

MODELAGEM MATEMÁTICA NO ENSINO MÉDIO: UMA POSSIBILIDADE DE APRENDIZAGEM A PARTIR DE CONTAS DE ÁGUA

MATHEMATICAL MODELING IN HIGH SCHOOL: POSSIBILITY OF LEARNING VIA WATER BILLS

Márcia Jussara Hepp Rehfeldt

Universidade do Vale do Taquari/ Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas,
mrehfeld@univates.br

Italo Gabriel Neide

Universidade do Vale do Taquari/ Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas,
italo.neide@univates.br

Wolmir José Böckel

Universidade do Vale do Taquari/ Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas,
wjbockel@univates.br

Ana Paula Broilo

Universidade do Vale do Taquari/ Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas,
anapaulabroilo@gmail.com

Isabel Pisching

Universidade do Vale do Taquari/ Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas,
beelpisc1@gmail.com

Camila Aparecida Heinen

Universidade do Vale do Taquari/ Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas,
camilaheinen@gmail.com

Rosilene Inês König

Universidade do Vale do Taquari,
rosilene@universo.univates.br

Resumo

Este trabalho tem como objetivo relatar os resultados de uma prática de Modelagem Matemática desenvolvida em 2016, com alunos do 2º ano do Ensino Médio Politécnico de uma escola pública, localizada do Rio Grande do Sul. Os estudos abrangeram uma investigação acerca dos custos do consumo de água concedida pela prefeitura local que, posteriormente, foram comparados às cobranças de outra companhia, com o intuito de proporem critérios de escolha entre as duas companhias de fornecimento de água. O trabalho foi desenvolvido por um grupo de professores pesquisadores com alunos do 2º ano do Ensino Médio, sendo que estes foram organizados em grupos. Os resultados

obtidos apontam que, inicialmente, os alunos apresentaram dificuldades em obter um modelo matemático que representasse a relação entre o consumo e o valor pago pela água. Entretanto, por meio da intervenção dos professores, os alunos, de forma colaborativa, obtiveram resultados satisfatórios no que tange à representação dos modelos matemáticos. Os professores atuaram como mediadores, de forma a objetivar que os alunos fossem os protagonistas. Após a prática, percebeu-se que os alunos, por meio da Modelagem Matemática, desenvolveram interesse, curiosidade e valorização da Matemática. Além disso, observou-se que a Modelagem Matemática possibilitou aos alunos um pensar crítico e criativo, favorecendo sua autonomia e independência.

Palavras-chave: Ensino Médio Politécnico; Modelagem Matemática; Custo de água.

Abstract

The present work aims to report the results of a Mathematical Modeling practice developed in 2016, with students of the 2nd year of a public Polytechnic School located in the state of Rio Grande do Sul. The studies covered an investigation about the costs of water consumption afforded by the local municipality and then compared to the charges of another company, in order to propose criteria of choice between the two water supply companies. The work was developed by a group of research professors with 2nd year students and the class was organized in groups. The results show that, initially, the students presented difficulties in obtaining a mathematical model that represented the relation between consumption and the value paid for water. However, through the intervention of the professors, the students, in a collaborative way, obtained satisfactory results in terms of mathematical models representation. The professors acted as mediators, in order to objectify that the students were the protagonists. After the practice, it was noticed that the students developed interest, curiosity and valorization of Mathematics. In addition, it was observed that Mathematical Modeling enabled students to think critically and creatively, favoring their autonomy and independence.

Key-words: Polytechnic High School; Mathematical Modeling; Cost of water.

Introdução

No contexto do ensino tradicional, que, em geral, prima por cumprir o programa da disciplina, percebe-se, muitas vezes, dificuldade e desinteresse dos alunos em associar os conteúdos da sala de aula com o cotidiano. Também se observam tendências de o professor continuar ministrando aulas sem promover mudanças na sua forma de ensinar. Em função disso, pesquisadores vêm estudando novos métodos de ensino, os quais visam a essa mudança na forma de ensinar. Dentre esses métodos, a Modelagem Matemática, vem se destacando por ter como intuito, dentre outros aspectos, despertar o interesse do aluno pela Matemática (BISOGNIN, BISOGNIN, 2012; BIEMBENGUT, 2012; SILVEIRA, CALDEIRA, 2012; DUNCAN et al, 2015).

À luz da Modelagem Matemática e frente a essa realidade de ensino, desenvolve-se a pesquisa intitulada Tendências no Ensino, que tem como um dos seus objetivos explorar a Modelagem Matemática como uma metodologia alternativa de ensino da Matemática. Este grupo, vinculado ao Centro Universitário UNIVATES, é composto por três professores pesquisadores, três bolsistas de Iniciação Científica e uma professora de uma escola pública, localizada no Vale do Taquari, que voluntariamente integrou a pesquisa no decorrer dos anos de 2015 e 2016.

Por meio de reuniões quinzenais surgiu a ideia de, a partir de uma atividade realizada no ano de 2015, cujo tema foi “a água”, realizar uma nova intervenção, tendo como mote os modelos matemáticos que poderiam emergir a partir dos cálculos dos custos da água fornecida aos munícipes pela prefeitura local.

A partir desta explanação inicial, o objetivo deste artigo é apresentar os resultados de uma prática desenvolvida com alunos do 2º ano do Ensino Médio Politécnico, evidenciando os modelos matemáticos que emergiram durante o processo de Modelagem Matemática, a partir das contas de custo da água.

Percepção conceitual da Modelagem Matemática

No que concerne à caracterização de Modelagem Matemática, Kaiser e Sriraman (2006) apresentam cinco conceitos distintos, os quais podem ser conferidos na Figura 1.

Nome da perspectiva	Objetivos centrais	Relações com a perspectiva inicial	Segundo plano
Modelagem realista ou aplicada.	Objetivos pragmático-utilitários, ou seja: resolver problemas do mundo real, compreensão do mundo real, desenvolvendo competências de modelagem.	Perspectiva pragmática de Pollak.	Pragmatismo anglo-saxônico e matemática aplicada.
Modelagem contextual.	Objetivos relacionados ao assunto e psicológicos, ou seja, resolver problemas relacionados à palavra.	Abordagens de processamento de informação conduzindo sistemas de abordagem.	Resolução de problemas americanos, bem como a prática escolar diária e experiências psicológicas de laboratório.
Modelagem educacional; diferenciada em: a) Modelagem didática e b) Modelagem conceitual.	Objetivos pedagógicos e disciplinares: a) Estruturação dos processos de aprendizagem e seu desenvolvimento b) Introdução e desenvolvimento de	Perspectivas integrativas (Blum, Niss) e futuros desenvolvimentos da abordagem científico-humanístico.	Teorias didáticas e teorias de aprendizagem.

	conceitos.		
Modelagem sócio-crítica.	Objetivos pedagógicos como a compreensão crítica ao redor do mundo.	Perspectiva emancipatória.	Abordagens sócio-críticas da sociologia política.
Modelagem epistemológica ou teórica.	Objetivos teóricos, promovendo o desenvolvimento teórico.	Perspectiva científico-humanístico de Freudenthal .	Epistemologia romana.

