Sociedade Brasileira de Educação Matemática

EDUCAÇÃO MATEMÁTICA em *Revista*
ISSN 2317-904X

Representações auxiliares de transição e a aprendizagem de situações combinatórias por alunos de 7º ano do Ensino Fundamental

Transitional auxiliary representations and the learning of combinatorial situations by 7th grade students

Juliana Azevedo Montenegro[1]

Rute E. S. Rosa Borba[2]

Marilena Bittar[3]

Resumo

Esta pesquisa objetivou analisar o papel de diferentes registros de representação no desenvolvimento do raciocínio combinatório. Foi realizado um teste inicial com 47 alunos do 7º ano do Ensino Fundamental distribuídos em dois grupos: G1 e G2. Nas sessões de ensino o G1 tratou problemas combinatórios usando árvores de possibilidades como *registro auxiliar* entre o enunciado do problema e a solução em expressão numérica e o G2 usou a listagem sistematizada. O teste final indica que ambas as *representações intermediárias* são boas auxiliares para o ensino da Combinatória, visto que os dois grupos avançaram em seus desempenhos. Destaca-se, entretanto, que a árvore de possibilidades parece ter maior aproximação com a expressão numérica, pois, nos problemas com maior número de possibilidades, o grupo que utilizou essa representação apresentou melhores desempenhos. Assim, o estudo ressalta a importância de representações intermediárias que auxiliem a conversão de enunciados de problemas combinatórios em expressões numéricas.

Palavras-chave: 7º ano. Ensino Fundamental. Combinatória. Representações Intermediárias. Registros auxiliares de transição.

Abstract

This research aimed to analyse the role of different registers of representation in the development of combinatorial reasoning. An initial test was carried out with 47 students from the 7th year of elementary school divided into two groups: G1 and G2. In the teaching sessions, G1 treated combinatorial problems using trees of possibilities as an auxiliary register between the statement of the problem and the solution in numerical expression and G2 used systematic lists. The final test indicated that both intermediate representations are good assistants for teaching Combinatorics, since the two groups advanced in their performance. It is noteworthy, however, that the tree of possibilities seems to be closer to the numerical expression, since, in the problems with larger number of possibilities, the group that used this representation presented better performance. Thus, the study emphasises the importance of intermediate representations that help the conversion of statements of combinatorial problems into numerical expressions.

---

[1] Doutora em Educação Matemática e Tecnológica/ Professora Substituta do Departamento de Métodos e Técnicas de Ensino – Centro de Educação. Recife/ PE. juliana.azevedo2@ufpe.com

[2] Doutora em Educação Matemática pela Oxford Brookes University/ Professora do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica – Centro de Educação/ UFPE. Recife/PE. resrborba@gmail.com

[3] Doutora em Didática da Matemática pela Université Joseph Fourier/ Grenoble 1/ Professora do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Federal do Mato Grosso do Sul – UFMS. marilenabittar@gmail.com

Keywords: 7th Grade. Middle School. Combinatorics. Intermediate Representations. Auxiliary transition registers.

Introdução

No contexto da Educação Matemática, a importância do estudo da Combinatória desde os anos iniciais do Ensino Fundamental tem sido amplamente discutida e recomendada. De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (BRASIL, 1997), este conteúdo deve ser introduzido neste nível de ensino com o propósito de discutir "combinações, arranjos, permutações e, especialmente, o princípio multiplicativo da contagem" (p.40), por meio de diferentes tipos de representações. Os PCN destacam que as representações precisam estar relacionadas com os conceitos matemáticos, e, além disso, é importante estimular o estudante a "[...] 'falar' e a 'escrever' sobre Matemática, a trabalhar com representações gráficas, desenhos, construções [...]". (BRASIL, 1997, p. 12).

Nos anos finais do Ensino Fundamental os PCN (BRASIL, 1998) destacam que problemas combinatórios

> [...] podem ser resolvidos sem que seja necessário fazer nenhum cálculo, uma vez que a solução pode ser obtida pela contagem direta das possibilidades. Nesse caso, o objeto da aprendizagem é a descoberta de um procedimento, como a construção de uma tabela de dupla entrada ou de um diagrama de árvore que assegure a identificação de todos os casos possíveis. Assim, é indispensável que os alunos produzam diversas representações para buscar os casos possíveis, antes de se pretender que reconheçam a utilização de um cálculo multiplicativo. Por outro lado, se lhes forem apresentados apenas problemas com quantidades pequenas, não terão a necessidade de aplicar o princípio multiplicativo, pois o procedimento da contagem direta é suficiente para obter a solução. (p. 111-112).

A Base Nacional Comum Curricular – BNCC, também destaca que os problemas combinatórios devem ser trabalhados nos anos finais do Ensino Fundamental, enfatizando que

> [...] devem, inicialmente, estar restritos àqueles cujas soluções podem ser obtidas pela descrição de todos os casos possíveis, mediante a utilização de esquemas ou diagramas, e, posteriormente, àqueles cuja resolução depende da aplicação dos princípios multiplicativo e aditivo e do princípio da casa dos pombos. Outro exemplo é o da resolução de problemas envolvendo as operações fundamentais, utilizando ou não a linguagem algébrica. (BRASIL, 2018, p.273)

Pessoa e Borba (2010) destacam que na resolução de situações combinatórias há uma grande variedade de representações simbólicas utilizadas pelos alunos, como: *desenhos*, *listagens*, *árvores de possibilidades*, *quadros*, *diagramas*, *cálculos* ou uso de *fórmula* e o uso do *Princípio Fundamental da Contagem (PFC)*. As representações relacionadas com o uso de expressões numéricas são usadas, principalmente, no Ensino Médio, entretanto, as autoras supracitadas ressaltam que os alunos deste nível de ensino ainda preferem as representações em que as possibilidades ficam explícitas, como é o caso de desenhos, listagens, árvores, quadros e diagramas.

Nessa mesma perspectiva dois autores, psicólogos cognitivistas, apontam como questão central a importância das representações para a aprendizagem matemática. Vergnaud (1986), em sua Teoria dos Campos Conceituais, destaca a importância das *representações simbólicas* (R) para a formação de um conceito e destaca, ainda, que essas são tão importantes quanto as diversificadas *situações* (S) que dão significado a este conceito e os *invariantes*[4] (I) relacionados às distintas situações. Sobre isso, Vergnaud (1996, p. 166) enfatiza que "[...] para estudar o funcionamento e o desenvolvimento de um conceito é necessário considerar estes três planos ao mesmo tempo" e articulados entre si. Esse tripé, C= (S, I, R), compõe um conceito o qual associado a outros conceitos compõem campos conceituais.

