Sociedade Brasileira de Educação Matemática

emr

Por uma abordagem problematizada dos Teoremas Fundamentais do Cálculo na formação inicial de professoras e professores de matemática

Hygor Batista Guse[1]
Ivo da Silva Knopp[2]
Luísa Cardoso Mendes[3]
Vinicius Linder[4]

Resumo: Este trabalho enseja propor abordagens que tentem problematizar os Teoremas Fundamentais do Cálculo (TFC), em Cálculo, na formação inicial de professores(as) de matemática. Nossa tentativa se dá em três frentes: (i) debruçar-se sobre a questão conceitual acerca da integral e sua relação com a área; (ii) tensionar o motivo de as operações de diferenciação e integração poderem ser consideradas como inversas uma da outra; (iii) tratar sobre formas intuitivas de se abordar os TFC anteriores à formalização. Esperamos que as discussões aqui feitas apontem para abordagens problematizadas não somente dos TFC, mas também do Cálculo e de outras disciplinas de conteúdo matemático, como Análise Real, Álgebra Abstrata, Álgebra Linear, dentre outras.

Palavras-chave: Matemática Problematizada. Formação de Professoras e Professores de Matemática. Cálculo.

Towards a problematized approach to the Fundamental Theorems of Calculus in the initial mathematics teachers' education

Abstract: This work aims to propose approaches that try to problematize the Fundamental Theorems of Calculus (FTC), in Calculus, in the initial mathematics teachers' education. Our attempt is made on three fronts: (i) to address the conceptual question about the integral and its relation with the area; (ii) stress the reason why differentiation and integration operations can be considered as inverse of each other; (iii) deal with intuitive ways of approaching FTC prior to formalization. We hope that the discussions made here point to problematized approaches not only for FTC, but also for Calculus and other disciplines with mathematical content, such as Real Analysis, Abstract Algebra, Linear Algebra, among others.

Keywords: Problematized Mathematics. Mathematics Teachers' Education. Calculus.

Por un enfoque problematizado de los Teoremas Fundamentales del Cálculo en la formación inicial de las profesoras y profesores de matemáticas

Resumen: Este trabajo desea proponer enfoques que intentan problematizar los Teoremas Fundamentales de Cálculo (TFC) en Cálculo en la formación inicial de profesores(as) de matemáticas. Nuestro intento se desarrolla en tres formas: (i) abordar la cuestión conceptual acerca integral y su relación con el área; (ii) tensionar la razón por la cual las operaciones de diferenciación e integración pueden considerarse como inversas entre sí; (iii) tratar formas intuitivas de abordar los TFC antes de la formación. Esperamos que las discusiones aquí hechas apunten a enfoques problematizados no sólo del TFC, sino también del Cálculo y otras asignaturas con contenido de matemático, como Análisis Real,

[1] Mestre em Ensino de Matemática. Universidade Federal do Rio de Janeiro/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil. E-mail: hygor.guse@gmail.com - Orcid: https://orcid.org/0000-0003-2052-4998
[2] Mestre em Ensino de Matemática. Universidade Federal do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro, RJ, Brasil. E-mail: ivosknopp@gmail.com - Orcid: https://orcid.org/0000-0002-4560-5017
[3] Mestre em Ensino de Matemática. Universidade Federal do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro, RJ, Brasil. E-mail: luisacamendes@hotmail.com - Orcid: https://orcid.org/0000-0002-9550-8274
[4] Mestre em Ensino de Matemática. Universidade Federal do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro, RJ, Brasil. E-mail: lindervinicius@gmail.com - Orcid: https://orcid.org/0000-0003-3730-4633

eISSN 2317-904X DOI: 10.37001/emr.v28i78.2936 Recebido • 28/10/2021 | Aprovado • 05/03/2023 | Publicado • 31/03/2023

Álgebra Abstracta, Álgebra Lineal, entre otras

Palabras clave: Matemática Problematizada. Formación de Profesores y Profesoras de Matemáticas. Cálculo.

