Sociedade Brasileira de Educação Matemática

emr

Ensino de Sistemas Lineares: uma Proposta Metodológica Utilizando a Exploração, Proposição e Resolução de Problemas

Teaching Linear Systems: a Methodological Proposal Using Problem Exploration, Posing and Solving

Fabíola da Cruz Martins[1]
Silvanio de Andrade[2]

Resumo

Este artigo objetivou discutir as implicações da utilização da Exploração-Proposição-Resolução de Problemas no ensino-aprendizagem de Sistemas Lineares. Para isso, apresentamos uma proposta metodológica com quatro atividades que buscam contemplar as ideias essenciais de Sistemas Lineares, utilizando a Resolução de Problemas como metodologia de ensino, aliada às Representações Múltiplas de Álgebra. Esta proposta foi utilizada na pesquisa de Mestrado[3] da primeira autora, realizada em uma turma de Licenciatura em Matemática. A pesquisa aponta que, inicialmente, os licenciandos se mostraram inseguros frente ao conteúdo, tendo dificuldades nos métodos de resolução de sistemas, na resolução de um problema, dentre outros, o que foi se modificando ao longo da exploração dos problemas. Assim, conclui-se que as atividades possibilitaram reflexões sobre o ensino de Sistemas, tais como a importância de promover a transição entre as representações e utilizá-las como aliadas ao ensino, contribuindo assim para uma nova postura frente ao ensino de Sistemas Lineares.

Palavras-chave: Álgebra escolar. Representações Múltiplas de Álgebra. Exploração-Proposição-Resolução de Problemas. Ensino de Matemática.

Abstract

This article aimed to discuss the implications of the use of Problem Solving, Posing and Exploration in the teaching and learning of Linear Systems. For this, we present a methodological proposal with four activities that seek to contemplate the essential ideas of Linear Systems, using Problem Solving as a teaching methodology, allied to the Multiple Representations of Algebra. This proposal was used in the first author's Master's research, carried out in a Mathematics Degree class. The research points out that, initially, the problems, the licensors, then the content of an insurance, the methods throughout the systems, having been difficulties in the front of exploration resolution in solving the problem, among others. Thus, it is concluded that the activities are taught about teaching, teaching how the importance of promoting teaching Systems among teaching practices and teaching them as allies to such, intensified for a new attitude towards Linear Systems.

Keywords: School Algebra. Multiple Representations of Algebra. Problem Exploration-Posing-Solving. Teaching mathematics.

1 Introdução

Os Sistemas de Equações Lineares ou Sistemas Lineares – nomenclatura utilizada neste trabalho, constituem um tópico de grande importância dentro da Álgebra, uma vez que

[1] Doutoranda em Ensino de Ciências e Educação Matemática pelo Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual da Paraíba (PPGECEM/UEPB). Campina Grande, PB, Brasil. E-mail: fabiolaa--@hotmail.com - Orcid: https://orcid.org/0000-0001-6838-9671

[2] Doutor em Educação. Universidade Estadual da Paraíba. Campina Grande, PB, Brasil. E-mail: silvanio@usp.br - Orcid: https://orcid.org/0000-0002-1490-812X

[3] Esse texto traz partes de Martins (2019), por tratar-se de um recorte da pesquisa.

podem possibilitar a modelagem de diversos problemas, como também, podem ser utilizados como ponto de partida para teorias matemáticas relevantes e atuais. Seu estudo é introduzido desde os anos finais do ensino fundamental, sendo aprofundado no ensino médio e em disciplinas de cursos de nível superior da área de exatas, tais como: Matemática, Física, Ciências da Computação, Engenharias e outras.

O conteúdo Sistemas Lineares é amplo, abrange diversas áreas e compreende um vasto campo de aplicações. Contudo, é ao mesmo tempo um estudo que não envolve, em sua essência, conceitos abstratos. No entanto, embora pareça um conteúdo básico, enfrenta-se muitas dificuldades no ensino-aprendizagem de Sistemas Lineares, principalmente, no que diz respeito ao seu significado, aos processos de resolução, à tradução da linguagem verbal para a linguagem matemática e à natureza de sua solução (PONTE; BRANCO; MATOS, 2009).

Este artigo apresenta resultados da Dissertação de Mestrado da primeira autora, a qual versou sobre o “Ensino-aprendizagem de Sistemas Lineares na formação do Professor de Matemática via Exploração, Resolução e Proposição de Problemas” (MARTINS, 2019). A pesquisa desenvolvida buscou diferenciar-se das pesquisas existentes, ao desenvolver uma Oficina com os alunos da Licenciatura em Matemática, procurando proporcionar, por meio das Representações Múltiplas de Álgebra, novas ideias de Sistemas Lineares, utilizando a metodologia de ensino-aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas.