Duval (2009), na sua Teoria dos Registros de Representações Semióticas, também destaca o papel das representações na formação de conceitos. Este autor enfatiza que as representações são indispensáveis para a compreensão de um conceito, entretanto, as representações não podem ser confundidas com o próprio conceito. Nesse caso, ele chama a atenção para um paradoxo que faz surgir a necessidade de trabalhar com muitas representações de um mesmo conceito, e, assim, ter "acesso" ao próprio conceito e não apenas à sua representação (DUVAL, 2011). Para o trabalho com variadas representações, ele destaca a importância das *representações auxiliares de transição,* bem como as *transformações de conversão e de tratamento* – termos discutidos na seção que segue. Na próxima seção serão discutidas um pouco mais as teorias desenvolvidas por estes dois autores.

Assim, o presente estudo, fruto de uma pesquisa mais ampla com estudantes de 5º, 7º e 9º ano do Ensino Fundamental (EF), tem o objetivo de discutir o papel de diferentes registros de representação, tais como, linguagem natural, listagens, árvore de possibilidades, e expressões numéricas de aplicação do Princípio Fundamental da Contagem (PFC), no desenvolvimento do conhecimento combinatório. No plano metodológico e nas análises buscou-se articular a Teoria dos Campos Conceituais e a Teoria dos Registros de

[4] "Uma propriedade ou uma relação que é conservada sobre um certo conjunto de transformações". (VERGNAUD, 1986, p.81)

Representação Semiótica e nesse texto, em particular, serão discutidos os resultados dos alunos do 7º ano do EF.

A Teoria dos Campos Conceituais, a Teoria dos Registros de Representação Semiótica e o ensino e aprendizagem da Combinatória

Na Teoria dos Campos Conceituais, Vergnaud (1986) defende que o saber se forma a partir de situações-problemas as quais os estudantes precisam resolver e das relações nelas envolvidas, as quais precisam ser dominadas. Com essa perspectiva, Vergnaud destaca que os conceitos são desenvolvidos em campos conceituais e, estes são constituídos por um tripé: *situações* que dão sentido a conceitos; *invariantes* prescritos e operatórios que caracterizam os conceitos e diversas *representações simbólicas* utilizadas para representar os conceitos. Desse modo, Vergnaud defende que, para a formação de conceitos se faz necessário considerar essas três dimensões simultaneamente.

Para exemplificar a teoria Vergnaud trabalha com situações do campo conceitual aditivo e do campo multiplicativo. Para este autor, a Combinatória – a partir de situações de *produto de medidas* – está inserida no campo conceitual das estruturas multiplicativas. Pessoa e Borba (2010), baseadas na Teoria dos Campos Conceituais, organizaram, em uma classificação única, quatro tipos de *situações* combinatórias: *produto de medidas*, *combinação*, *arranjo* e *permutação*, em que cada uma possui *invariantes* próprios de escolha e de ordem e se relacionam aos conceitos e teoremas em ação[5] mobilizados pelos indivíduos para resolução destas situações, que suscitam distintas *representações simbólicas*. Assim, nas situações de *produto de medidas*, é necessário escolher elementos de dois ou mais conjuntos, formando um novo conjunto composto por um elemento de cada conjunto dado inicialmente, em que a ordem desses elementos não gera novas possibilidades; nas situações de *combinação, arranjo* e *permutação* é dado apenas um conjunto inicial, sendo que, nas duas primeiras situações deverão ser escolhidos alguns dos elementos do conjunto dado, sendo que, na primeira, a ordem desses elementos não é importante e na segunda, a ordem importa; nas situações de *permutação*, todos os elementos dados no conjunto deverão ser utilizados, sendo que a ordem desses elementos é importante nessa situação.

[5] Os teoremas-em-ação são definidos como relações matemáticas que são levadas em consideração pelos alunos, quando estes escolhem uma operação, ou uma sequência de operações, para resolver determinado problema. [...] a maioria deles não é explícita e muitos não têm validade matemática. Eles estão subjacentes (implícitos) ao comportamento dos alunos, aparecem de modo intuitivo na ação destes. (GITIRANA, CAMPOS, MAGINA, SPINILLO, 2014, p.22).

Duval (2011) afirma que para que ocorra a apreensão conceitual é necessário que o sujeito mobilize diferentes registros de um mesmo objeto matemático, de maneira que possa diferenciar o representante do representado. Dessa forma, Duval destaca que as *representações* possuem um papel central no desenvolvimento de um conceito. Para este autor um registro de representação semiótica se caracteriza como um sistema dotado de regras e se configura como um registro de representação semiótica quando satisfaz três condições: 1) *Identificação* - quando nele se é capaz de identificar o conceito representado; 2) Transformação de *Tratamento* - quando o conceito representado pode ser tratado internamente no próprio registro; e 3) Transformação de *Conversão* – quando o conceito pode passar pela mudança de um sistema de registro para outro.

Além disso, Duval (2009, p. 68-69) ressalta que as conversões realizadas podem gerar uma diferença na compreensão do conhecimento em questão, em função do nível de *congruência* entre os registros. Duas representações, sendo uma de partida e outra de chegada, são congruentes quando atendem a três critérios de congruência. O primeiro critério é de "correspondência semântica: a cada unidade significante simples de uma das representações, pode-se associar uma unidade significante elementar"; o segundo critério de "univocidade semântica terminal: a cada unidade significante elementar da representação de partida, corresponde uma só unidade significante elementar no registro de representação de chegada."; e o terceiro critério "organização das unidades significantes: [...] duas representações comparadas conduzem apreender nelas as unidades em correspondência semântica segundo a mesma ordem nas duas representações". Quando os três critérios, ou apenas dois ou um deles, não são correspondidos entre duas representações pode haver diferença no grau de congruência, ou seja, duas representações que não atendem nenhum dos três critérios estabelecidos possuem maior grau de não-congruência quando comparado com duas representações que não atendem apenas a um dos critérios. Nas situações combinatórias, por exemplo, não há correspondência semântica, uma vez que os dados do enunciado não caracterizam os números utilizados na expressão numérica; não há univocidade semântica, pois as escolhas que precisam ser realizadas são implícitas e não há um verbo portador da informação da multiplicação; e a ordenação das unidades significativas não é observada, em especial em situações combinatórias inversas nas quais são dadas as possibilidades (ou o número total delas) e se pede elementos dos agrupamentos que deram origem a essas possibilidades. (AZEVEDO, CALHEIROS , BORBA, 2013).