1 Introdução

Em disciplinas de Cálculo oferecidas na formação inicial de professores(as) de matemática, os Teoremas Fundamentais do Cálculo (TFC) são conteúdos que revisitam conceitos centrais que compõem a disciplina, como derivada/antiderivada, integral e, embutidos em ambos, a noção de limite. Neste trabalho, optamos por tratar os teoremas separadamente (STEWART, 2006), embora algumas referências os apresentem conjuntamente, subdividindo-os em "parte 1" e "parte 2" (ALCOCK, 2014). Essa proposta de distinção visa enfatizar as diferenças entre as hipóteses e as teses de ambos os teoremas que, em nosso entendimento, constituem-se como elementos importantes de suas caracterizações. Além disso, no ensino de Cálculo, é possível que se enfatize mais a chamada "parte 1" em relação à "parte 2", construindo-se uma hierarquia entre ambas. Dessa forma, denominamos os TFC como "integral da derivada" e "derivada da integral", os quais são enunciados, em geral, da seguinte forma, sujeita a ligeiras modificações:

TFC (integral da derivada): *Seja* $F: [a, b] -> \mathbb{R}$ *diferenciável em* $]a, b[$, *tal que* $f = F'$ *é integrável. Então:*

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$$

TFC (derivada da integral): *Seja* $f: [a, b] -> \mathbb{R}$ *integrável. Seja* $F: [a, b] -> \mathbb{R}$ *definida por:*

$$F(x) = \int_a^x f(s)ds$$

Então F é contínua. Além disso, se f é contínua em $x_0 \in [a, b]$, *então F é diferenciável em* x_0 *e* $F'(x_0) = f(x_0)$

Por abranger uma revisitação e uma articulação do conteúdo, como observamos, em seus enunciados, pelas palavras-chave "integrável", "diferenciável" e "contínua", dá-se certo destaque em sua abordagem, a qual inclui aplicações puramente algébricas, por meio dos métodos de integração, e aplicações com apelo geométrico, como áreas e volumes de sólidos. No entanto, conforme indicam alguns(mas) autores(as) (e.g. ALCOCK, 2014; BALDINO, 2000), as abordagens que envolvem os TFC podem ser marcadas por frases prontas – por exemplo, “integração (...) é o ‘oposto’ da diferenciação” (ALCOCK, 2014, p. 179, tradução nossa) – e por algoritmizações, as quais buscam apresentar um olhar sobre os teoremas que os reduz a uma memorização, sem necessariamente implicar uma produção de sentido. No entanto, em vez disso, consideramos que os TFC poderiam provocar novos entendimentos sobre funções reais e sobre a própria matemática.

Nesse sentido, o ensino dos TFC em disciplinas de Cálculo pode ser concebido de uma maneira não problematizada (GIRALDO, 2019), pautado na exposição de informações e procedimentos sobre as relações entre integral e antiderivada. Em particular, na formação de professores(as) de matemática, Lins (2005) e Fiorentini e Oliveira (2013) mostram que uma disciplina de conteúdo matemático, como Cálculo, não aborda apenas o conteúdo em si, mas ensina também uma forma de conceber, tratar, avaliar e ensinar matemática, uma vez que o(a) licenciando(a) tem, à sua frente, um(a) professor(a), que é precisamente o(a) profissional que está se preparando para ser. Logo, ensinar os TFC por meio de frases prontas e de algoritmizações reducionistas, que não produzem sentido, transmite ao(à) futuro(a) docente a mensagem de que a matemática na educação básica também deve ser ensinada dessa forma.

Em contrapartida, Giraldo (2019) propõe uma concepção de matemática problematizada, que privilegia sentidos e afetos, configurando-se como uma

> [...] posição do pensamento que tem a categoria de problema como o único a priori da matemática e constituinte do próprio saber. Isto é, a matemática como campo de saber e como campo de invenção se constitui por problemas e não de respostas ou soluções (GIRALDO; ROQUE, 2021, p. 15).

Assim, afirmamos que os TFC, tal qual outros conteúdos matemáticos da formação de professores(as), podem ser ensinados sob uma perspectiva problematizada: há outras abordagens possíveis. Essas outras possibilidades podem fazer com que os TFC produzam novos entendimentos sobre funções reais e sobre a matemática, promovendo articulações entre diferentes áreas da disciplina e, portanto, um conhecimento significativo sobre o conteúdo de Cálculo, visto que, como apontamos anteriormente, os teoremas são um tópico que revisita conceitos centrais.

