaria importancia en el curso de la resolución. Basta pensar en el célebre ejemplo descrito en Deri, Sainati Nello y Sciolis Marino (1983) a propósito del problema "15 amigos compran 5 kg de galletas. ¿Cuántas tocan a cada uno?" Debido al modelo intuitivo de la división, incluso en I Superior, más del 67% de los estudiantes escriben 15:5 en vez de 5:15. Del mismo tipo es el ejemplo siguiente, adaptado de otro celebérrimo ideado por E. Fischbein: "Una botella de naranjada que contiene 0'75 litros cuesta 2 dólares. ¿Cuál es el precio de un litro?" En este caso hay una fuerte interferencia entre la naturaleza del dato 0'75 y la operación de división que lo colocaría en el divisor; la interferencia lleva a no usar la división 2:0'75, molesta y contraria al modelo intuitivo, sino más bien a «pasos formales» como la proporción: $0'75:2 = 1:x$. En este caso, la división 2:0'75 se acepta al final, pero no como operación directa sino como *resultado de la aplicación de una regla*: el producto de medios es igual al de extremos. Para confirmar que la causa del rechazo de 2:0'75 está ligada a la interferencia citada, el problema "Una botella de naranjada que contiene 2 litros cuesta 6 dólares. ¿Cuál es el precio de un litro?" lo resuelven inmediatamente todos (o casi todos) los estudiantes mediante la división 6:2 (para todo esto se puede ver D'Amore (1993)).

Por tanto, los modelos intuitivos de las operaciones, en particular de la división, influyen de forma concreta y notable en las actitudes de los resolutores en el momento de elegir la estrategia. Digamos también que de la división, operación compleja y temida, nos esperamos, por así decirlo, algún resultado «extraño», algún comportamiento «anómalo»...; por ejemplo, que el resultado no sea entero, que aparezca alguna cifra detrás de la coma, ... en suma: alguna dificultad más. Ello lleva, como consecuencia, a aceptar un resultado como 31,333333, sin que esto induzca necesidad alguna de un control crítico.

En el problema de los niños, en cambio, no hay necesidad de calcular 6:4 (si se realizase daría también un resultado no entero). En este caso opinamos que el resolutor no hace operaciones y se limita a imaginar la escena. Pero si hay operación, entonces se tratará más bien de las sustracción 6-4=2, quedando implícita y lógica la necesidad de considerar otro coche. Para verificar esto es necesario realizar una prueba empírica, seguida de entrevistas a los resolutores. Es lo que hemos hecho: en cuanto a metodología y resultados, lo contaremos en 3.

2.5. El uso de la lengua natural. Investigaciones de los últimos años sobre el uso de la lengua natural en el aula, en las clases de matemáticas, nos llevan a pensar que el contexto lingüístico es de fundamental importancia en la determinación del comportamiento y de las respuestas de los alumnos. Los dos problemas, el de los soldados y el de los niños, son estructuralmente similares y los dos se expresan en un lenguaje muy simple, natural, muy cercano al coloquial. Desde este punto de vista, pues, no deberían surgir diferencias importantes inducidas por distintos registros o modalidades lingüísticas. Sin embargo, el hecho de que se hable de coches (y no de autobuses del ejercito), de niños (y no de soldados), de escuela (y no de campamento), nos induce a pensar que el contexto evocado en el segundo problema usa un lenguaje más cercano al familiar. En resumen, no sólo se imagina mejor la escena por los motivos citados en 2.3, sino también juega un papel esencial el contexto lingüístico inducido por los términos y los objetos evocados. Este tema es, sin embargo, muy complejo y preferimos no entrar en detalles aquí. A ello dedicaremos un amplio espacio en otra investigación, bastante avanzada y más específica.

3 Resultados relativos a los problemas de Schoenfeld y de los niños

Las pruebas se efectuaron en V Elemental (10-11 años), en II Media (12-13 años) y en II de Liceo Clásico (17-18 años). Escribimos el test de Schoenfeld y el de los niños, cada uno en la parte superior de un papel tamaño A4, en el que había un pequeño espacio para escribir el nombre y un gran recuadro para escribir la resolución y la respuesta. Al final del test de Schoenfeld se pedía «¿Has usado la calculadora?» y al final del de los niños «Explica cómo has hecho para resolverlo». La instrucción era que trabajasen solos, en completo silencio, y escribir todo lo que se quisiese durante 10 minutos. Se advertía explícitamente que se podía usar la calculadora. En algunos casos el enseñante habitual salía del aula, en otras se quedaba, con la instrucción de permanecer al margen de la prueba.