Acredita-se que uma das decisões mais importantes que o professor realiza regularmente, em sua prática docente, incide sobre as atividades que propõe em sala, uma vez que é em torno delas que o professor vislumbra o alcance de seus objetivos pedagógicos. Essas atividades são ancoradas, na maioria das vezes, no livro didático adotado pela escola, em manuais escolares e até mesmo em *sites* da internet. No entanto, a forma como essas atividades estão estruturadas nem sempre colaboram com as necessidades dos alunos e nem para o alcance dos objetivos do professor.

Diante disso, este artigo tem como objetivo discutir as implicações da utilização da Exploração, Proposição e Resolução de Problemas no ensino-aprendizagem de Sistemas Lineares. No decorrer deste trabalho, temos o intuito de despertar o olhar crítico e reflexivo de professores e futuros professores de Matemática para a importância dessas atividades, desde o momento da sua elaboração até a sua prática, como também, lhes proporcionar uma alternativa metodológica para o ensino de Sistemas Lineares e fundamentar o estudo de pesquisadores em Educação Matemática.

2 O Ensino de Sistemas Lineares

A utilização de Sistemas Lineares para a resolução de determinados problemas não é algo recente. Como referendado em Zuin e Santos (2019), registros antigos de povos Babilônios, Egípcios, Chineses, Gregos, Hindus e Árabes evidenciam traços dessa utilização. Mesmo antes da Álgebra tornar-se um campo de estudo da Matemática, indícios apontam a utilização de técnicas aritméticas para solucionar problemas modeláveis através de sistemas de equações com várias incógnitas.

De acordo com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC, 2017), o estudo de Sistemas Lineares $2x2$ inicia-se na Educação Básica, a partir do 8º ano do ensino fundamental, tendo como objetivo o desenvolvimento das habilidades de "resolver e elaborar problemas relacionados ao seu contexto próximo, que possam ser representados por Sistemas de Equações de 1º grau com duas incógnitas e interpretá-los, utilizando, inclusive, o plano cartesiano como recurso". (BRASIL, 2017, p. 265).

De acordo com Ponte, Branco e Matos (2009, p. 151), as principais dificuldades encontradas pelos alunos da Educação Básica podem ser agrupadas em três grandes categorias: i) Compreender a noção de um sistema de equações e a natureza de sua solução; ii) Compreender os processos de resolução de sistemas de equações e executá-los corretamente até obter a solução; iii) Ser capaz de resolver problemas dados por enunciados verbais, traduzindo as condições dadas por um sistema de equações e interpretando a solução do sistema de acordo com as condições dadas.

Na primeira categoria, os autores tratam de dois aspectos importantes: a noção de sistema e a natureza da solução. Acreditamos que os alunos persistem com essas dificuldades por não realizarem conexões entre o conteúdo de Sistemas Lineares e os conhecimentos já adquiridos em Álgebra.

Sobre a natureza da solução, geralmente, esse estudo é voltado para a discussão de sistemas, com uma classificação superficial entre Sistema Impossível, Possível e Determinado e Possível Indeterminado. Compreendemos que a apresentação da classificação de sistemas, apenas de modo expositivo, sem que o aluno passe por experiências que possibilite a compreensão e a retirada de conclusão a respeito da classificação do sistema, é um forte aliado a essa dificuldade.

Em um Sistema Linear $2\ x\ 2$, podemos fazer a classificação de sistemas de maneira trivial, apenas observando a representação gráfica do sistema. No entanto, nem sempre é tão simples que os alunos façam essa classificação por outros meios, acarretando, assim, as dificuldades apontadas por Ponte, Branco e Matos (2009).

Na segunda categoria, os autores destacam as dificuldades relacionadas à compreensão e à execução correta dos processos de resolução de sistemas de equações. Como os autores tratam de execução, acreditamos que eles se referem aos processos algébricos que são tradicionalmente utilizados e propostos pelos livros didáticos, como o método da substituição, adição, comparação, escalonamento, regra de Cramer, e outros.

Assim, buscamos evidenciar, nesta pesquisa, que todos estes métodos são plausíveis na resolução de Sistemas Lineares. No entanto, esta resolução deve ir além da execução de um método de solução. É preciso que eles sejam vistos pelos alunos como aliados no processo de resolução e não como mais um procedimento algébrico a ser memorizado e executado mecanicamente.