Figura 1 - Conceitos de Modelagem Matemática

Fonte: Kaiser, Sriraman (2006, p. 304, tradução dos autores)002E

Pelo exposto no Quadro 1, pode-se verificar que os objetivos centrais da Modelagem Matemática estão relacionados à resolução de problemas reais, cotidianos, bem como a desígnios pedagógicos, no sentido de promover os processos de ensino e de aprendizagem da Matemática, podendo esta ocorrer de forma crítica, ao redor do mundo.

Nossa pretensão, neste estudo, também esteve relacionada à obtenção de modelos matemáticos e, de forma central, na promoção dos processos de ensino e de aprendizagem da Matemática, tomando como base, diferentes perspectivas. O intuito não é classificá-la, mas sim tomar alguns pressupostos das diferentes perspectivas, no sentido de ilustrar nossa compreensão acerca da Modelagem Matemática.

Kaiser, Schwarz, Tiedemann (2010) ilustram (FIGURA 2) que a Modelagem Matemática parte de uma situação do mundo real, em que uma estrutura é simplificada de tal forma a criar um modelo do mundo real, sendo este transformado em uma situação matemática. Depois, buscam-se modelos matemáticos que são resolvidos e a solução encontrada é comparada com a situação real. Essa, por sua vez, deve ser validada.

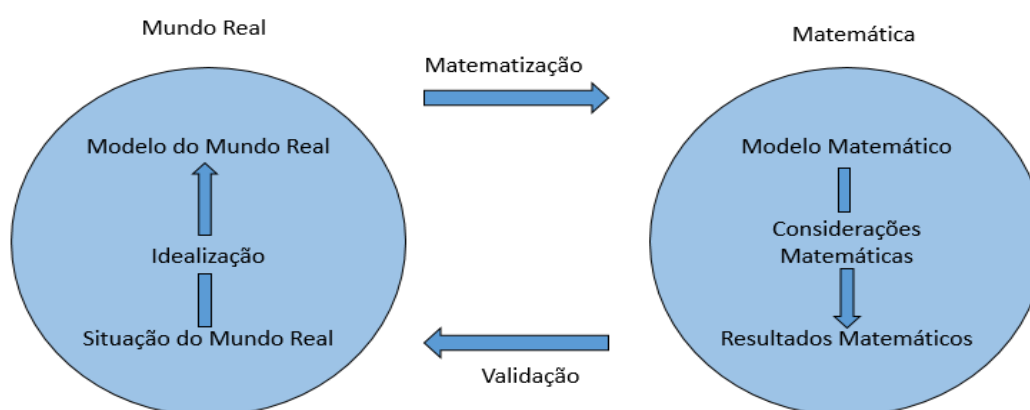


Figura 2 - Esquema que ilustra a Modelagem Matemática.

Fonte: Adaptado de Kaiser, Schwarz, Tiedemann (2010, p. 436).

Borromeu Ferri (2006) também esclarece que a Modelagem Matemática é vista como um ciclo, intitulado este processo como “ciclo da modelagem” (FIGURA 3). A exploração de uma situação-problema, nesta perspectiva, compreende uma série de passos, iniciados após a tarefa ser dada. O primeiro passo parte de uma situação real, a qual deve ser concebida de forma a construir um modelo para a mesma. Então ela é estruturada, idealizada e simplificada, agregando à situação investigada a matemática. Após essa etapa, a estrutura passa a ser vista do ponto matemático e é explorada matematicamente até a obtenção de resultados matemáticos. Posteriormente, esses resultados são interpretados na situação real, podendo ser validados ou não. Caso não forem validados, o ciclo recomeça; do contrário, o processo se dá por encerrado.

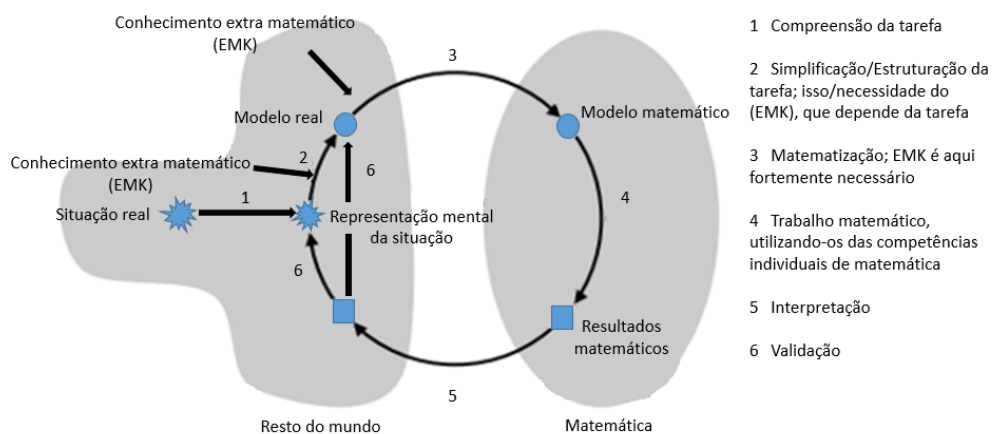


Figura 3 - Ciclo da modelagem

Fonte: Adaptado de Borromeu Ferri, Blum (2006, p. 92).

Neste sentido, a Modelagem Matemática se destaca por ser uma metodologia diferente das tradicionalmente exploradas nas aulas de Matemática. Por este método, os alunos são promovidos para que sejam sujeitos dos processos de ensino e de aprendizagem, proporcionando-lhes atividades instigadoras (BIEMBENGUT, 2014).

À luz dos referenciais anteriormente mencionados, apresenta-se, a seguir, os procedimentos metodológicos utilizados no desenvolvimento do trabalho, situando o leitor acerca da abordagem, dos procedimentos usados e de como ocorreu a intervenção pedagógica.

Metodologia do trabalho

O estudo desenvolvido apresentou uma abordagem qualitativa com características de estudo de caso. Para Bauer e Gaskell (2008), a pesquisa qualitativa lida com interpretação das realidades sociais, permitindo explorar opiniões e suas diferentes representações com relação à determinada questão.

De acordo com Marconi e Lakatos (2010, p. 269),

A metodologia qualitativa preocupa-se em analisar e interpretar aspectos mais profundos, descrevendo a complexidade do comportamento humano. Fornece análise mais detalhada sobre as investigações, hábitos, atitudes, tendências de comportamento.