Em relação à congruência, o autor destaca que, em situações em que o registro de partida e o registro de chegada são não-congruentes, é preciso recorrer a uma *representação intermediária* entre o registro de partida (por exemplo, enunciado em língua natural) e o registro de chegada (expressão numérica, dentre outros) que auxilie a passagem do enunciado para a expressão numérica. Esse tipo de registro, a longo prazo, se caracteriza como uma representação de transição, uma vez que, quando os alunos compreendem um registro menos lento e custoso, abandonam seu uso e passam a utilizar um registro mais formal, de modo que no Ensino Médio, por exemplo no caso da Combinatória, os alunos passam direto para o registro em PFC ou fórmulas.

No caso das situações combinatórias um registro auxiliar de transição é imprescindível, pois estas se caracterizam pela não-congruência na conversão entre os registros em língua natural do enunciado e o registro matemático formal da sua solução. Principalmente com relação a correspondência semântica e univocidade semântica terminal, como já exposto acima, uma vez que não são trabalhados problemas de ordem inversa nesse estudo.

A presente pesquisa ressalta as contribuições da Teoria dos Campos Conceituais, chamando atenção sobre as três dimensões (S, I, R) necessárias para a formação de um conceito, bem como da Teoria dos Registros de Representação Semiótica, referente ao papel fundamental das identificações, conversões e tratamentos de representações na conceitualização.

Objetivos e método

Com o objetivo de investigar o efeito de intervenções pedagógicas, que mobilizam *transformações de conversão e de tratamento de registros*, no desempenho de alunos em diferentes *situações combinatórias*, foi aplicado um teste inicial, realizadas duas sessões de intervenção e aplicado um teste final com duas turmas de 7º ano, totalizando 47 estudantes deste ano do Ensino Fundamental, sendo 21 alunos na turma que compôs o Grupo 1 e 26 alunos na turma que caracterizou o Grupo 2. Cada turma se caracterizou como um grupo experimental o qual usou representação auxiliar distinta entre a representação de partida (enunciado em língua natural) e a representação de chegada (expressão numérica). A pesquisa foi realizada entre os meses de setembro e outubro de 2017.

O pré-teste era composto por oito problemas, sendo dois de cada tipo de situação combinatória (*produto de medidas*, *arranjo*, *permutação* e *combinação*), nos quais o número de possibilidades na resposta estava entre 4 e 24, sendo possível de responder por meio de uma listagem, por exemplo. Para cada problema era solicitado quais eram todas as possibilidades e, em seguida, perguntava-se qual a conta (operação) que resolvia o problema.

No Quadro 1 é possível observar um exemplo de cada tipo de situação combinatória. Os problemas resolvidos no pré-teste foram utilizados durante a intervenção. No Grupo 1 a intervenção era realizada por meio da árvore de possibilidades como representação intermediária, e, no Grupo 2, a representação intermediária era a listagem sistemática.

Quadro 1: Exemplo de problemas combinatórios utilizados no pré-teste e na intervenção.

1. Na festa de São João da Escola Saber o 5º ano irá dançar quadrilha. Na turma tem seis meninos (Gabriel, Thiago, Matheus, Renato, Otávio e Felipe) e quatro meninas (Taciana, Eduarda, Catarina e Rayssa). A professora quer que todos os meninos dancem com todas as meninas. Quantos casais (um menino e uma menina) diferentes podem ser formados?
   Qual a conta que resolve esse problema? (Produto de medidas)
2. De quantas maneiras possíveis pode-se escrever números de dois algarismos diferentes, usando os cinco algarismos 1, 3, 5, 7 e 9 ?
   Qual a conta que resolve este problema? (Arranjo)
3. De quantas maneiras diferentes três pessoas (Maria, Luís e Carlos) podem posicionar-se numa fila do banco?
   Qual a conta que resolve este problema? (Permutação)
4. Cinco pessoas (Beatriz, Daniel, Joana, Carlos e Marina) se cumprimentaram com aperto de mão. Quantos apertos de mão entre pessoas diferentes foram dados?
   Qual a conta que resolve esse problema? (Combinação)

Fonte: Montenegro (2018)

Foram realizadas, durante as intervenções, duas *conversões* em cada um dos problemas trabalhados. A primeira do registro de partida para uma representação intermediária. A segunda da representação intermediária para o registro de chegada. Além disso, foi realizado o *tratamento* dos registros em árvore (G1) e em listagem de possibilidades (G2), e o *tratamento* da expressão numérica aplicada ao PFC.

Em ambas as turmas foram realizadas duas sessões de intervenção. Na primeira foram trabalhados os quatro primeiros problemas do pré-teste, de modo que os alunos deveriam ler o problema em linguagem natural e discutir o objetivo da questão com a mediação da pesquisadora. Nesses momentos, os alunos analisavam as possíveis respostas e a pesquisadora pontuava as características de escolha e de ordem em cada situação. Em seguida, a mesma sugeria um registro de representação auxiliar sistematizado, menos formalizado, de modo que fosse possível chegar a um registro mais formal, ou seja, uma expressão numérica (Princípio Fundamental da Contagem – PFC). Esse mesmo modelo foi repetido na segunda sessão de intervenção, na qual foram trabalhados os quatro últimos problemas do pré-teste. No Quadro 2 é possível observar, no exemplo de um problema com a situação de *combinação*, a solução sistemática em listagem (G2) e árvore de possibilidades (G1) e em registros mais formais, pelo uso de uma expressão numérica em PFC ou generalização de possibilidades.

O pós-teste, aplicado após as intervenções, constava de oito problemas, sendo dois para cada tipo de situação combinatória. Nos quatro primeiros problemas a ordem de grandeza das respostas estava entre 6 e 30 possibilidades, sendo possível resolver por explicitação dos casos. Já nos quatro últimos problemas do pós-teste a ordem de grandeza estava entre 56 e 120 possibilidades, sendo preferível uma expressão numérica para sua resolução.

Quadro 2: Situação de *combinação* com duas etapas de escolha sendo resolvidas por árvore de possibilidades, listagem, PFC e generalização de possibilidades.

Combinação 2 etapas: Cinco pessoas (Beatriz, Daniel, Joana, Carlos e Marina) se cumprimentaram com aperto de mão. Quantos apertos de mão entre pessoas diferentes foram dados? Qual a conta que resolve esse problema?