Al final de la prueba escrita, mientras el profesor entraba de nuevo o retomaba la clase, el investigador escogía rápidamente, según las respuestas dadas, algunos alumnos que se convocaban, uno cada vez, en un aula cercana para una entrevista personal. (Esto sólo para V Elemental y II Media; la prueba de II de Liceo Clásico era un poco distinta). Se invitaba al enseñante a procurar que no hubiera intercambio de informaciones entre el que había sido ya entrevistado y el que lo iba a ser.

Examinaremos ahora los resultados, diferenciándolos por el nivel escolar. Advertimos que los textos con «...» son protocolos auténticos reflejados fielmente, escritos (cuando provienen de test) u orales (cuando provienen de entrevistas).

3.1 V elemental. Las pruebas se desarrollaron en tres clases. Se sometió la prueba a un total de 53 alumnos, de los cuales 28 realizaron el test de Schoenfeld y 25 el de los niños. De los primeros 28, se entrevistó a 6; de los 25, también 6; en total 12 alumnos.

Prueba de Scoenfeld. De los 28 alumnos sometidos a la prueba de Schoenfeld:

- 8 se equivocan en los cálculos o realizan una operación distinta de la división
- 1 declara que no sabe resolverlo
- 19 efectúan correctamente el cálculo (3 usan la calculadora); de los 19,
  - 7 dan la respuesta 31 (2 usan la calculadora)
  - 1 da la respuesta $31,\widehat{3}$
  - 1 da la respuesta 31,333333 (usa la calculadora)
  - 10 dan la respuesta 32

La respuesta 32 aparece 10 veces (el 36% frente al 23% de Schoenfeld) y siempre en alumnos que *no* usan la calculadora; de esos 10 alumnos, 9 dicen explícitamente «32», pero siempre con comentarios como: «31, pero quedan 12 soldados y, por tanto, se debería usar otro autobús»; hay también un alumno que dice «el problema no se puede resolver porque queda un resto»: nos parece que esto expresa que es consciente del hecho que se debe encontrar una respuesta entera, ya que debe calcular el número de autobuses; lo hemos considerado entre los alumnos que dan como respuesta 32.

Prueba de los niños. De los 25 alumnos que se sometieron a este test:

- 1 realiza la operación 4x6=24 y dice que se necesitan 24 coches
- 2 dicen que sirve un sólo coche
- 22 dicen que se necesitan 2 coches

De los 22 que dicen que se necesitan 2 coches, 2 escriben la respuesta y el comentario sólo con palabras; los otros 20 sienten la necesidad de realizar operaciones aritméticas (se trata de la cláusula *exigencia de justificación formal*, descrita en D'Amore y Sandri (1997). Las operaciones son, sobre todo, 6-4=2 y alguna 6:2=3. La primera la explican muchos alumnos de forma heurística: de los 6 niños 4 van en un coche, los *otros* 2 van en *otro* coche (incluso hay un niño que pide que se use una furgoneta en lugar de otro coche). La segunda operación tiene el sentido que se describe en otros protocolos: dividimos los 6 niños en 2 coches, 3 en cada uno; por tanto se usa ya el 2, obtenido por vía intuitiva, como dato en el divisor. Se da también el resultado 6:4, pero nunca aparece en la forma 1'5. Es probable que algunos alumnos piensen la respuesta «uno y medio» y que después no la hagan explícita. Algún comentario parece probar una actitud de ese tipo, como el de Serena: «se necesitan dos coches (no se puede usar uno y medio)», señal de realización de una división.

Hay además una marea de comentarios, como «para estar más cómodos», «para estar más holgados», ... En casi todos los protocolos aparecen comentarios y controles de tipo exclusivamente heurístico que demuestran, de forma evidente, que los resolutores se han hecho imágenes de la situación muy realistas; el hecho de que sea papá u otro pariente el que conduzca el coche, de que se discuta de la comodidad o de otras cosas, muestra que se trata de escenas imaginadas. En tal sentido, resultan muy reveladoras las entrevistas.