Já um estudo de caso, segundo Moreira (2011, p. 86), “[...] pode variar e incluir tanto enfoques qualitativos como quantitativos”, e ele se foca em “[...] compreender e descobrir como as coisas ocorrem e por que ocorrem para talvez predizer algo”. Ainda para Gil (2002, p. 54), o estudo de caso tem como propósito,

Explorar situações da vida real cujos limites não estão claramente definidos, preservar o caráter unitário do objeto estudado, descrever a situação do contexto em que está sendo feita determinada investigação.

Entende-se que este estudo tem uma abordagem qualitativa, pois buscou-se analisar o desenvolvimento dos modelos matemáticos emergentes, observando o desempenho dos alunos em relação à familiarização com a Modelagem Matemática. Também pode ser considerado um estudo de caso, haja vista que o trabalho foi desenvolvido com uma turma específica de alunos, com suas particularidades, habilidades e trajetórias de aprendizagens. Possivelmente utilizando-se da mesma metodologia para outros grupos, diferentes resultados teriam emergido.

Procedimento da Intervenção

No ano de 2015 foi realizada a primeira intervenção pedagógica, quando os alunos trouxeram o tema água com a finalidade de suscitar subtemas, tanto matemáticos como não matemáticos para então, verificar a possibilidade de explorar a Modelagem Matemática. Ao fim desta primeira intervenção, houve a socialização dos trabalhos, momento em que surgiram várias questões, dentre elas uma relacionada ao valor pago pelo consumo da água. Após uma avaliação desse tema com os integrantes do grupo de pesquisa verificou-se a possibilidade de um planejamento de uma possível intervenção usando-se a Modelagem Matemática como metodologia.

Em 2016, foi retomada a ideia de explorar o tema sobre o consumo de água e seu custo com a mesma turma em que foi trabalhada a primeira investigação. Naquele momento, os alunos estavam cursando o segundo ano do Ensino Médio. O grupo de pesquisa estimou que as atividades pudessem ocorrer em três etapas. Para a primeira etapa, a professora titular solicitou aos alunos que trouxessem contas de água de suas residências, emitidas pela prefeitura do município (que será denominado de município 1). Assim, pretendia-se realizar a análise e coleta de dados e, a partir disso, explorar a elaboração de tabelas e gráficos, que posteriormente, permitiriam a emergência dos modelos matemáticos.

A segunda etapa foi conduzida do mesmo modo que a primeira, porém utilizando-se contas de água emitidas pela Companhia Riograndense de Saneamento (CORSAN) de outro município (município 2), trazidas por uma das bolsistas de Iniciação Científica e integrante da pesquisa. Já na terceira etapa, foi entregue aos alunos uma situação-problema, criada pelos professores pesquisadores e bolsistas assim descrita: “Se uma

família quisesse construir uma residência no município 1 (local onde residem os alunos) ou no município 2 (local onde reside a bolsista que forneceu as contas da CORSAN) e o critério de escolha fosse apenas o custo do consumo de água, onde ela deveria construir sua casa?”.

As três etapas foram desenvolvidas durante dois encontros, sendo que o primeiro ocorreu na escola de origem da professora titular e o segundo, na Instituição em que atuam os pesquisadores. Primeiramente, a professora organizou a turma em cinco grupos de quatro alunos, conforme sugerem Almeida, Silva e Vertuan (2013), Biembengut e Hein (2007) e Bassanezi (2015), e conduziu a prática conforme citado anteriormente. Na descrição dos dados, cada grupo foi denominado por um número, como, por exemplo, Grupo 1, Grupo 2 e, assim sucessivamente, para preservar o anonimato.

Com o objetivo de coletar informações no primeiro encontro, uma pesquisadora e uma bolsista de Iniciação Científica se deslocaram até a escola onde ocorreu a prática para acompanhar todo o procedimento que foi conduzido, prioritariamente pela professora titular. Já no segundo encontro, os alunos e a professora titular se deslocaram até a Instituição de pesquisa para desenvolver as atividades planejadas para este encontro. Cabe salientar que partiu dos alunos o interesse em realizar este encontro na Instituição de Ensino Superior (IES).

Os dados foram coletados, nos dois encontros, mediante filmagens, gravações de áudios e questionários respondidos pelos alunos e pela professora titular. As informações foram catalogadas e analisadas pelos próprios pesquisadores, a fim de relacionar as decisões dos alunos com os modelos matemáticos que emergiram.

Resultados obtidos

A seguir serão apresentados os resultados obtidos em cada uma das etapas, juntamente com os depoimentos da professora e dos alunos acerca da prática e do trabalho com a Modelagem Matemática.

1ª Etapa: A obtenção de Modelos Matemáticos das contas de água oriundas da prefeitura local (município 1): o trabalho desenvolvido na escola local

Inicialmente, foi entregue aos alunos um questionário contendo duas questões, sendo que a primeira solicitava a análise das contas de água levando em consideração as diferenças e semelhanças observadas, da possibilidade de existir uma relação entre a quantidade de água consumida e valor pago, bem como sobre diferenças observadas em relação aos valores pagos, por metros cúbicos consumidos.

Os alunos do Grupo 1 chegaram à conclusão de que, em relação às diferenças e semelhanças “*A tarifa mínima é a mesma [de cada conta], a de expedição também. Já a tarifa de excesso muda conforme o limite de água usado. Sabemos, que abaixo 12 m³ gastos, não se paga a tarifa em excesso e acima de 20m³ paga-se a tarifa em excesso*” (Grupo 1).

Para o Grupo 3 “A tarifa mínima é de 12m^3 , sendo que o valor é fixo. O que muda, pelo que podemos perceber, é o valor da tarifa de excesso, que é o valor pago por cada m^3 de água excedida.” (Grupo 3).

Quanto à possibilidade de relação entre o consumo e o valor pago, os alunos concluíram que

Somando-se o valor da taxa mínima à tarifa de expedição junto à tarifa de excesso por m^3 , obtém-se o valor total a ser pago. Ex: se damos uma taxa mínima de 27,63 reais, a tarifa de expedição de 3,13 reais e um excesso de 13 m^3 de água, sendo que cada m^3 excedido nesse caso vale 2,80 reais, o total a ser pago é de R\$ 67,28 (Grupo 3).

Para melhor analisarem as contas de água, houve interações entre os alunos de grupos diferentes, momento em que trocaram as contas de água (todas do município 1) chegando à conclusão de que existia uma taxa mínima (12 m^3), outra de expedição e ainda um valor variável, que dependia do excesso de água consumida. A discussão que ocorreu entre os grupos, bem como a troca de informações (contas de água) favoreceu o surgimento dos modelos matemáticos. A este respeito, Almeida, Silva e Vertuan (2013, p. 25) comentam que atividades de Modelagem Matemática são cooperativas, tendo “nos trabalhos em grupo o seu aporte”. Segundo Burak (2004, p. 3),

na Modelagem Matemática o fato de compartilhar o processo de ensino com o grupo ou grupos faz a diferença, constitui-se em uma mudança de postura por parte do professor: essa atitude favorece o estabelecimento de relações afetivas mais fortes entre os alunos e professor e alunos.