Na terceira categoria, os autores mencionam as dificuldades na transição da linguagem verbal para a linguagem algébrica, bem como destacam obstáculos no que se refere à interpretação da solução no contexto do problema. Mesmo sabendo que com exercícios e repetição as dificuldades voltadas à resolução de sistemas possam ser superadas, isso não é possível nesta categoria, uma vez que exige do aluno criatividade e compreensão sobre a natureza de um sistema linear.

Desse modo, destacamos, neste artigo, a importância de abordar este conteúdo através da Resolução de Problemas, pois acreditamos que por meio de experiências em situações que façam sentido para o aluno, ele pode atribuir um maior significado na atividade de transição da linguagem verbal para a linguagem algébrica.

De acordo com Ponte, Branco e Matos (2009) uma boa alternativa para promover o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas e da comunicação matemática dos alunos é a Resolução de Problemas. Esses autores sugerem que os problemas podem ser formulados, inicialmente, em linguagem natural e, por fim, discutidos com toda a turma.

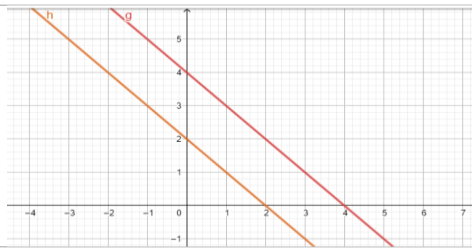
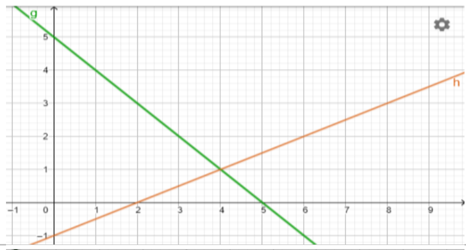
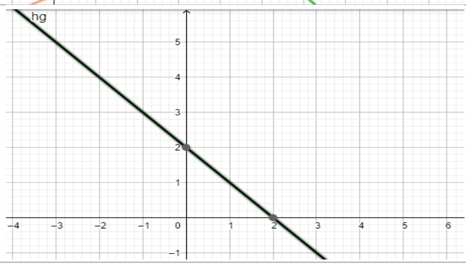
As Orientações Curriculares para o Ensino Médio (2006) recomendam, no estudo de Sistemas Lineares, um trabalho que vá além da técnica de resolução de sistemas, colocando a Álgebra sob o olhar da geometria:

> A resolução de um sistema $2 X 2$ de duas equações e duas variáveis pode ser associada ao estudo da posição relativa de duas retas no plano. Com operações elementares simples, pode-se determinar a existência ou não de soluções desse sistema, o que significa geometricamente os casos de intersecção/coincidência de

retas ou paralelismo de retas (BRASIL, 2006, p.77-78).

Assim, a partir da interpretação geométrica de um Sistema Linear, podemos observar sua solução, discussão e classificação, sendo essa mais uma alternativa a ser considerada no ensino de Sistemas Lineares. Para melhor compreensão, exemplificamos, no quadro 1, as três possibilidades de interpretação geométrica de Sistemas Lineares $2x2$.

Quadro 1 – Interpretação Geométrica e Classificação de Sistemas Lineares $2x2$

Interpretação Geométrica e Classificação de Sistemas Lineares 2x2		
Sistema Impossível (SI) As retas não se interceptam, logo, são paralelas.	$\begin{cases} x+y=4 \\ x+y=2 \end{cases}$	
Sistema Possível e Determinado (SPD) As retas se interceptam em um único ponto, logo, são concorrentes.	$\begin{cases} x+y=5 \\ x-2y=2 \end{cases}$	
Sistema Possível e Indeterminado (SPI) As retas se interceptam em infinitos pontos, logo, são coincidentes.	$\begin{cases} x+y=2 \\ 2x+2y=4 \end{cases}$	

Fonte: Martins (2019, p.46)

Pelo quadro 1, podemos perceber que a representação geométrica facilita a compreensão da classificação. No primeiro gráfico, temos duas retas que nunca irão se interceptar, o que nos faz entender o porquê deste sistema ser classificado como impossível. No segundo gráfico, temos duas retas que se interceptam em um único ponto, tornando visível que o ponto em comum é a solução do sistema possível e determinado. No terceiro gráfico, temos duas retas coincidentes, que se interceptam em infinitos pontos, logo, fica perceptível que esse sistema é possível e indeterminado.

Da mesma forma, podemos compreender a classificação dos Sistemas Lineares $3x3$, no entanto, esta visualização não é mais no plano ($\mathbb{R}^2$), mas no espaço ($\mathbb{R}^3$). Esse tipo de sistema tem uma maior quantidade de representações geométricas, sobretudo, para o Sistema Linear Impossível, que dispõe de quatro possibilidades de representação.