Entrevistas. Entrevistamos a 12 alumnos, 6 que habían realizado el test de Schoenfeld y 6 el de los niños. El test de los niños no se considera como un verdadero problema y por tanto causa alguna incomodidad ya que «no se sabe qué hacer, mientras aquí [en el test de Schoenfeld] se hace la división»; también Daniela dice que «es extraño; el del autobús es más fácil, se comprende mejor». El problema de Schoenfeld encaja mejor en las expectativas usuales, encaja bastante bien en un modelo general de problema, señal evidente de que en el test de los niños no parece necesario realizar operación, porque el resultado «se ve», «se hace mentalmente»; si la operación se escribe es porque interviene la cláusula exigencia de justificación formal.

A los 6 niños que habían resuelto el segundo test se les proporcionó la calculadora como ayuda para resolver el test de Schoenfeld; de estos 6 alumnos:

- 1 hace la sustracción 1128-36: 1 (había puesto en el problema de los niños 6-4=2 y quizás buscaba la analogía)
- 1 hace la adición 1128+36
- 1 (Matteo) confunde el signo que separa 31 de 333333, leyendo el resultado «treinta y un millones tresc...» y se bloquea
- 3 responden que se necesitan 31 autobuses

A los 6 alumnos que habían resuelto el test de Schoenfeld sin calculadora, dando como respuesta 31, se les pidió que rehiciesen el cálculo, dándoles la calculadora; realizados los cálculos, ninguno cambia su idea sobre el resultado, confirmando lo escrito en el folio.

3.2 II media. Las pruebas se realizaron en tres clases. Realizaron la prueba 47 alumnos, 23 el test de Schoenfeld y 24 el de los niños; a estos últimos, para evitar que despreciasen la prueba al considerarla banal, se les puso en primer lugar un problema de proporcionalidad directa, no considerado en esta investigación, y como segundo en el folio el de los niños. Entre los primeros 23 se entrevistó a 8 alumnos; entre los segundos 24 se entrevistó a 11.

Prueba de Schoenfeld. De los 23 alumnos sometidos a la prueba de Schoenfeld:

- 5 se equivocan en la división o realizan otra operación
- 2 dicen que no saben resolverlo
- 8 efectúan correctamente el cálculo con calculadora; de esos 8,
  - 4 dan como respuesta, 31
  - 1 da la respuesta 31,3
  - 2 dan la respuesta $31,\widehat{3}$
  - 1 da la respuesta 32
- 8 efectúan correctamente el cálculo sin calculadora; de esos 8,
  - 2 dan como respuesta 31
  - 2 responden alrededor de 31
  - 1 responde 31,3
  - 1 responde 32
  - 2 «fuerzan» el resultado de la división para dar 32

Ese "forzar" el resultado algorítmico para obtener el resultado deseado es, aún en su forma ingenua, un índice del grado de consciencia del alumno respecto a la característica que debe tener el resultado; es decir, que sea un número entero. Por esto nos parece razonable incluir estos dos casos en la tipología de la respuesta 32. Tenemos así 4 respuestas 32 (el 17% frente al 23% de Schoenfeld y el 36% obtenido en V elemental, una apreciable disminución); de esos 4 alumnos, 1 usa la calculadora y 3 no la usan. (Los 2 alumnos que "fuerzan" el resultado han hecho, obviamente, los cálculos por escrito).

Prueba de los niños. Se sometieron a este test 24 alumnos, de los que:

- 1 declara que son necesarios 3 coches
- 1 declara que se necesitan 1 y medio
- 1 realiza operaciones sin sentido, usando datos no presentes en el texto
- 1 declara que se necesitan uno y medio o dos:
- 20 declaran que se necesitan 2 coches

De estos últimos 20 alumnos, han sido muchos los que, de igual forma que en V Elemental, se expresan en términos de «estar más anchos», ..., colocando 3 niños en ambos coches, en vez de 4 en uno y 2 en otro. Desaparecen (o casi) papá y otros parientes como conductores y, a pesar de que la cláusula exigencia de justificación formal aparece menos, muchos realizan operaciones, las mismas que en V Elemental (sobre todo 6-4=2 y alguna 6:2=3).

Entrevistas. Se entrevistó a 19 alumnos en total, 8 que habían realizado la prueba de Schoenfeld y 11 la de los niños. He aquí algunos resultados.

A los 8 alumnos de la prueba de Schoenfeld se les aplicó el test de los niños; *todos* dan la respuesta 2, sin realizar los cálculos; alguno dice que habría estado bien aplicar la división. Sólo Andrea encuentra *extraño* que el resultado sea 1'5, «mientras la respuesta *debe* ser 2». Ante la demanda de lo que habría escrito si se le hubiese planteado ese problema, responde: «habría escrito 1'5 coches».