Almeida, Silva e Vertuan (2013, p. 33), afirmam que

quando os alunos trabalham juntos com o mesmo objetivo e produzem um produto ou solução final comum, têm a possibilidade de discutir os méritos das diferentes estratégias de resolver um mesmo problema e isso pode contribuir significativamente para a aprendizagem dos conceitos envolvidos.

A segunda questão apresentava uma tabela (FIGURA 4) com dados em aberto. O intuito era explorar a relação entre o número de metros cúbicos consumidos, por cada família, e o valor pago.

1. Elaborar uma tabela conjunta relacionando valores de água gastos, em m^3 , e o valor que foi pago (município 1).

Número de metros cúbicos pela família gastos	Valor pago pela família
0	
1	
2	
3	
...	
32	

Figura 4 - Tabela apresentada aos alunos

Fonte: Autores da pesquisa, 2016.

Os alunos foram questionados como poderiam obter esses valores que faltavam na referida tabela. Um dos grupos (GRUPO 2) chegou a seguinte conclusão para resolução dessa questão: “Usando alguma fórmula ou ir somando os valores até obter os resultados que faltam”. Além disso, escreveram os seguintes modelos matemáticos referentes ao problema:

$$a_n = a_1 + (n - 1) r ; a_1 = 27,9465 \text{ e } r = 2,5406 \text{ se } n \geq 12$$

$$a_n = a_1 + (n - 1) r ; a_1 = 43,1901 \text{ e } r = 3,0701 \text{ se } n \geq 18$$

$$a_n = a_1 + (n - 1) r ; a_1 = 61,6107 \text{ e } r = 3,2817 \text{ se } n \geq 24$$

Sendo que, a_n significa o valor a ser pago, a_1 o valor fixo da água e r o valor a ser pago por metro cúbico excedido, dentro de determinadas faixas de consumo de água.

Já o Grupo 1 concluiu que: “De 0 m³ a 12 m³ é o valor da taxa mínima. De 13 m³ a 18 m³ somamos a taxa mínima mais a tarifa excesso, que é 2,5406 [por m³]. Depois, a soma de 18 m³ a tarifa excesso fica 3,0701 [por m³], e 24 m³ a tarifa excesso é 3,2817 [por m³]” (Grupo 1).

Na continuidade, os alunos perceberam que para realizar uma validação mais precisa, necessitavam de mais dados para conferirem se a proposta do modelo estaria corretamente elaborada. Neste momento, os pesquisadores entregaram para cada grupo, um quadro fornecido pela prefeitura municipal, no qual constavam os valores de água, detalhadamente (FIGURA 5).

Sistema de abastecimento de água do município 1			
1	Valor taxa mínima residencial até 12m ³	%VRM	R\$
2	Valor taxa mínima comercial até 12m ³	7,0573%	27,4879
3	Valor taxa mínima industrial até 12m ³	7,0573%	27,4879
4	Valor taxa mínima Produtor até 12m ³	7,0573%	27,4879
5	Excesso residencial de 12m ³ a 18m ³	0,6416%	2,4988
	...		
	Excesso residencial de 18m ³ a 24m ³	0,7752%	3,0194
	...		
	Excesso residencial acima de 24m ³	0,8286%	3,2274

Figura 5 - Documento entregue aos alunos oriundo da Prefeitura Municipal de uma cidade do interior do RS¹

Fonte: Prefeitura Municipal de uma cidade do RS, 2016.

Os alunos analisaram o quadro e coletaram as informações para completarem a tabela representada na Figura 3 anteriormente mencionada. Em seguida, representaram graficamente (FIGURA 6) o consumo de metros cúbicos (no eixo das abscissas) versus valor pago por metro cúbico (eixo das ordenadas), a fim de obterem um modelo que representasse essa relação.

¹ Alguns dados foram suprimidos para preservar o anonimato da cidade. Trata-se de uma cidade do interior do RS.

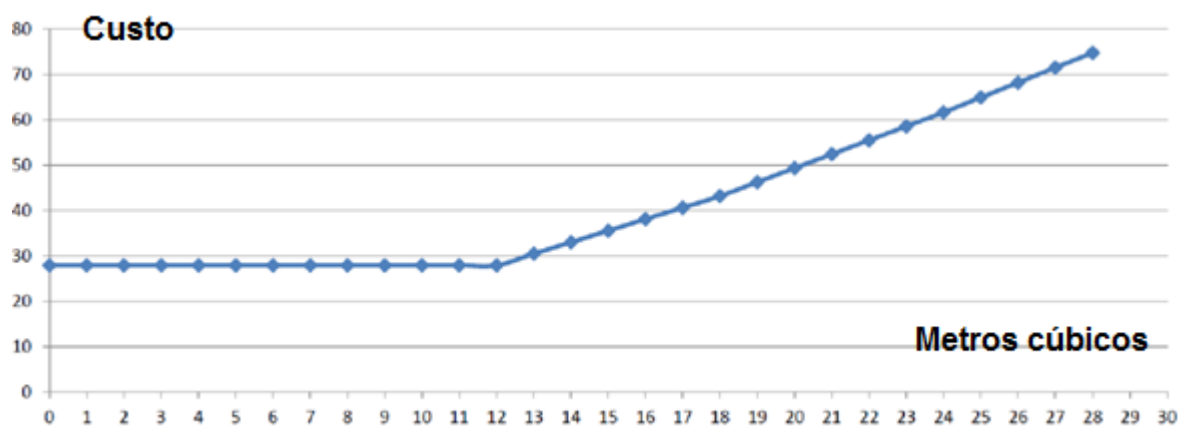


Figura 6 - Consumo em metro cúbico de água versus custo em reais do município 1
 Fonte: Grupo 5 (2016)

Bassanezi (2015) afirma que os dados para uma Modelagem Matemática podem ser organizados em tabelas e, posteriormente, em gráficos, com vistas a facilitar a observação de tendências e, desta forma, favorecer uma análise mais eficiente. A partir dos gráficos, os alunos obtiveram modelos matemáticos, que foram validados utilizando o *software Excel*. Este *software* já havia sido explorado anteriormente com a turma, ou seja, os alunos já conheciam o *software*, pois a professora titular já havia explorado ele em outra ocasião.