Grupo 1: Árvore de possibilidades

Beatriz → Daniel → Joana → Carlos → Marina	Daniel → ~~Beatriz~~ → Joana → Carlos → Marina	Joana → ~~Beatriz~~ → ~~Daniel~~ → Carlos → Marina	Carlos → ~~Beatriz~~ → ~~Daniel~~ → ~~Joana~~ → Marina	Marina → ~~Beatriz~~ → ~~Daniel~~ → ~~Joana~~ → ~~Carlos~~

Grupo 2: Listagem

Beatriz e Daniel	~~Daniel e Beatriz~~	~~Joana e Beatriz~~	~~Carlos e Beatriz~~	~~Marina e Beatriz~~
Beatriz e Joana	Daniel e Joana	~~Joana e Daniel~~	~~Carlos e Daniel~~	~~Marina e Daniel~~
Beatriz e Carlos	Daniel e Carlos	Joana e Carlos	~~Carlos e Joana~~	~~Marina e Joana~~
Beatriz e Marina	Daniel e Marina	Joana e Marina	Carlos e Marina	~~Marina e Carlos~~

Grupos 1 e 2: PFC

5 x 4 ÷ 2 = 10 possibilidades

Multiplicação por generalização de possibilidades:

5 x 4 = 20   20 ÷ 2 = 10

Fonte: Montenegro (2018)

A análise foi realizada de forma quantitativa, com o uso do software de análise estatística SPSS (Statistical Package for the Social Sciences). Para uma análise qualitativa, foram examinados os protocolos de resolução dos alunos no pré-teste e no pós-teste.

Acreditava-se que os grupos que tiveram intervenção utilizando a árvore de possibilidades apresentariam maior facilidade em chegar ao PFC ou uma generalização de possibilidades por meio de uma multiplicação correspondente à resolução do problema combinatório. Isso porque, a árvore de possibilidades parece indicar com maior clareza a relação de "um-para-muitos" envolvida nas situações combinatórias, pois a organização em ramos que indicam essa ideia multiplicativa aparentemente é mais congruente com a operação matemática necessária para resolução dos problemas.

Resultados: Desempenhos antes e após as intervenções

Os testes aplicados antes e depois das intervenções foram analisados conforme o levantamento de possibilidades e a expressão numérica (operação, conta) utilizada para responder a situação.

O levantamento de possibilidades foi analisado de acordo com o seguinte critério: o aluno não recebeu pontos na questão em caso de erro ou respostas em branco; recebeu um ponto no caso de acerto parcial 1, em que eram consideradas as respostas com raciocínio combinatório nas quais se apresentasse menos da metade de possibilidades que responde a situação; no caso de acerto parcial 2, recebeu dois pontos na questão. Nessa pontuação estão os casos em que são apresentadas metade ou mais do total de possibilidades, mas não há seu esgotamento; no caso de acerto total, ou seja, quando havia o esgotamento de todas as possibilidades, o aluno recebeu três pontos. Assim, no teste contendo oito problemas, cada aluno poderia chegar a um total de 24 pontos (oito problemas x três pontos em cada problema) no teste.

A análise para a expressão numérica que responde a situação também foi realizada com pontuação de 0 a 3 pontos, sendo que a pontuação nula era designada para as respostas em branco ou que apresentavam um cálculo que não correspondia ao viável para responder a situação (erro de cálculo relacional[6], Vergnaud, 1983). Os acertos parciais 1 e 2 eram caracterizados por aqueles que indicavam a expressão numérica correta, entretanto erravam o cálculo numérico propriamente dito – acerto de cálculo relacional; erro de cálculo numérico, (VERGNAUD, 1996) dificuldade no tratamento dentro do próprio registro (DUVAL, 2012), apresentando um número menor que a metade das possibilidades para o Acerto Parcial 1 e igual ou maior que a metade do número total de possibilidades para o Acerto Parcial 2. Também foram encontrados acertos parciais com generalização incompleta de possibilidades. Os três pontos foram designados para os que indicavam a expressão numérica correta, seja ela por meio de uma generalização de possibilidades ou pelo PFC.

[6]Vergnaud (1996) destaca que os cálculos relacionais envolvem operações de pensamento necessárias para compreender as relações envolvidas na situação.

Na Tabela 1 é possível observar a média de desempenhos antes e depois da intervenção. Ambos os grupos possuíam uma média similar no pré-teste – tanto para o levantamento de possibilidades, quanto para a expressão numérica. No pós-teste para o levantamento de possibilidades essa média avançou de modo semelhante nos dois grupos, mas, na apresentação da expressão numérica, maiores índices de média foram apresentados no grupo que trabalhou com a árvore de possibilidades como representação intermediária.

Tabela 1: Média de desempenho do 7º ano no pré-teste e no pós-teste, por grupo de intervenção.

	Pré-teste		**Pós-teste**	
	Levantamento	**Expressão**	**Levantamento**	**Expressão**
G1 (árvore)	1,38	0,57	6,76	4,76
G2 (Listagem)	1,77	0,46	6,23	3,46

Fonte: Montenegro (2018)

Ainda observando a Tabela 1, destaca-se que, no pós-teste ainda foram observados baixos desempenhos, considerando que poderia se chegar a 24 pontos de média, entretanto, diferenças significativas foram encontradas. Isso indica que, com apenas duas sessões de ensino, os avanços foram expressivos (de médias iniciais de pontuação inferior a 2 para médias finais três vezes maiores). Com maior período de ensino, acredita-se que se obteriam avanços ainda mais significativos. Além disso, os avanços foram ainda mais evidentes nos problemas que possuíam como resposta menor número de possibilidades. Assim, as sessões de ensino se mostraram eficientes quando os problemas envolviam quantidades mais baixas e mais intervenções, possivelmente, possibilitaria também avanços nos problemas que resultavam em maiores possibilidades.

Para analisar o efeito das intervenções realizadas no desenvolvimento do raciocínio combinatório dos alunos dos diferentes grupos de ensino foram realizadas análises estatísticas por meio do software SPSS. Inicialmente foram comparados o pré-teste e o pós-teste dentro de cada grupo, indicando-se um diferença significativa[7], tanto no levantamento de possibilidades ($t(46)= -8,878$; $p<0,001$), quanto na expressão numérica ($t(46)= - 6,156$; $p<0,001$). Assim, percebe-se que as intervenções realizadas (tanto com árvores, quanto com

[7] Em linguagem estatística ‘p’ indica se algo provavelmente é verdadeiro e não resultante de uma situação aleatória. Na estatística afirmar que um resultado é altamente significativo, significa que a hipótese que está sendo testada é muito provavelmente verdadeira. Em geral, quando p <0,05 assume-se que há uma probabilidade de apenas 5% de que a diferença encontrada não seja verdadeira. Assim, quanto menor o valor de p, menor será a probabilidade da diferença não ser verdadeira.

listagens como *representações auxiliares intermediárias*), de forma que fossem ressaltados os *invariantes* das diferentes *situações* combinatórias, foram muito importantes para a melhora do desempenho nos problemas combinatórios.