Diante das dificuldades expostas por Ponte, Branco e Matos (2009) e considerando as habilidades destacadas pela BNCC (2017) e as Orientações Curriculares para o Ensino Médio (2006), percebemos a necessidade de descentralizar o ensino de Sistemas Lineares dos procedimentos algébricos e considerar as outras formas de representação como aliadas ao seu ensino.

3 Proposta metodológica para o ensino de Sistemas Lineares através da Exploração, Proposição e Resolução de Problemas

As atividades aqui apresentadas foram desenvolvidas na pesquisa de Mestrado da primeira autora, tendo como público alvo alunos do 5º período do curso de Licenciatura em Matemática de uma universidade pública localizada na Paraíba.

A elaboração das atividades e o planejamento de seu desenvolvimento, no que diz respeito às Representações Múltiplas de Álgebra, foram realizados à luz de Friedlander e Tabach (2001), os quais apresentam quatro representações: verbal, numérica, gráfica e algébrica. E ao tratar da Exploração, Proposição e Resolução de Problemas, as atividades tiveram embasamento teórico em Van de Walle (2009), Onuchic e Allevato (2011) e Andrade (2017), em que a partir das concepções a seguir, elucidaremos nosso aporte teórico.

De acordo com Van de Walle (2009), "problema" é qualquer tarefa ou atividade para a qual não se tem métodos ou regras prescritas ou memorizadas, nem a percepção de que haja um método específico para chegar à solução correta. Onuchic e Allevato (2011, p. 81) definem "problema" como "tudo aquilo que não se sabe fazer, mas que se está interessado em fazer".

Nessa perspectiva, Andrade (2017) entende o Problema como um projeto, uma questão, uma tarefa, uma situação em que: i) o aluno não tem ou não conhece algum processo que lhe permita de imediato encontrar a solução; ii) o aluno deseja resolver, explorar ou realizar algum trabalho efetivo; iii) introduz-se e/ou se leva o aluno à realização de algum trabalho efetivo. Além disso, Andrade (2017) orienta que a Exploração, Proposição e Resolução de Problemas precisa ser entendida como uma proposta aberta, embora não solta, para que, dessa forma, seja possível compreender todos os aspectos que configuram o cotidiano da sala de aula.

Assim, tratamos a Resolução de Problemas como uma metodologia de ensino, um meio para se ensinar Matemática, a qual deve encarar o problema como algo desafiador, em que não se conheça nenhum procedimento imediato para a sua resolução.

No quadro 2 abaixo, apresentamos um roteiro com uma síntese dos tópicos abordados nas atividades desenvolvidas na Oficina, expondo o conteúdo estudado, as ideias matemáticas trabalhadas e os objetivos pretendidos.

Quadro 2 – Síntese das atividades desenvolvidas na abordagem de Sistemas Lineares

Atividade	Ideias matemáticas	Objetivos pretendidos
1. Calculando as calorias	Natureza da solução de equações lineares.	• Representar problema por meio de equação linear com duas incógnitas. • Explorar o conceito de soluções de uma equação linear com duas incógnitas. • Introduzir conversa sobre Sistemas Lineares.
2. A venda de limões e maçãs	Métodos de resolução de Sistemas Lineares 2x2.	• Explorar diferentes métodos na resolução de Sistemas Lineares 2x2. • Promover a aprendizagem de Sistemas Lineares através da Proposição de Problemas.
3. A venda de figurinhas	Discussão e classificação de Sistemas Lineares.	• Aprofundar discussão sobre Sistemas Lineares $2x2$; • Classificar Sistemas Lineares utilizando novos problemas.
4. Propondo problemas	Transição entre as representações múltiplas de Sistemas Lineares.	• Estimular a transição entre as representações de Sistemas Lineares; • Promover o aprendizado de Sistemas Lineares através da Proposição de Problemas;

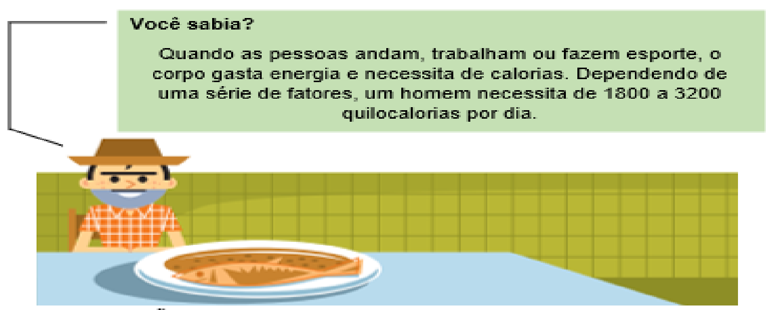
Fonte: Martins (2019)

A seguir, expomos cada atividade descrita no quadro 2, assim como uma breve apresentação. Vale salientar que a Oficina foi composta por seis atividades e quatro seminários com atividades elaboradas pelos alunos. A descrição completa e discussão do desenvolvimento de cada atividade da Oficina encontra-se em Martins (2019).