Os alunos do Grupo 4 propuseram o modelo a seguir:

$$a_n = a_1 + (n - 1) r$$

$$a_n = a_{12} + (n - 12) 2,5406 ; 12 < n \leq 18$$

$$a_n = a_{18} + (n - 18) 3,0701 ; 18 < n \leq 24$$

$$a_n = a_{24} + (n - 24) 3,2817 ; n > 24$$

Como é possível observar, o modelo construído nessa primeira etapa foi desenvolvido a partir de uma aplicação da Progressão Aritmética. A facilidade de proporem este modelo pode estar relacionada com o fato de este conteúdo ter sido explorado com os alunos recentemente, pois em termos gerais, segundo Biembengut e Hein (2003, p. 27), há “uma tendência dos participantes em elaborar modelos que se restringem a conteúdos apresentados durante o curso”, o que de fato também ocorreu.

Ao surgirem discussões acerca dos modelos propostos, observou-se certa facilidade de utilizarem o raciocínio matemático referente à Progressão Aritmética. Para D’Ambrosio (1986), o modelo matemático pode ser considerado o ponto de ligação entre as informações compreendidas pelo indivíduo e sua ação acerca de sua realidade. Também nessa perspectiva, os autores Haliski, *et al* (2009, p. 1197) mencionam que:

No processo de Modelagem Matemática é gerado um modelo matemático e nessa perspectiva o aluno interage com o modelo e ao refletir sobre este, possibilita várias discussões em torno de conteúdos matemáticos podendo usar os conhecimentos prévios dos discentes para interpretar a situação-problema.

Para Almeida, Silva e Vertuan (2013), “um modelo matemático é uma representação simplificada da realidade sob a ótica daqueles que a investigam. Sua formulação, todavia, não tem um fim em si só, mas visa fomentar a solução de algum problema”.

Ao fim desta primeira etapa, houve a socialização dos modelos encontrados, momento em que um aluno de cada grupo explicou o modelo matemático encontrado. A partir desta socialização foi possível perceber semelhanças significativas entre os modelos que emergiram. A etapa de socialização é relevante, pois segundo Burak e Aragão (2012), apresentar e discutir resultados constitui-se numa etapa fundamental da Modelagem Matemática.

Cabe ainda salientar que, nesta primeira etapa, houve mais dificuldades por parte dos alunos, ou seja, os discentes levaram muito tempo para a realização da tarefa. Isso pode estar relacionado ao fato de os alunos estarem começando a familiarizarem-se com as contas, tendo em vista que habitualmente não são pagas por eles. Acerca da familiarização, Almeida, Silva e Vertuan (2013) afirmam que:

As práticas de sala de aula baseadas na realização de atividades investigativas, como é o caso das atividades de Modelagem Matemática, ao mesmo tempo em que requerem um novo comportamento diante dos problemas, envolvem o professor e alunos com a própria definição de um problema.

Neste sentido, o papel do professor como mediador é relevante, pois precisa instigar os alunos, orientá-los, fazer questionamentos que levem a possíveis respostas.

2ª Etapa: A obtenção de Modelos Matemáticos das contas de água oriundas da companhia abastecedora de água (município 2): o trabalho desenvolvido na Instituição de pesquisa

A segunda etapa foi mediada da mesma forma que a primeira. Inicialmente, os alunos receberam um questionário contendo duas questões principais. Para atender a primeira questão os integrantes dos grupos necessitavam realizar uma comparação entre as contas de água trazidas pelos alunos (oriundas da prefeitura local do município 1) e as contas cedidas pela bolsista de Iniciação Científica de outra companhia (município 2). A partir de uma análise realizada pelos grupos, cada um apresentou as diferenças observadas nas contas das diferentes famílias. Um dos grupos chegou à seguinte conclusão: *“Sim, há diferença entre elas: o consumo, o valor a pagar, os dias de consumo. Nós observamos que no município 2 há um valor fixo destinado aos serviços básicos”* (Grupo 2).

Outro grupo apontou que: *“O que percebemos é que o serviço básico tem um valor fixo. As diferenças aparecem no valor total a pagar e nos m^3 de água consumidos, pois cada família consumiu uma quantidade diferente”* (Grupo 5).

Em seguida, questionamos os alunos quanto à possibilidade de estabelecerem uma relação entre o consumo de água e o valor pago, isto relacionado às contas geradas pela CORSAN, no município 2. Eles concluíram que: *“Sim, sendo o serviço básico com o valor fixo de R\$ 20,83. Soma-se sempre $1 m^3$ com o valor de R\$ 4,40 ao número encontrado. Por Ex: $1 m^3 = 20,83 + 4,40$. $1 m^3 = 25,23$ ”* (Grupo 3).

Por fim, os alunos concluíram que, em relação às diferenças em termos de valores pagos por metro cúbico gasto: “A cada m^3 aumenta 4,40. E quanto mais m^3 , maior o valor a pagar” (Grupo 3).

Na sequência, os alunos elaboraram novamente uma tabela relacionando os valores de água consumidos, em metros cúbicos e o valor pago, possibilitando a construção de gráficos com o intuito de encontrar o modelo que representasse o custo de água em função do consumo, em metros cúbicos. A seguir, na Figura 7, apresentamos um exemplo elaborado pelos alunos do Grupo 2.

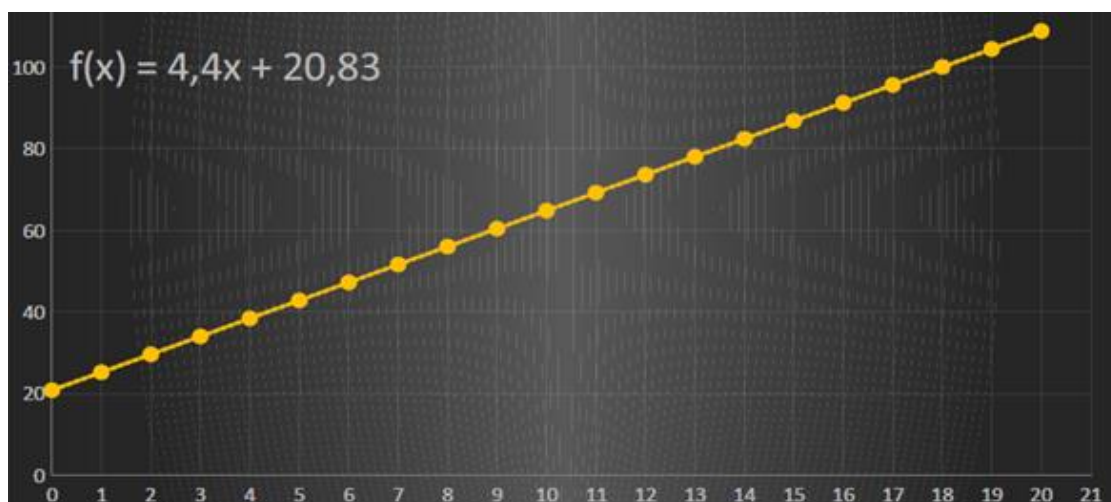


Figura 7 - Consumo de água, em metros cúbicos, versus o custo com sua respectiva função de progressão linear obtidos com os valores cobrados pela CORSAN no município 2.