A los 11 alumnos del test de los niños se les aplicó el test de Schoenfeld. Salvatore intenta sumar 36 muchas veces a sí mismo para llegar a 1128, usando la calculadora, pero naturalmente desiste pasado poco tiempo; el entrevistador sugiere que intente otro camino y él realiza entonces una división, pero obtiene, no se sabe cómo, 43,333333 y responde «43». Elena usa la calculadora y obtiene 31,333333; primero responde «31,33», despues «alrededor de 32», pero sin ninguna referencia a los autobuses, que parece los ha olvidado. Nicoletta realiza la sustracción 1128-36 y expresa el resultado en términos de «número necesario de autobuses». Elia, que había respondido «un coche y medio» en el test de los niños y de los coches, intenta realizar, en el test de Schoenfeld, 36:1128, sin gran éxito, ni siquiera con la calculadora. Luca, después de realizar con la calculadora la división 1128:36, responde que habría escrito $31,\widehat{3}$ o quizá «sólo 31» (a continuación añade «queda algún soldado pero ¿qué le vamos a hacer?». Pompilio y Alice responden $31,\widehat{3}$, después de realizar los cálculos con la calculadora. Matteo responde también $31,\widehat{3}$, pero después dice que «quizá» habría escrito «casi 32». Fabio, Michela y Gianluigi optan por responder 31.

A *todos* los entrevistados se les pidió cómo habrían resuelto el test de los niños y todos admitieron *que no habían sentido la necesidad* de hacer una operación, con motivaciones idénticas, en todo, a las ya vistas en V Elemental. A todos se les preguntó después cuál era la diferencia entre los dos test. Las respuestas fueron de dos tipos fundamentalmente:

- de analogía o diferencia *aritmética*: de analogía (en los dos se necesita la división); de diferencia (en el primero se necesita la división, en el segundo la sustracción).
- de diferencia *contextual*: en el primero hay autobuses y soldados, en el segundo hay niños y coches.

Este último hecho ha sido ya señalado y discutido ampliamente por D'Amore (1993).

3.3 II de liceo clásico. Las pruebas se realizaron en dos clases del Liceo Clásico experimental. Se sometieron a la prueba 36 alumnos, pero con modalidades distintas de las anteriores. A todos se les dieron dos papeles tamaño A4. En el primero se encontraba la prueba de Schoenfeld, sólo con la observación sobre el uso de la calculadora. En el segundo se pedía al alumno la explicación de cómo había hecho para resolver el test de Schoenfeld; se daba después el test de los niños y se preguntaba si los dos problemas se podían resolver de la misma forma. No se realizaron entrevistas a continuación.

De los 36 alumnos que hicieron la prueba se da el caso de una alumna que obtiene un resultado y declara otro; descartamos esta prueba. Quedan pues 35 pruebas válidas. Ninguno se equivoca en los cálculos; resultado diferente al de Schoenfeld, pese a que se trata de alumnos de la misma edad. Se debe decir que nuestra prueba se realizó en una escuela de alto nivel y, en particular, en dos clases consideradas de buen nivel.

- Usan la calculadora 13 alumnos; dan las respuestas siguientes:
  - 3 dan 31
  - 2 aproximadamente 31
  - 2 dan $31,\widehat{3} \cong 32$ ($\cong$ es «aproximadamente»)
  - 1 aproximadamente 32
  - 5 dan 32

  Por tanto el 38% de los que usan la calculadora dan conscientemente 32.
- 20 alumnos no usan la calculadora; dan las respuestas:
  - 2 dan 31
  - 2 dan $31,\widehat{3}$
  - 2 aproximadamente 32
  - 1 $31,\widehat{3}$ es decir 32
  - 1 da $31,\widehat{3} \cong 32$
  - 2 dan 31 autobuses y un jeep (sic!) o un coche
  - 10 dan 32.

Nótese que la respuesta 32 la dan 14 de los 20 alumnos que no usan la calculadora (70%); y que la dan 5 de los 13 alumnos que la usan (38%). No dicen nada sobre el uso de la calculadora 2 alumnos: uno da como respuesta 31 y el otro 32. En total, pues, los que dan con plena consciencia la respuesta 32 parecen ser 19 sobre 35, es decir el 54%.