Figura 1 – Atividade: Calculando as calorias

Primeira parte do problema

Calculando as calorias



Rui gosta de feijão e de peixe e tem facilidade para obter esses alimentos. Ele procura ingerir 1880 Kcal por dia, tomando como base os dois alimentos. Olhando em uma tabela, verificou que:
• 100 g de feijão fornecem 330 Kcal.
• 100 g de peixe fornecem 70 Kcal.
Ele concluiu que:
• 1 grama de feijão fornece 3,3 Kcal.
• 1 grama de peixe fornece 0,7 Kcal.
Para ter o total de 1880 Kcal, o que Rui pode fazer?

Fonte: Atividade adaptada de Brasil (2008). Manteve-se a imagem.

A atividade 1 foi dividida em duas partes, na primeira parte, esperou-se que os alunos traduzissem o problema da linguagem verbal para a linguagem algébrica, percebendo que existem inúmeras soluções para a composição desta refeição, podendo, dessa forma, representar a situação por meio de uma equação linear com duas variáveis e assim poderíamos discutir a natureza de sua solução.

Os alunos iniciaram a investigação, procurando o valor que satisfizesse as condições do problema. Dentre os valores encontrados, a professora percebeu que somente o aluno A3 havia encontrado a resposta que satisfazia o problema, e assim, ela o convidou para expor sua solução na lousa e explicar o seu raciocínio.

> ***A3:*** *Bem… eu fiz uma relação entre g e kcal para 100, 10 e 1. Em seguida, fui fazendo as somas, multiplicações, sempre obedecendo os valores correspondentes a 100, 10 e 1, até que encontrasse 1880 kcal.*
> ***P:*** *Qual o valor encontrado?*
> ***A3:*** *Na verdade, foram os valores, percebi que tinha 2 opções de cardápio. Ele poderia comer 470 g de feijão e 470 g de peixe, ou comer 400 g de feijão e 800 g de peixe.*

Nesse momento, a professora convidou a turma para calcular se os valores encontrados pelo colega satisfaziam o problema.

Como destacado por Friedlander e Tabach (2001), a utilização de valores numéricos é importante para uma primeira compreensão do problema e para a investigação de casos particulares, oferecendo uma ponte conveniente em relação à Álgebra.

Nessa abordagem, a professora foi questionando os alunos sobre outros valores para feijão e peixe que totalizassem 1880 kcal.

Na segunda parte, foi colocado o seguinte questionamento: Ao tentar resolver a situação, Rui descobriu que haveria muitas soluções para ela. Conforme comesse um tanto de feijão, ele teria que comer determinada quantidade de peixe para completar as Kcal. Dessa forma, Rui resolveu que comeria de peixe o dobro da quantidade que comesse de feijão. Nessas condições, quantos gramas de cada Rui deveria comer?

Com esse questionamento esperou-se que os alunos identificassem a informação dada como uma segunda equação com duas incógnitas que, juntamente com a equação do problema anterior, formaria um Sistema Linear e, dessa forma, introduziríamos a conversa sobre Sistemas Lineares.

No momento da exploração de problemas, pudemos perceber um primeiro avanço, uma vez que os alunos apresentaram um maior domínio na representação algébrica, utilizando esta como uma linguagem matemática para expressar a resolução do problema, não recorrendo imediatamente a tentativa e erro como no início da atividade proposta.

Na atividade apresentada na figura 2, buscou-se explorar diferentes métodos na resolução de Sistemas Lineares 2x2, como também, promover a aprendizagem de Sistemas Lineares através da Proposição de Problemas.

Figura 2 – Atividade: A venda de limões e maçãs

A venda de limões e maçãs

O seguinte problema foi inventado na Índia, por Mahavira, há mais de mil anos: "O preço de 9 limões e 7 maçãs é 107. O preço de 7 limões e 9 maçãs é 101. Responda rapidamente qual o preço de um limão e de uma maçã".

Observação: O valor foi pago em Rupia Indiana (INR).

Fonte: Atividade adaptada de Ponte, Matos e Branco (2009).