Fonte: Grupo 1 (2016).

A partir dos gráficos, emergiram os modelos matemáticos que, novamente foram validados utilizando o *software Excel*. Observamos que os alunos novamente utilizaram a Progressão Aritmética para formulação dos modelos. Em função disso e com o intuito de instigá-los a empregarem outras variáveis, um dos pesquisadores comentou se haveria a possibilidade de utilizarem outras letras para a representação dessa relação. Desta forma, alguns passaram a usar as letras dos nomes dos componentes dos grupos. Assim, surgiu o seguinte modelo:

$$V = 20,83 + 4,40.k \text{ (Grupo 1)}^2.$$

Neste modelo, o grupo ainda salientou que “V” é o valor total a pagar; R\$20,83 é o valor a ser pago pelo serviço básico; R\$4,40 é o valor pago por metro cúbico e “k” é o número de metros cúbicos utilizados. Todos os grupos escreveram modelos matemáticos semelhantes, embora usassem diferentes formas de escrita (letras diferentes representando as variáveis).

Bassanezi (2015) afirma que “a formulação inicial de um modelo simples é fundamental para se entender melhor o problema e diagnosticar quais características do fenômeno devem ser consideradas no modelo.”. Porém, de acordo com o autor, muitas vezes é necessária uma “reformulação, que geralmente, é obtida com modificações nas variáveis ou nas leis de formação previamente estabelecidos” (BASSANEZI, 2015, p. 22).

² V era a inicial de uma aluna e k o sobrenome de outra, ambas integrantes do grupo.

Vale enfatizar que, nesta etapa, os alunos apresentaram maior facilidade na hora da análise e coleta de dados, tanto em função de já estarem familiarizados com as contas, quanto em função de alguns dos valores dos quais precisavam, já estarem incluídos nas contas.

3ª Etapa: Inserção da situação-problema: comparação entre Municípios 1 e 2

Finalmente, na terceira etapa, foi entregue aos alunos a seguinte situação-problema: “Se uma família quisesse construir uma residência no município 1 (primeiro encontro) ou no município 2 (segundo encontro) e o critério de escolha fosse apenas o custo do consumo de água, onde ela deveria construir sua casa?”. Após algumas discussões rápidas, os alunos construíram gráficos comparativos (FIGURA 8) para chegarem a uma conclusão.

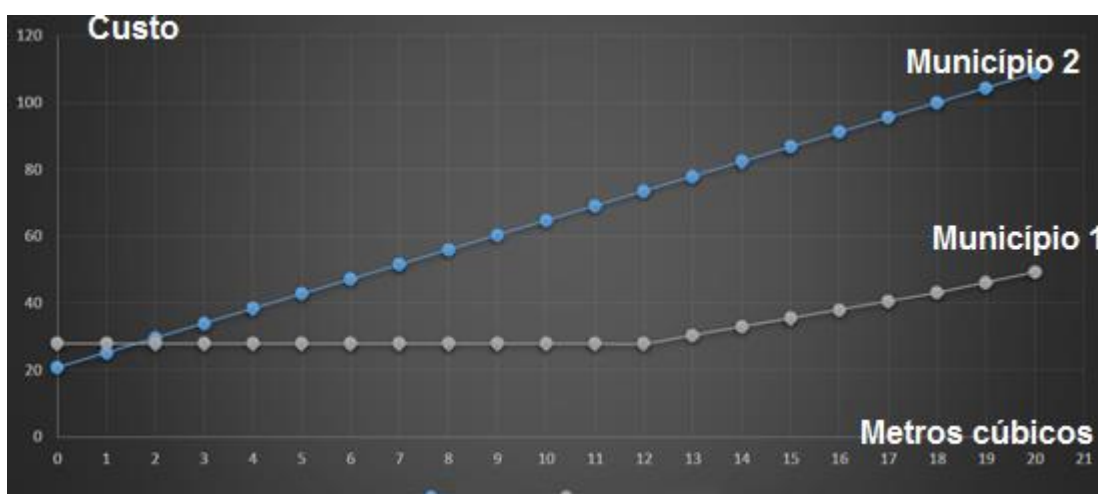


Figura 8 - Comparação de custo por metro cúbico de água consumida entre os Município 1 (pontos em cinza) e Município 2 (pontos em azul)

Fonte: Grupo 1 (2016).

A partir da comparação gráfica, os alunos elaboraram as respostas para a situação problema. Um dos grupos concluiu que,

A partir do gráfico feito por nós, concluímos que é mais vantajoso construir a casa no município 1. A tarifa do município 1 é de até 12 m³ de água e o valor é de R\$ 27,94. Se for gasto 12 m³ de água no município 2, o valor pago será de R\$73,63, que é mais que o dobro (Grupo 2).

Outro grupo concluiu que:

Se o valor dos m³ fosse 25, o valor total a pagar no município 2 seria R\$ 130, 83 e no município 1, R\$ 64, 8924. No município 2, a partir do 2º m³ ele tem um aumento elevado ao do município 1 que é de 27,9465. Então pensando no custo do consumo de água, é preferível financeiramente construir no município 1. Pois mesmo morando no município 2 não tem como gastar 2 m³ de água em 1 mês (Grupo 1).

Este grupo apresentou os argumentos acima embasados em um modelo que foi

construído utilizando novamente a Progressão Aritmética. O modelo é apresentado abaixo:

Município 1

$$a_{25} = 61,6107 + (25-24) 3,2817$$

$$a_{25} = 61,6107 + 1.3,2817$$

$$a_{25} = 61,6107 + 3,2817$$

$$a_{25} = 64,8924$$

Município 2

$$V_t = 20,83 + 4,40.25$$

$$V_t = 20,83 + 110$$

$$V_t = 130,83$$

Assim, como estes dois grupos, os outros também chegaram à conclusão de que o município 1 é mais vantajoso para uma família estabelecer residência, levando em consideração apenas o valor pago por metro cúbico consumido de água.

Observamos que essa etapa foi importante na promoção do espírito crítico e reflexivo, pois segundo Araújo (2009, p. 1), é importante fazer um projeto orientado pelo EMC (Educação Matemática Crítica), para que ele

promova a participação crítica dos estudantes/cidadãos na sociedade, discutindo questões políticas, econômicas, ambientais, nas quais a matemática serve como suporte tecnológico. Nesse caso, dirigir-se-ia uma crítica à própria matemática assim como a seu uso na sociedade, e não apenas se preocuparia com o desenvolvimento de habilidades em cálculos matemáticos.

Sumarizando, nas duas primeiras etapas foi possível observar o envolvimento dos alunos na obtenção dos modelos matemáticos e, na terceira, o desenvolvimento do espírito crítico e reflexivo, favorecendo assim a aprendizagem de conceitos matemáticos.