Analisando a diferença entre os diferentes grupos de intervenção foi comparado o pós-teste do G1 com o pós-teste do G2. A análise, de modo geral, mostrou que não há diferenças nem no levantamento de possibilidades (t(45)= 0,440; p=0,662), nem na expressão numérica: t(45)= 0,166; p=0,300). Dessa forma, tanto a árvore de possibilidades, quanto a listagem, são *representações intermediárias* que podem ajudar no desempenho em problemas combinatórios.

Diante do resultado geral próximo entre os dois grupos, foi realizada a análise do pós-teste apenas nos problemas em que o número de possibilidades era maior, sendo preferível, portanto, uma expressão numérica para resolver a situação – seja por generalização de possibilidades, seja pelo uso do Princípio Fundamental da Contagem. Por meio dessa análise, foi comparado o desempenho do G1 (árvore) e do G2 (listagem) na segunda parte do teste. Os resultados indicam uma diferença significativa entre os grupos (t(45)= 2,535; p=0,015). Desse modo, o Grupo 1, que teve intervenção com o uso da árvore de possibilidades como representação auxiliar, obteve melhor desempenho nas situações em que era recomendável o uso de uma expressão numérica, isso porque, essa representação intermediária parece ter um maior grau de *congruência* com a expressão numérica que pode ser utilizada para a resolução dos problemas combinatórios.

Foi também realizada a análise referente à diferença entre os desempenhos no pré-teste e no pós-teste em cada tipo de problema. Na Tabela 2 podem-se observar os resultados sobre os quais foram realizadas as análises.

Tabela 2: Diferenças entre pré-teste e pós-teste do 7º ano por tipo de problema.

Grupo	Comparação	Levantamento de possibilidades	Expressão Numérica
G1	PM pré X PM pós	t (20) = - 4,756; **p< 0,001**	t (20) = - 3,579; **p= 0,002**
	C pré X C pós	t (20) = - 1,160; p= 0,260	t (20) = - 1,826; p= 0,083
	A pré X A pós	t (20) = - 2,044; p= 0,054	t (20) = - 2,500; **p= 0,021**
	P pré X P pós	t (20) = - 5,645; **p< 0,001**	t (20) = - 2,905; **p= 0,009**
G2	PM pré X PM pós	t (25) = - 3,447; **p= 0,002**	t (25) = - 3,580; **p= 0,001**
	C pré X C pós	t (25) = - 2,952; **p= 0,007**	t (25) = - 1,443; p= 0,161
	A pré X A pós	t (25) = - 2,562; **p= 0,017**	t (25) = - 1,933; p= 0,065

	P pré X P pós	t (25) = - 3,904; **p= 0,001**	t (25) = - 2,945; **p= 0,007**

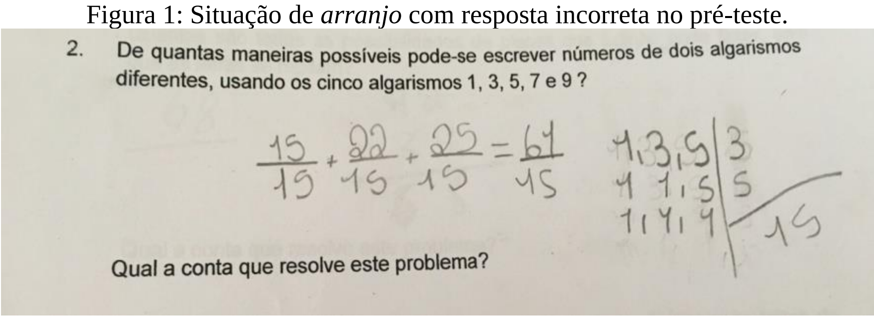
PM: Produto de medidas; C: Combinação; A: Arranjo; P: Permutação.
Fonte: Montenegro (2018)

No Grupo 1, houve diferença significativa (indicadas em negrito na tabela) entre pré-teste e pós-teste no levantamento de possibilidades em situações de *produto de medidas* e *permutação* e na expressão numérica, além das duas situações anteriores, também nas situações de *arranjo*. Já no G2 o levantamento de possibilidades apresentou diferenças significativas nos quatro tipos de problemas combinatórios, mas na expressão numérica houve diferenças apenas nas situações de *produto de medidas* e *permutação*. Esse é outro indicativo de melhor desempenho do G1, uma vez que os alunos deste grupo indicaram a expressão numérica correta em três situações combinatórias.

Nota-se que para a situação de *combinação* não foram apresentadas diferenças significativas na indicação da expressão numérica correspondente, evidenciando que para essa *situação*, a apresentação de uma expressão numérica parece ser uma tarefa mais complexa, uma vez que, além de multiplicar o número de possibilidades em cada etapa de escolha, é necessário dividir pelo número de vezes que uma possibilidade se repete.

As dificuldades expressadas pelos alunos do 7º ano no pré-teste se configuram como respostas em branco e respostas que não têm indícios de pensamento combinatório, como é possível observar na Figura 1. Nessa solução, o aluno respondeu por meio de M.M.C. (Mínimo Múltiplo Comum), possivelmente um dos conteúdos trabalhados em sala.

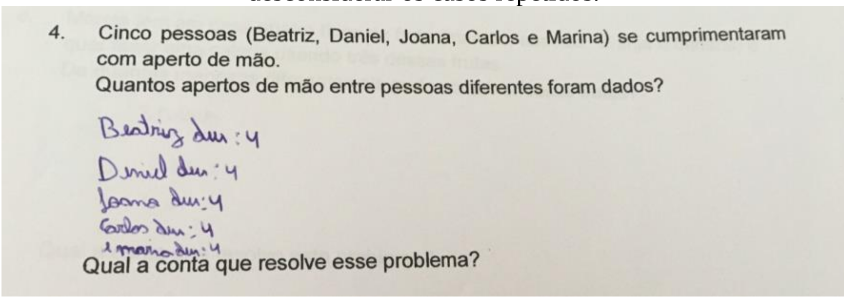
Figura 1: Situação de *arranjo* com resposta incorreta no pré-teste.