Um diferencial desta atividade foi trabalhar a Proposição de Problemas de forma mais intensa, em que, ao final da atividade, foi proposto aos alunos formar duplas e, diante da situação trabalhada, criar novos problemas, como podemos ver no quadro 3. Esta etapa demandou um tempo maior, não sendo uma ferramenta fácil de ser trabalhada. Após os problemas propostos, também houve a etapa de Exploração e Resolução de Problemas.

Andrade (2017) também tem observado essa dificuldade em suas pesquisas. Para o autor "(...) isso advém de uma prática de sala de aula que tem sido concentrada apenas na resolução de problemas oriunda de problemas propostos exclusivamente pelo professor e nunca pelos alunos". (ANDRADE, 2017, p. 388).

Quadro 3 – Problemas elaborados pelos alunos

Problema	**Conteúdo**
1. Mahavira fez a compra dos 16 limões e das 16 maçãs. No entanto, ao chegar em casa teve uma surpresa: ¼ dos limões e ½ das maças vieram estragadas. Como a feirinha era distante de sua casa ele não voltou à feira para trocá-las. De quanto foi o prejuízo de Mahavira?	Operações com frações
2. No final da feira, o vendedor baixou o preço das frutas da seguinte forma: Maçã R$ 0,80 e Limão R$ 0,35. Elder fez uma compra de 18 unidades de frutas e pagou R$ 9,00. Quantas maçãs e quantos limões foram comprados por Elder?	Sistemas de equações
3. Lilian ligou para o hortifruti e pediu que a enviassem 10 maçãs. Para que aumentasse sua duração, ela recomendou que mandassem metade das maças, verdes e a outra metade, maduras. Ao chegar as frutas, Lilian pegou duas maçãs, porém, não sabia diferenciar, qual era verde e qual era madura. Qual a probabilidade de pelo menos uma estar madura?	Probabilidade
4. Temos três caixas de frutas. Uma contém apenas maçãs, outra contém apenas limões, e a última possui as duas frutas misturadas. Todas as caixas estão etiquetadas: uma diz "maçãs"; outra diz "limões"; a última diz "maçãs e limões". Porém, nenhuma das caixas está etiquetada corretamente. Como você poderia etiquetá-las corretamente, se só lhe é permitido pegar uma fruta de apenas uma das caixas?	Raciocínio lógico

Fonte: Martins (2019, p. 97)

Na atividade apresentada na figura 3, objetivou-se aprofundar a discussão sobre Sistemas Lineares 2x2 e classificar Sistemas Lineares utilizando novos problemas.

Figura 3 – Atividade: A venda de figurinhas

Na figura abaixo, temos três cartelas com quatro adesivos e seus respectivos preços. Sabendo que o preço de uma cartela é a soma dos preços de seus adesivos, qual é o preço da quarta cartela?

Fonte: Atividade adaptada de OBMEP (2016).

Pelos primeiros registros dos alunos na resolução desse problema, pudemos perceber o processo de codificação e descodificação explicado por Andrade (2017). Esse processo é considerado de grande importância na resolução de problemas, sendo consideradas como ferramentas essenciais no desenvolvimento do processo como um todo.

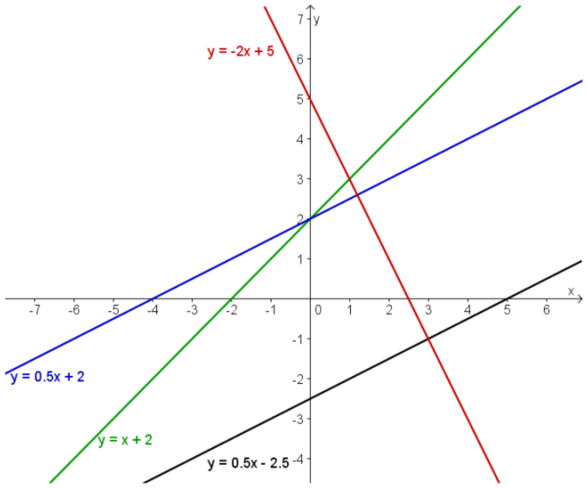
A seguir, destacamos questionamentos realizados pela professora no decorrer da atividade, a qual tinha como objetivo introduzir a discussão de Sistemas Lineares, pois, apresentava uma condição que tornava o sistema impossível. “E se a cartela com seis adesivos tivesse apenas estrelas, quanto custaria? Qual o adesivo mais caro? E o mais barato? Quanto custa cada adesivo? E se um adesivo de estrela custasse 4 reais, qual seria o preço dos outros adesivos?” A seguir, elucidamos essa discussão por meio do diálogo dos alunos:

A5: *Chegamos a uma impossibilidade!*
P: *Por que?*
A5: *Como é que duas equações diferentes vão ser igual a 8?*
P: *Porque duas equações diferentes são iguais a 8 podemos concluir uma impossibilidade?*
A10: *Não! Pois seria possível se y fosse igual a 0.*
A6: *Pela primeira e terceira equação podemos garantir a impossibilidade, pois se dividirmos a terceira equação por 2, teremos equações iguais que totalizam valores diferentes.*
P: *Exatamente! Então o que isso significa?*
A2: *Que esse sistema é impossível.*
P: *O que mais vocês observaram?*
A1: *Se alterar o valor de qualquer figura nós chegamos a essa impossibilidade.*
P: *Vocês concordam com isso?*
A12: *Sim! Só daria certo se fosse um Sistema Possível e indeterminado, aí teríamos uma quantidade infinita de valores para essas figuras.*

Mediante o diálogo, os alunos foram percebendo e exemplificando a impossibilidade do sistema nas cartelas, sendo visualmente óbvio que teríamos um Sistema Impossível. Desse modo, a discussão de um sistema linear foi realizada mediante sua resolução, isto é, ao compreendermos que ele pode ter uma, infinitas ou nenhuma solução. Diante disso, pudemos classificar os Sistemas Lineares, em geral, SI, SPD e SPI.

A atividade apresentada na figura 4 foi apresentada sob um formato diferente ao qual os alunos estavam habituados, pois foi entregue uma representação gráfica, em que era possível visualizar diversos Sistemas Lineares. Esta foi uma atividade que teve como objetivo estimular a transição entre as representações de Sistemas Lineares e promover o aprendizado de Sistemas Lineares através da Proposição de Problemas.

Figura 4 – Atividade: Propondo Problemas



Fonte: Atividade adaptada de Ponte, Matos e Branco (2009).

Nessa atividade, a turma recebeu a imagem acima e lhes foi proposto que se dividissem em três grupos e que, de acordo com o gráfico recebido, cada grupo representasse três sistemas, de modo que fossem SPD, SPI e SI. Em seguida, foi solicitado que cada grupo escolhesse um tipo de sistema e criasse um problema. No quadro 4 a seguir, apresentamos os problemas propostos pelos alunos:

Quadro 4 – Problemas elaborados pelos alunos

Problema	Representação Algébrica
Carlos e Joana são um casal que namoram há bastante tempo. Ambos têm filhos, porém, Carlos tem dois filhos a mais que Joana. A soma da quantidade de filhos de Carlos com o dobro da quantidade de filhos de Joana é igual a cinco. Quantos filhos cada um tem?	$\begin{cases} \boldsymbol{x - y = -2} \\ \boldsymbol{2x + y = 5} \end{cases}$
Numa determinada *bomboniere* da cidade, a soma do preço de duas cartelas de chiclete mais 1 trufa totaliza R$ 5,00. Sabendo que metade da cartela de chiclete custa R$ 2,00 a menos que a trufa, quanto custa a cartela inteira?	$\begin{cases} \boldsymbol{0,5x - y = -2} \\ \boldsymbol{2x + y = 5} \end{cases}$
Carlos foi à xerox da universidade e fez três impressões, sendo uma colorida e duas preto e branco e pagou um valor de R$ 5,00. Ao perceber que a impressão colorida era R$ 2,00 mais cara que a preto e branco, Carlos se arrependeu amargamente, pois deveria ter imprimido todas as folhas em preto e branco. Quanto custava cada tipo de impressão?	$\begin{cases} \boldsymbol{2x + y = 5} \\ \boldsymbol{-x + y = 2} \end{cases}$

Fonte: Martins (2019)

Nesta atividade, a turma ficou surpresa, pois estavam habituados a iniciarem a aula com um problema, no entanto, fizemos diferente, eram eles que precisariam propor o problema. Os alunos mencionaram que nunca haviam realizado atividade como essa, parecia que estava tudo ao contrário, pois eles partiram de um gráfico, encontraram equações, chegaram aos sistemas e só depois iriam elaborar o problema. No entanto, não tinha algo ao contrário, apenas estávamos retirando-os de suas zonas de conforto, uma vez que a proposição de problemas pode acontecer em diversos momentos, antes, durante e depois do processo de resolução e exploração de problemas (ANDRADE, 2017).

4 Considerações Finais

Este artigo teve como objetivo discutir as implicações da utilização da Exploração, Proposição e Resolução de Problemas no ensino-aprendizagem de Sistemas Lineares. Para tanto, apresentamos e discutimos um conjunto de atividades trabalhadas com Licenciandos em Matemática, as quais contemplaram as Ideias de Sistemas Lineares através da Exploração, Proposição e Resolução de Problemas como metodologia de ensino.