Os depoimentos dos alunos acerca da prática

Para finalizar a prática, aplicou-se, de forma individual, um questionário contendo três questões, com o intuito de analisar a abordagem da Modelagem Matemática dentro da sala de aula, a partir das opiniões dos alunos. A primeira questão indagou se o aluno havia notado alguma diferença entre as aulas que ele habitualmente tinha na escola e aquela na qual ele desenvolveu os modelos matemáticos. Analisando as respostas dos alunos, é possível verificar que esta atividade estimulou o interesse deles em aprender a matemática e também possibilitou o compartilhamento de conhecimentos matemáticos entre eles. Além disso, essa prática representou algo desafiador, pois os instigava a resolver os problemas, deixando-os com a expectativa de sempre ter algo novo a dizer. Isso tornou a prática cativante e significativa, porquanto, estava relacionada a questões do dia a dia e de interesse dos alunos. De acordo com Almeida, Silva e Vertuan (2013, p. 25), “mover-se de um paradigma em que exposições do professor seguem-se de exercícios para o enfrentamento de situações, de modo geral, não idealizadas, representa um desafio também para os alunos”. Assim também Burak (2004, p. 5) menciona que o interesse dos alunos, em uma prática de Modelagem Matemática, se dá ao fato de que eles

trabalham com aquilo que gostam, tornando-se co-responsáveis pela aprendizagem. Na Modelagem Matemática o fato de compartilhar o processo de ensino com o grupo ou grupos faz a diferença, constitui-se em uma mudança de postura por parte do professor: essa atitude favorece os estabelecimentos de relações afetivas mais fortes entre os alunos e professor e alunos.

A segunda questão indagava sobre quais as dificuldades que o aluno encontrou para desenvolver as atividades de Modelagem Matemática. Ao analisar as respostas da segunda questão, um dos aspectos observados foi que o trabalho em grupo trouxe maior confiança aos alunos na hora de exporem suas dificuldades e opiniões. Outra constatação que podemos enfatizar foi que os alunos tiveram dificuldades em interpretar os dados das tarifas e em encontrar um modelo matemático que representasse a relação entre valor e consumo. Nessa perspectiva, para Burak (2004, p. 3)

o ensino de Matemática torna-se dinâmico, mais vivo e, em consequência, mais significativo para o aluno e para o grupo. Contribui para tornar mais intensa, mais eficiente e mais eficaz a construção do conhecimento por parte de cada aluno participante do grupo.

Enfim, a última questão perguntava se o aluno acredita que esta atividade desenvolvida poderia auxiliá-lo no cotidiano para resolver problemas e de que forma. De acordo com a interpretação das respostas da terceira e última questão, pode-se verificar que a atividade foi de grande importância para os alunos, em função de tê-los preparado para aplicar a matemática em diversas áreas e situações do cotidiano. A respeito disso, Burak (1992, p. 62) afirma que:

A Modelagem Matemática constitui-se em um conjunto de procedimentos cujo objetivo é construir um paralelo para tentar explicar, matematicamente, os fenômenos presentes no cotidiano do ser humano, ajudando-o a fazer previsões e a tomar decisões.

Em síntese, neste subitem os depoimentos dos alunos acerca da prática nos levam a inferir que os alunos perceberam mudanças na forma do professor mediar as atividades e que esta metodologia de explorar situações-problema, por meio da Modelagem Matemática, no início se mostrou difícil, mas desafiadora, pois os alunos precisaram desenvolver a autonomia e independência na busca por respostas. No entanto, eles aludem que a resolução de problemas como estes os fará pensar o cotidiano de forma mais crítica e reflexiva.

Relato de experiência da professora

Para finalizar, a professora titular contribuiu com seu depoimento acerca da sua interação com a Modelagem nesta atividade, além de narrar as dificuldades e contribuições observadas por ela no decorrer da exploração das atividades. Para tal, foram lançadas cinco questões, a saber: Como foi sua interação com a Modelagem? Quais as dificuldades que você teve? Quais vantagens que você observou em utilizar a Modelagem com sua turma? Comente sobre o avanço do ano passado para este, em

relação à interação entre você e os alunos com a Modelagem. Como foi trabalhar como professora mediadora?

A partir das respostas da professora titular, é possível observar que a abordagem de atividades, usando a Modelagem Matemática como metodologia de ensino, contribuiu para os processos de ensino da professora e de aprendizagem para os alunos, pois fez com que esses desenvolvessem criatividade e, conseqüentemente, possibilidades de diferentes representações na resolução dos problemas propostos.

Bassanezi (2002, p. 16) afirma que “a modelagem matemática consiste na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real”. Para essa transformação de problemas da realidade em problemas matemáticos é necessária a utilização da criatividade, daí a expressão “a arte de transformar”. O mesmo autor ainda relata que

o uso da modelagem no processo de ensino-aprendizagem propicia a oportunidade de exercer a criatividade não somente na relação às aplicações das habilidades matemáticas, mas, principalmente, na formulação de problemas originais uma etapa tão estimulante quanto a da resolução (BASSANEZI, 2015, p. 12).

Também, pode-se notar que a professora apresentou algumas dificuldades, principalmente na primeira prática realizada, em relação ao tempo, tanto na questão de auxiliar todos os grupos, quanto na leitura de todos os trabalhos e nas saídas de campo.

Analisando o relato, pode-se inferir que a professora apontou vantagens ao trabalhar com a Modelagem Matemática. Os alunos construíram conhecimento acerca dos conteúdos, tanto matemáticos quanto não matemáticos, apresentaram autonomia e independência, aprenderam a valorizar mais a Matemática e criaram interesse e curiosidade acerca dela.

Almeida e Dias (2004, p. 25) sugerem que a Modelagem pode “proporcionar aos alunos oportunidades de identificar e estudar situações-problema de sua realidade, despertando maior interesse e desenvolvendo um conhecimento mais crítico e reflexivo em relação aos conteúdos matemáticos”. Já para Bassanezi (2006, p. 177),

a modelagem matemática de situações-problema envolvendo a realidade cotidiana funciona como elemento motivador para o aprendizado dos alunos. Tal efeito motivador não se reflete apenas no aprendizado da matéria, mas também revela aos alunos a interação que existe entre as diversas ciências.

De acordo com a professora, o avanço dos alunos e dela quanto à interação com Modelagem Matemática de um ano para o outro ocasionou melhorias nos resultados. A professora também afirmou estar mais confiante para trabalhar a Modelagem com os alunos em relação ao ano anterior e também influenciou na postura dos alunos com relação à disciplina.

Como mediadora do processo, a professora observou mudança nas atitudes dos alunos entre si, ou seja, houve parceria e colaboração entre eles, visto que trabalharam em grupos. A professora também relata que tanto ela quanto os alunos “demonstraram

interesse, curiosidade, criatividade, entusiasmo e flexibilidade” (PROFESSORA TITULAR, 2016).