El examen del test de los niños lleva a las siguientes observaciones: muchos declaran que pueden resolverlo sin hacer cálculos. Veamos alguna declaración explícita de esto: Ambra: «El procedimiento no necesita cálculos»; Irena: «No, no lo haría de la misma forma. Sin hacer cálculos, comprendo que no basta con un coche, por tanto se necesitarán 2»; Elisa: «No, porque a partir del texto puedo comprender el resultado del problema». Y así sucesivamente. Los alumnos que, en cambio, realizan cálculos se dividen en las dos categorías siguientes: hay quien hace 6-4=2 y quien hace 6:4=1'5. El que hace esta última operación, a menudo concluye escribiendo sólo $1'5 \cong 2$. [No hay alumnos que realicen la división 6:2=3]. Hay diversos formalismos «en el vacío»: por ejemplo $6_b - 4_b = 2_b$; signos lógicos del tipo $\Rightarrow$; operaciones erróneas (quizás por la prisa, 4:6, por ejemplo); una sola respuesta 1'5; una sola del tipo: alrededor de 2. No obstante la edad, más madura, sorprendentemente se dan muchísimas observaciones ingenuas de tipo realista, ligadas a ir cómodos, anchos y otras por el estilo, y ligadas al derroche inútil de coches: si los niños fuesen pequeños podrían ir todos en un solo coche, o se podría aprovechar para llevar a 8 en vez de a 6, etc.

Como conclusión y a la espera de hacer consideraciones generales sobre los resultados en 4, resumimos los datos de los porcentajes de respuestas exactas en la Tabla.

Tabla. Porcentajes de respuestas exactas a los test de Schoenfeld y de los niños

	test de Schoenfeld		test de los niños
	sin calculadora	con calculadora	
V elemental	36%	0%	88%
II media	37%	12%	83%
II liceo clásico	70%	38%	92%

4 Consideraciones generales y conclusiones

Aunque muchas conclusiones se han adelantado ya en 3, en la presentación de los resultados, nos parece útil volver sobre las principales de forma más explícita.

4.1 La cláusula de delegación formal. No sólo nos parece confirmada la presencia de tal cláusula, sino que se ha verificado el hecho de que el uso de la calculadora inhibe, por así decirlo, el control crítico: el fiarse de ella para el cálculo resolutivo parece librar de la necesidad de cualquier tipo de control entre el resultado obtenido y la congruencia semántica con la realidad evocada por el texto del problema. La tabla anterior muestra que el porcentaje de respuestas exactas al test de Schoenfeld es netamente menor en el que hace uso de la calculadora (en la escuela elemental se pasa del 36 al 0%; en la media del 37 al 12%; en la superior del 70 al 38%) y en neto ascenso con la edad (se pasa del 0% en la elemental al 12% en la media y al 38% en la superior). Las respuestas $31,\widehat{3}$ y 31,333333, aparecen (casi) sólo entre los que usan la máquina, signo evidente de tal inhibición.

4.2 Modelo general de problema y de resolución de problemas. Nuestra prueba refuerza muchas de las convicciones expresadas por Zan (1991-92). Nos ha parecido de notable interés todo lo plasmado en 3 sobre los alumnos de V Elemental que se declaraban molestos ante el test de los niños porque no sabían qué operación usar. La dificultad de reexaminar el resultado respecto a la congruencia, no sólo con el texto, sino también con el mundo real, aparece clara. Encontramos así un acuerdo muy explícito con la frase de Schoenfeld citada en 1.1 y con la de Nesher citada en 1.2.

Resulta confirmado también que el test de los niños no necesita del uso de operaciones; si los estudiantes las realizan, *no es para dar una respuesta al test* , sino para adecuarse a la cláusula exigencia de justificación formal del contrato didáctico, según la cual para resolver un test de matemáticas *es preciso* hacer operaciones. Pero el que esta producción de operaciones no sea una actitud espontánea del resolutor es evidente, si se observa cuánto contrasta con la declaración *explícita* de muchos alumnos, conforme a la cual no se necesita hacer operaciones en el caso del test de los niños. Por tanto, en un test con datos y situación tan simples, no se activa la cláusula de delegación formal, que parece intervenir sólo en test con datos numéricos grandes.

En el caso del test de los niños no se plantean problemáticas ligadas al modelo general de problema, si no es en el sentido siguiente. En las entrevistas, a los sujetos que habían terminado de resolver el test de Schoenfeld, les propusimos el test de los niños. Ellos, aceptado por analogía que el segundo test *debería* estar ligado al primero, deducían que también se *debería* poder resolver con una operación. En este sentido, sin embargo, el segundo produce un mayor malestar que el primero, justamente porque entran en conflicto dos creencias: de un lado, el *deber* hacer una operación; del otro, la sensación de no tener necesidad de ello, ya que la solución se ha encontrado de golpe, de forma intuitiva, imaginando la escena, sin razonar ni hacer cálculos.