Estas atividades podem ser utilizadas pelos professores na Educação Básica, devendo ser adaptadas ao nível de ensino ao qual pretende-se trabalhar, como também, fundamentar e auxiliar o estudo de pesquisadores em Educação Matemática sobre Sistemas Lineares, Ensino de Álgebra, Resolução de Problemas, dentre outros temas.

Ao realizar estas atividades com os licenciandos em Matemática, percebeu-se que os alunos ainda apresentavam dificuldades no conteúdo, uma vez que na resolução dos problemas, a maioria dos alunos não visualizavam o Sistema Linear como uma forma para resolver o problema, sempre recorrendo a tentativa e erro.

No entanto, no decorrer das atividades, pudemos perceber um significativo avanço, no qual os alunos passaram a apresentar domínio na representação algébrica, utilizando esta como uma linguagem matemática para expressar a resolução do problema, não recorrendo imediatamente a tentativa e erro como no início da Oficina.

A respeito da Exploração e Proposição de Problemas, pudemos identificar, em nossa pesquisa, a mesma percepção que aponta Andrade (2017) sobre as pesquisas desenvolvidas nos últimos anos. De acordo com o autor, no primeiro momento, emerge muito mais a Resolução de Problemas, no segundo, a Exploração e, no terceiro, a Proposição, sendo ela a ferramenta mais difícil de ser trabalhada. De acordo com o observado e mediante a fala dos alunos, percebemos que a Proposição de Problemas sempre era a etapa mais demorada pelo fato dos alunos não estarem habituados a criar problemas, mas a apenas resolvê-los.

Por fim, os resultados evidenciaram que as Representações Múltiplas de Álgebra e a transição entre elas, favorecem uma aprendizagem de Sistemas Lineares com mais compreensão. Conclui-se, assim, que a metodologia de ensino-aprendizagem de Matemática através da Exploração, Proposição e Resolução de Problemas contribui para a construção de uma nova postura frente ao ensino de Sistemas Lineares.

Referências

ANDRADE, S. Um caminhar crítico reflexivo sobre Resolução, Exploração e Proposição de Problemas Matemáticos no Cotidiano da Sala de Aula. *In:* ONUCHIC, L. R. *et al.* (org.). **Perspectivas para Resolução de Problemas**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2017. cap. 12, p. 355-396.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular:** educação é a base. Brasília, DF, 2017.

______. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Orientações curriculares para o Ensino Médio:** ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília: MEC/SEB, 2006.

______. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Programa Gestão da Aprendizagem Escolar** - Gestar II. Matemática: Atividades de Apoio à Aprendizagem 6 - AAA6: matemática nas migrações e em fenômenos cotidianos (Versão do Aluno). Brasília: MEC/SEB, 2008.

FRIEDLANDER, A.; TABACH, M. Promoting Multiple Representations. *In:* CUOCO, A. A.; CURCIO, F. R. (org.). **The roles of representation in school mathematics.** Reston: NCTM, 2001, cap. 14, p. 173-185.

MARTINS, F. C. **Ensino-aprendizagem de Sistemas Lineares na Formação do Professor de Matemática via Exploração, Resolução e Proposição de Problemas**. 139 p. Dissertação (Mestrado Acadêmico em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual da Paraíba (UEPB), Campina Grande, 2019.

OBMEP. **Olímpiada brasileira de matemática das escolas públicas.** Prova 1º Fase 2016 - Nível 1. Disponível em: http://www.obmep.org.br/index.htm. Acesso em março de 2018.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. **Bolema:** Boletim de Educação Matemática, v. 25, n. 41, Rio Claro (SP): UNESP – IGCE, p. 73-98, dez. 2011. Disponível em: https://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/5739. Acesso em junho de 2021.

PONTE, J. P.; BRANCO, N; MATOS, A. **Álgebra no ensino básico.** Lisboa: Ministério da Educação, DGIDC, 2009.

VAN DE WALLE, J. A. **Matemática no ensino fundamental:** formação de professores e aplicação em sala de aula. / John A. Van de Walle; tradução Paulo Henrique Colonese. - 6. ed. Porto Alegre: Artmed, 2009.

ZUIN, E. S. L.; SANTOS, C. M. **Sistemas de equações lineares:** entre a História da Matemática e a História da Educação Matemática /Elenice de Souza Lodron Zuin, Célio Moacir dos Santos. – São Paulo: Editora Livraria da Física, 2019.