Fonte: Montenegro (2018)

Na Figura 2 o erro do aluno está relacionado com o não entendimento do invariante de ordem no problema de *combinação*, uma vez que o aluno considera o mesmo aperto de mão duas vezes quando indica que cada um cumprimenta quatro vezes, uma vez que há mais quatro pessoas. Nessa situação há uma relação combinatória errada para o problema proposto, mas que poderia ser usada para responder outros tipos de problemas combinatórios nas quais a ordem dos elementos não indica possibilidades distintas.

Figura 2: Situação de *combinação* com resposta incorreta no pré-teste, com interpretação da situação sem desconsiderar os casos repetidos.


4. Cinco pessoas (Beatriz, Daniel, Joana, Carlos e Marina) se cumprimentaram com aperto de mão.
Quantos apertos de mão entre pessoas diferentes foram dados?

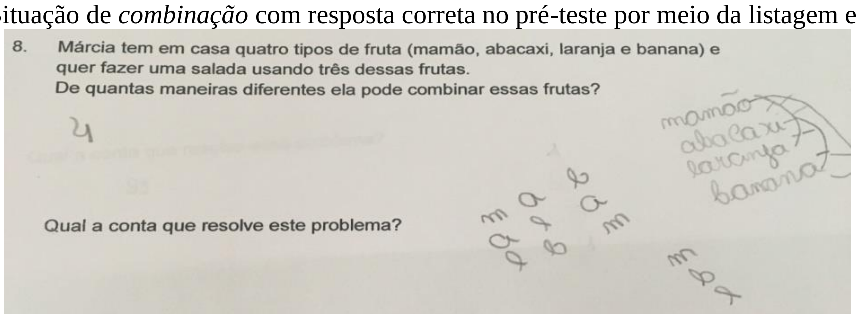
Beatriz deu: 4
Daniel deu: 4
Joana deu: 4
Carlos deu: 4
Marina deu: 4

Qual a conta que resolve esse problema?

Fonte: Montenegro (2018)

No pré-teste também foram apresentadas algumas poucas soluções corretas, por meio da listagem, como é possível visualizar na Figura 3. Entretanto, na situação de *combinação* destacada não foi apresentada a expressão numérica que responde o problema, ficando esta resposta em branco. Assim, mesmo que alguns alunos tenham conseguido responder corretamente o levantamento de possibilidades, eles não eram capazes de determinar uma expressão numérica correta correspondente para a solução na maioria das situações combinatórias.

Figura 3: Situação de *combinação* com resposta correta no pré-teste por meio da listagem e diagrama.


8. Márcia tem em casa quatro tipos de fruta (mamão, abacaxi, laranja e banana) e quer fazer uma salada usando três dessas frutas.
De quantas maneiras diferentes ela pode combinar essas frutas?

4

mamão
abacaxi
laranja
banana

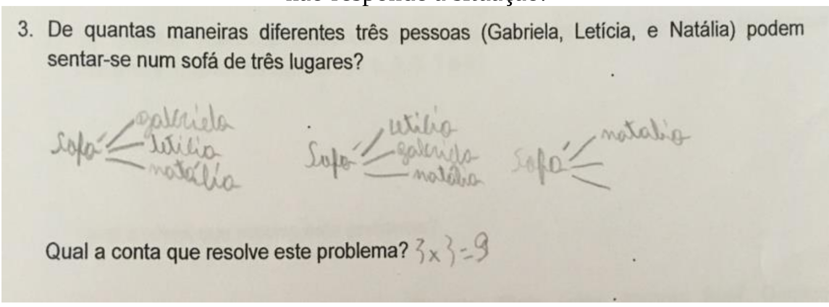
Qual a conta que resolve este problema?

Fonte: Montenegro (2018)

Os resultados do pré-teste indicaram que converter uma solução em listagem para uma expressão numérica, não é uma tarefa simples e pode ser melhor desenvolvida, para que os erros sejam minimizados. Desse modo, a intervenção teve como objetivo trabalhar com representações intermediárias para auxiliar na superação dessa dificuldade.

Os erros apresentados no pós-teste estiveram relacionados, em geral, com uma multiplicação que não responde o problema, como apresentado na Figura 4. Nesse caso, os números apresentados no enunciado foram usados, mas utilizando uma ideia incorreta de *produto de medidas*. Neste exemplo é possível verificar que o aluno não compreendeu o invariante de escolha, entendendo de forma equivocada que no problema há dois conjuntos diferentes (pessoas e lugares no sofá), quando na verdade só há um conjunto em que é necessário mudar a ordem das pessoas para que seja apresentada uma resposta correta.

Figura 4: Situação de *permutação* com resposta incorreta no pós-teste por meio de uma multiplicação que não responde a situação.


3. De quantas maneiras diferentes três pessoas (Gabriela, Letícia, e Natália) podem sentar-se num sofá de três lugares?

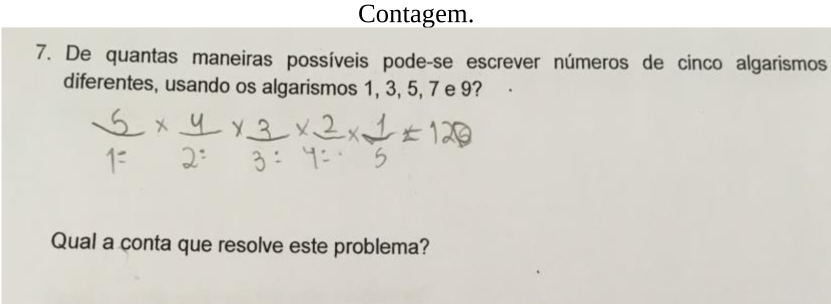
sofá gabriela letícia natália
sofá letícia gabriela natália
sofá natália

Qual a conta que resolve este problema? 3x3=9

Fonte: Montenegro (2018)

Na Figura 5 observa-se, no pós-teste, o uso do PFC em uma situação de *permutação* com 120 possibilidades. Nesse problema era recomendável o uso da expressão numérica, uma vez que listar ou organizar em árvore todas as possibilidades seria muito demorado e com grande chance de não se conseguir finalizar o processo.

Figura 5: Situação de *permutação* com resposta correta no pós-teste por meio do Princípio Fundamental da Contagem.