Considerações Finais

O intuito deste estudo foi apresentar a investigação de uma prática de Modelagem Matemática com alunos do 2º ano do Ensino Médio Politécnico de uma escola pública localizada no interior do Vale do Taquari/RS. O objetivo foi alcançado, na promoção de uma prática de Modelagem Matemática capaz de proporcionar a emergência de modelos matemáticos expressos pelos alunos, sob diferentes formas, decorrentes da análise de faturas de serviços de contas de água de uma empresa municipal e outra estatal.

No primeiro encontro, momento em que ocorreu a primeira etapa, percebeu-se que os alunos estavam preocupados e ansiosos em relação à prática, apresentando dificuldades em relação à análise da fatura de serviços da conta de água e em responder o questionário. No decorrer do encontro, os grupos foram demonstrando mais liberdade e confiança nas respostas, à medida que os professores mediavam o processo de elaboração dos modelos matemáticos.

Já no segundo encontro, momento em que foram realizadas a segunda e terceira etapas, verificou-se que os alunos estavam confortáveis com as atividades, uma vez que discutiam mais, compartilhavam ideias e relacionavam-se muito bem nos grupos. Para responder ao questionário levaram menos tempo se comparado ao do primeiro encontro. Demonstraram domínio algébrico ao escrever os modelos matemáticos utilizando-se de letras que constam em seus nomes.

Os resultados ainda apontam, por meio do questionário e também verbalmente, pré-disposição dos alunos em aprender matemática de forma contextualizada e voltada para situações cotidianas. Juntamente, ocorreu participação progressiva dos alunos nas discussões, tanto nos grupos como na turma no geral, apresentando aumento de interesse dos alunos por situações que envolvem a Matemática.

No que tange à professora, houve crescimento em relação à confiança quanto ao seu papel de mediadora, e juntamente com os alunos pôde-se observar desenvolvimento de criatividade, interesse em aprender e ensinar a Matemática, os alunos também aprenderam a valorizar a disciplina, desenvolveram autonomia e independência, além de parceria e colaboração nos grupos.

Referências

ALMEIDA, L. W. de; SILVA, K. P. da; VERTUAN, R. E. **Modelagem Matemática na Educação Básica**. São Paulo: Contexto, 2013.

ALMEIDA, L. M. W; DIAS, M. R. Um estudo sobre a modelagem matemática como estratégia de ensino e aprendizagem. **Bolema**, ano 12, n. 22, p. 19-36, 2004.

- ARAÚJO, J..L. Uma Abordagem Sócio-Crítica da Modelagem Matemática: A perspectiva da educação matemática crítica. **ALEXANDRIA, Revista de Educação em Ciência e Tecnologia**, v. 2, n. 2, p. 55-68, jul. 2009.
- BASSANEZI, R. C. **Ensino–aprendizagem com modelagem matemática**. São Paulo: Contexto, 2002.
- BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática**: uma nova estratégia. São Paulo: Contexto, 2006.
- BASSANEZI, R. C. **Modelagem Matemática**: teoria e prática. São Paulo: Contexto, 2015.
- BAUER, M.; GASKELL, G. **Qualitative researching with text, image, and sound**. London: Sage, 2008.
- BIEMBENGUT, M. S. Concepções e Tendências de Modelagem Matemática na Educação Brasileira. **Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática**. Ano 7, n. 10, p. 195 – 204, 2012.
- BIEMBENGUT, M. S.; HEIN, N. **Modelagem Matemática no ensino**. São Paulo: Contexto, 2003.
- BIEMBENGUT, M. S. Modelagem Matemática & Resolução de Problemas, Projetos e Etnomatemática: Pontos Confluentes. **ALEXANDRIA Revista de Educação em Ciência e Tecnologia**, v. 7, n. 2, p. 197-219, 2014.
- BISOGNIN, E.; BISOGNIN, V. Percepção de Professores sobre o Uso da Modelagem Matemática em Sala de Aula. **Bolema**, Rio Claro, SP, v. 26, n. 43, p. 277-297, 2012.
- BORROMEO Ferri, R. Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. **Zentralblatt für Didaktik der Mathematik**, v. 38, n. 2, p. 86-95, 2006.
- BURAK, D. A modelagem matemática e a sala de aula. Em: I Encontro Paranaense de Modelagem em Educação Matemática – I EPMEM, 2004, **Anais ...Londrina: UEL**, 2004.
- BURAK, D.; ARAGÃO, R. M. R. **A modelagem matemática e relações com a aprendizagem significativa**. 1. Ed. Curitiba: Editora CRV, 2012.
- D'AMBROSIO, U. **Da Realidade à Ação: Reflexões sobre Educação e Matemática**. Campinas: Ed. da Universidade Estadual de Campinas, 1986.
- DUNCAN, C. P. F. R.; STAHL, N. S. P.; COLOMBO, C. da S.; SANTOS, P. M. dos; SCHRÖETTER, S. M. A Modelagem Matemática como Metodologia no processo de Ensino-aprendizagem: uma experiência no Ensino Médio. **InterSciencePlace**, v. 10, n. 6, p. 118-216, 2015.
- GIL, A. C. **Como Elaborar Projetos de Pesquisa**. 4. ed. São Paulo: Atlas, 2002.
- HALISKI, A. M. RUTZ, D. C; PILATTI, L. A. Uma experiência com a essência da modelagem matemática através da construção de maquete. Em: I Simpósio Nacional de Ensino de Ciência e Tecnologia , 2009. **Anais ...Disponível em:** <http://www.sinect.com.br/anais2009/artigos/10%20Ensinodematematica/Ensinodematematica_artigo26.pdf>. Acesso em: 25 mar. 2017.
- KAISER, G.; SCHWARZ, B., TIEDEMANN, S. Future Teachers' Professional Knowledge on Modeling. In: LESH, R.; GALBRAITH, P.; HAINES, C. R.; HURFORD, A. (Org.).

Modeling Students' Mathematical Modeling Competences. New York: U.S.A., Springer, 2010.

KAISER, G.; SRIRAMAN, B. *A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education.* **Zentralblatt für Didaktik der Mathematik**, v. 38, n. 3, p. 302-310, 2006.

MARCONI, M. A.; LAKATOS, E. M. **Metodologia científica.** 7. ed. São Paulo: Atlas, 2010.

MOREIRA, Marco Antonio. **Metodologias de Pesquisa em Ensino.** Ed. São Paulo, 2011.

SILVEIRA, E.; CALDEIRA, A. D. Modelagem na Sala de Aula: resistências e obstáculos. **Bolema**, Rio Claro, SP, vol.26, n. 43, p.1021-1047, 2012.

Submissão: 05/04/2017

Aceite: 29/03/2018