4.3 Modelo mental que se hace el resolutor de la situación descrita en el texto. Se ha confirmado el hecho de que en algún caso (y de forma específica en el test de los niños) el modelo mental coincide con la solución y la ofrece inmediatamente. El resolutor tiene la impresión de no estar frente a un problema, porque la respuesta está ligada a la experiencia y no se pasa por ningún tipo de delegación formal. Nos parece confirmado también que en el segundo test la escena se sienta más próxima, más inmediata, más simple de imaginar. Lo demuestran muchos comentarios, en todos los niveles escolares, sobre la comodidad de los puestos; la distribución en el coche deducida de la imagen y no de las operaciones; la intervención de papá. Este es un hecho no registrado en el test de Schoenfeld.

4.4 Modelos intuitivos de las operaciones. Se ha verificado que el test de los coches y los niños se ha resuelto recurriendo a la experiencia vivida o imaginada. Además, esto se confirma con otros dos hechos, en cierta forma reconducibles al modelo intuitivo de las operaciones: 1) la operación a la que se recurre para resolver el segundo test es la *sustracción* , en cuanto se trata de *colocar* a cuatro niños en el primer coche y ver cuántos *quedan* (en realidad, el resolutor lo ve inmediatamente de forma intuitiva, pero, a menudo, quiere producir una respuesta formal: en estas condiciones, la sustracción es uno de los modelos intuitivos, responde bien a lo pedido); 2) la división 6:*2*=3, utilizada ya otras veces como operación resolutiva, usa como divisor aquel *2* (el número de coches entre los que se reparte a los niños) que era un número pedido y *no* un dato.

4.5 El uso de la lengua natural. Sobre el uso de la lengua natural, como comentario o justificación de las respuestas (por ejemplo en términos de «más ancho», «más cómodo», etc.), hemos hablado anteriormente. Sobre el contexto creado por la lengua natural, como ya preanunciamos al final de 2.5, tendremos que volver con mayor profundidad de forma específica, con una investigación expresamente centrada en este punto, en realización desde hace tiempo.

Bibliografía

Cassani A., D'Amore B., Deleonardi C., Girotti G. (1996) 'Problemi di routine e situazioni "insolite". Il "caso" del volume della*piramide' L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate,* 19B, 3, 249-259.

Castro C., Locatello S., Meloni G. (1996) 'Il problema della gita. Uso dei dati impliciti nei problemi di matematica',*La matematica e la sua didattica,* 2, 166-184.

D'Amore B. (1993)*Problemi. Pedagogia e psicologia della matematica nell'attività di problem solving*, Angeli, Milano.

D'Amore B. (1997) 'Matite-Orettole-Przxetqzyw. Le immagini mentali dei testi delle situazioni-problema influenzano davvero la risoluzione?', *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate,* pendiente de publicar.

D'Amore B., Sandri P. (1997), *Les réponses des élèves aux problèmes de type scolaire standard à une donnée manquante.*

D'Amore B., Zan R. (1996) 'Italian Research on Problem Solving 1988-1995', *La matematica e la sua didattica,* 3, 300-321.

Deri M., Sainati Nello M., Sciolis Marino M. (1983) 'Il ruolo dei modelli primitivi per la moltiplicazione e la divisione', *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 6 (6), 6-27.

Kilpatrick J. (1987) 'Where do good problems come from?', in: Schoenfeld A. H. (ed.).

Nesher P. (1980) 'The stereotyped nature of word problems', *For the learning of mathematics* 1, 1, 41-48.

Schoenfeld A. H. (1987) 'What's All the Fuss About Metacognition?', in: Schoenfeld A. H. (ed.), 189-215.

Schoenfeld A. H. (ed.) (1987) *Cognitive Science and Mathematics Education*, Lawrence Erlbaum Ass., Hillsdale (N.J.).

Zan R. (1991-92) 'I modelli concettuali di problema nei bambini della scuola elementare', *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate,* 14 (7,9), 659-677, 807-840; 15 (1), 39-53.

Bruno D'Amore y Berta Martini
Nucleo di Ricerca in Didattica
della Matematica
Dipartimento di Matematica
Università di Bologna (Italia)

Traducción:
Prof. Francisco Vecino Rubio
Departamento de Didáctica
de las Matemáticas
Universidad Complutense (Madrid)