7. De quantas maneiras possíveis pode-se escrever números de cinco algarismos diferentes, usando os algarismos 1, 3, 5, 7 e 9?

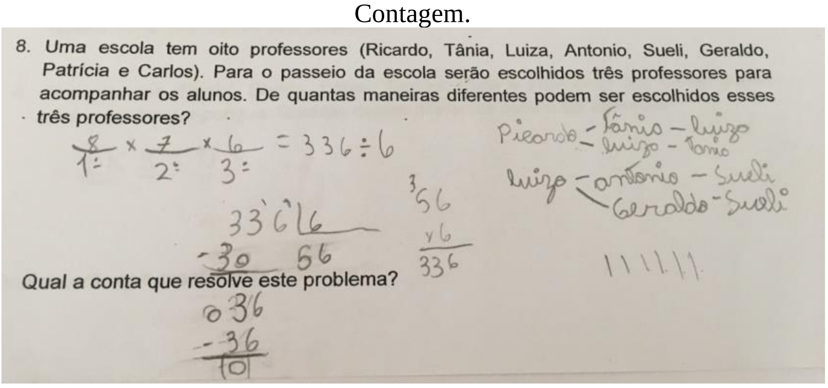
5 x 4 x 3 x 2 x 1 = 120
1: 2: 3: 4: 5

Qual a conta que resolve este problema?

Fonte: Montenegro (2018)

Na situação de *combinação* apresentada na Figura 6 o aluno acertou, por meio do PFC com a divisão pelos casos repetidos, discutida durante a intervenção. Para isso o aluno indicou um caminho bem-sucedido de uso de uma representação intermediária: árvore de possibilidades. Apesar de a expressão utilizada estar matematicamente incorreta, percebe-se que o aluno compreendeu que são oito possibilidades para o primeiro lugar, sete para o segundo e seis para o terceiro, e que a multiplicação desses números resulta em 336 possibilidades. Além disso, o aluno também indicou a necessidade de dividir pelos seis casos repetidos da mesma possibilidade, resultado em 56 possibilidades.

Figura 6: Situação de *combinação* com resposta correta no pós-teste por meio do Princípio Fundamental da Contagem.


8. Uma escola tem oito professores (Ricardo, Tânia, Luiza, Antonio, Sueli, Geraldo, Patrícia e Carlos). Para o passeio da escola serão escolhidos três professores para acompanhar os alunos. De quantas maneiras diferentes podem ser escolhidos esses três professores?

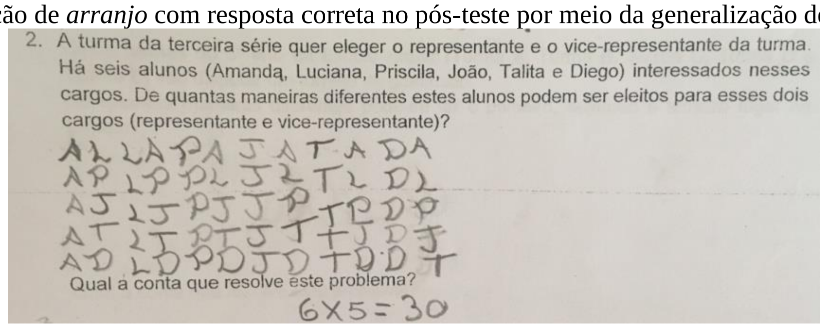
$\frac{8}{1^{\circ}} \times \frac{7}{2^{\circ}} \times \frac{6}{3^{\circ}} = 336 \div 6$

Qual a conta que resolve este problema?

Fonte: Montenegro (2018)

Nas Figuras 7, 8 e 9 pode-se observar acertos em situações de *arranjo*. Na primeira situação (Figura 7) por meio da listagem ou do diagrama de árvore era possível chegar na resposta sem a necessidade de uma expressão numérica correspondente. Entretanto, o aluno apresentou a operação por meio da listagem de todas as possibilidades e também respondeu com a operação correspondente.

Figura 7: Situação de *arranjo* com resposta correta no pós-teste por meio da generalização de possibilidades.


2. A turma da terceira série quer eleger o representante e o vice-representante da turma. Há seis alunos (Amanda, Luciana, Priscila, João, Talita e Diego) interessados nesses cargos. De quantas maneiras diferentes estes alunos podem ser eleitos para esses dois cargos (representante e vice-representante)?

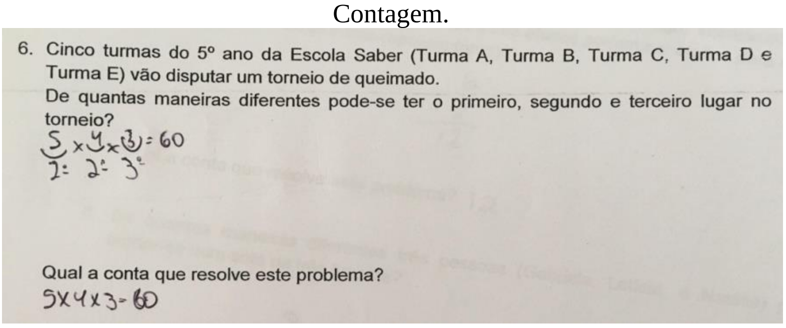
Qual a conta que resolve este problema?

6X5=30

Fonte: Montenegro (2018)

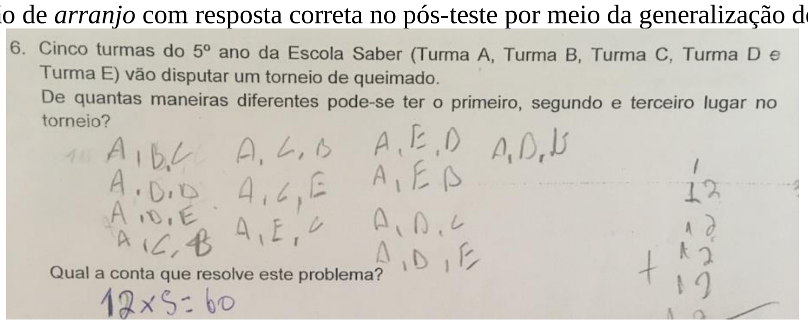
Nas Figuras 8 e 9, esperava-se que a resposta fosse apresentada por uma operação, pois, listar 60 possibilidades pode demandar muito tempo. Nesse sentido, na Figura 8 é apresentado o PFC como representação, sem a necessidade do uso de um registro auxiliar de transição. Desse modo, o registro numérico já foi utilizado, pelo aluno, como um recurso facilitador para a apresentação da resposta. Na Figura 9 o aluno ainda necessitou de um *registro auxiliar de transição*, em que listou todas as possibilidades para um caso, começando com a Turma A, em que encontrou 12 possibilidades, e generalizou por meio de uma multiplicação correta do número de possibilidades em uma turma (12) pelo número de turmas (5), resultando em 60 possibilidades.

Figura 8: Situação de *arranjo* com resposta correta no pós-teste por meio do Princípio Fundamental da Contagem.



Fonte: Montenegro (2018)

Figura 9: Situação de *arranjo* com resposta correta no pós-teste por meio da generalização de possibilidades.



Fonte: Montenegro (2018)

Considerações finais

Este estudo teve o objetivo de investigar o efeito de intervenções pedagógicas que mobilizam *transformações de conversão e de tratamento de registros*, em que a língua natural foi o registro de partida e a expressão numérica, o registro de chegada, no desempenho de alunos do 7º ano em diferentes *situações* combinatórias, por meio da discussão de seus *invariantes* e do uso de diferentes *representações auxiliares* (de transição). A principal hipótese se amparava na aparente maior congruência entre a árvore de possibilidades e a expressão numérica, e, com isso, esperava-se que os alunos que utilizassem a árvore de possibilidades como representação auxiliar apresentariam maior facilidade em demonstrar o PFC ou uma generalização de possibilidades por meio de uma multiplicação correspondente à resolução do problema combinatório, do que os alunos que utilizassem a listagem sistematizada.

Os resultados quantitativos revelam que não houve diferenças significativas nos desempenhos no pós-teste entre os grupos que trabalhavam, respectivamente, com a árvore de possibilidades e a listagem sistematizada. Evidenciou-se, assim, que a listagem sistematizada também pode se configurar como uma boa representação intermediária entre o registro de partida (enunciado em língua natural) e o registro de chegada (expressão numérica), auxiliando na análise da situação e possibilitando a determinação de uma expressão numérica de resolução do problema.

Apesar disso, na análise por tipo de problema, destaca-se o melhor desempenho do G1 (árvore) na apresentação da expressão numérica, pois este grupo demonstrou diferenças significativas para a expressão numérica em três dos quatro tipos de problemas, enquanto o G2 (listagem) em apenas dois tipos. Além disso, o G1 apresentou resultados melhores, com indicação de diferenças significativas na comparação com o G2, na segunda parte do teste final, na qual os números de possibilidades resultantes eram maiores, sendo recomendável o uso de uma generalização de possibilidades ou do PFC. Isso se confirma em função do maior grau de congruência entre a árvore de possibilidades e a expressão numérica, principalmente quando o número de possibilidades é maior.

Destaca-se que o objetivo deste texto de discutir o papel de diferentes registros de representação, usados como representação de partida, representação intermediária e representação de chegada, também implicam na discussão do que é esperado no ensino de Matemática na escola: partir de um enunciado em língua natural e chegar a uma expressão numérica formal. O presente estudo indica a discussão da ampliação do conhecimento combinatório de estudantes, uma vez que evidencia o importante papel que uma representação intermediária tem, em particular no caso da Combinatória, pois esta possui situações sem a indicação clara da operação que pode ser usada para responder o problema. As representações intermediárias (entre enunciados e expressões numéricas) auxiliam na determinação de operações matemáticas que resolvem situações combinatórias e podem ser transitórias, pois podem ser abandonadas a partir do momento que os estudantes compreendem, de fato, as expressões numéricas que estão utilizando.

Também se confirma a importância o trabalho com diferentes situações combinatórias, por meio da discussão dos seus *invariantes*, no momento das *transformações de conversão* e de *tratamento* de cada registro. Desse modo, acredita-se que a intervenção com o uso da listagem, quando sistematizada, e, principalmente, da árvore de possibilidades, pela sua maior congruência com a expressão numérica, como representações intermediárias se configuram como um caminho viável para o aprendizado da Combinatória, de modo que os estudantes possam levantar as possibilidades que respondem um dado problema, e expressá-las em uma operação matemática.

Referências

AZEVEDO, Juliana; CALHEIROS, Julia. BORBA, Rute. Problemas combinatórios inversos resolvidos por alunos do 9º ano do ensino fundamental e do 3º ano do ensino médio. **Revista Paranaense de Educação Matemática**: RPEM, Campo Mourão, Pr, v.2, n.2, jan-jun. 2013

BRASIL. Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica. **Parâmetros Curriculares Nacionais**. Matemática. 1º e 2º ciclos. Brasília, DF, 1997.

BRASIL. Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica. **Parâmetros Curriculares Nacionais**. Matemática. 3º e 4º ciclos. Brasília, DF, 1998.

DUVAL, Raymond. **Semiósis e Pensamento Humano: Registros semióticos e aprendizagens intelectuais.** (Sèmiosis et Pensèe Humaine: Registres Semiotiques et Apprentissages Intellectueis). (Fascículo I)/ Raymond Duval. Tradução: Lênio Fernandes Levy e Marisa Rosâni Abreu da Silveira - São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

DUVAL, Raymond. **Ver e ensinar Matemática de outra forma – Entrar no modo matemático de pensar:** os registros de representações semióticas. São Paulo: PROEM, 2011

GITIRANA, Verônica; CAMPOS, Tânia Maria Mendonça; MAGINA, Sandra e SPINILLO, Alina. **Repensando Multiplicação e Divisão**. Contribuições da Teoria dos Campos Conceituais. São Paulo: PROEM, 2014.

MONTENEGRO, Juliana Azevedo. **Identificação, conversão e tratamento de registros de representações semióticas auxiliando a aprendizagem de situações combinatórias** (Tese de Doutorado) Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica da UFPE. Recife: UFPE. 2018

PESSOA, Cristiane; BORBA, Rute. O raciocínio combinatório do início do Ensino Fundamental ao término do Ensino Médio. **Anais**... 10 Encontro Nacional de Educação Matemática, Salvador, 2010.

VERGNAUD, Gérard. Psicologia do desenvolvimento cognitivo e didática das matemáticas Um exemplo: as estruturas aditivas. **Análise Psicológica, 1**. 1986. p. 75-90.

VERGNAUD, Gerárd. A Teoria dos Campos Conceptuais. In. BRUM, Jean, (org.) **Didáctica das Matemáticas**. Horizontes Pedagógicos, Lisboa, 1996.

Recebido em: 06 de abril de 2019.

Aprovado em: 29 de agosto de 2020.