Sendo assim, este trabalho enseja propor abordagens que tentem problematizar os TFC no ensino de Cálculo na formação inicial de professores(as) de matemática. Nossa tentativa se dá em três frentes: a primeira, que se debruça sobre a questão conceitual acerca da integral e sua relação com a área; a segunda, que tensiona o motivo de as operações de diferenciação e integração poderem ser consideradas como inversas uma da outra; e uma última, que trata sobre formas intuitivas de se abordar os TFC anteriores à formalização. Esperamos que as discussões realizadas, embora não se encerrem aqui, apontem para abordagens problematizadas não somente dos TFC, como também do Cálculo e de outras disciplinas de conteúdo matemático, como Análise Real, Álgebra Abstrata, Álgebra Linear, entre outras.

2 A conceitualização da integral

O entendimento das integrais, nos cursos de Cálculo, encontra-se usualmente ligado à noção de antiderivadas. De fato, o cálculo de uma integral a partir da noção de antiderivada encontra-se formalmente justificada pelos Teoremas Fundamentais do Cálculo (TFC), que estruturam esse entendimento. No entanto, o uso corrente e enfático das possibilidades procedimentais dessa relação poderia omitir suas bases conceituais, sendo possível perder de vista a fundamentação pela qual esses conceitos tão distintos estão conectados. Afinal, se, para o(a) estudante de Cálculo, o conceito de integral está intimamente relacionado ao cálculo de áreas, como poderia estar inversamente relacionado ao cálculo de declividades de uma curva? Que tipo de relação é estabelecida entre esses conceitos que fundamentam os TFC?

Nesse sentido, é possível olhar para a própria noção usual da integral de uma função, relativa ao cálculo da área entre a curva gerada pela função e o eixo x no intervalo [a,b]; em geral, esse entendimento se apresenta como motivação e aplicação inicial desse conceito. Para efeito de exemplificação, podemos tomar uma função $f(x)=mx$ com $x \in [0.b]$ e $m \neq 0$. Ora, a área que gostaríamos de calcular equivale à área de um triângulo, a qual, por técnicas estritamente geométricas, sabemos calcular. Dessa forma, a integral desta função se identificaria com a área desse triângulo, que é obtida pela metade do produto entre a distância do intervalo [0,b] e $|f(b)|$. Se, no entanto, toma-se uma curva de natureza um pouco menos "comportada" ou linear, o caso de um cálculo geométrico direto se torna insuficiente, demandando, por si só, uma técnica outra. De acordo com Alcock (2014), essa técnica, para o(a) estudante de Cálculo, pode ser entendida como a própria integral.

Entretanto, como aponta Alcock (2014), o raciocínio entra no problema tácito de um argumento circular: encontramos a integral ao calcular áreas e encontramos áreas ao calcular integrais. Nesse entendimento, a integral torna-se, não obstante, técnica e produto simultaneamente. Em uma concepção problematizada da matemática, seria preciso, pois, tensionar a noção do cálculo geométrico de áreas e assumir a complexidade do conceito de integral a partir de sua definição explícita junto ao(à) futuro(a) professor(a) de matemática.

A definição da integral de uma função parte, previamente, da partição desta função em subintervalos. A ideia geral, efetivamente, é que cada subintervalo gere um retângulo, cuja base é o próprio subintervalo, e cuja altura identifica-se no valor absoluto máximo ou no valor absoluto mínimo daquele subintervalo. Com efeito, tomando a diferença entre os valores dessas áreas máximas e mínimas, procura-se a construção de uma partição tal que a diferença seja a menor possível. Nota-se, portanto, que se trata, antes de tudo, de um procedimento de aproximação, o que apresenta uma natureza muito distinta da técnica anterior. Por outro lado, a circularidade do argumento, aqui, encerra-se: a noção geométrica de área torna-se um ponto de partida para um processo posterior de aproximação por áreas conhecidas.

Não se trata, dessa maneira, de desqualificar o entendimento da integral como área abaixo de uma curva, mas de problematizar esse entendimento, de modo a aprofundá-lo e percebê-lo para além de sua mera definição. Assim, o próprio sentido de cálculo de área é alterado, partindo de processos determinados em direção a processos aproximativos, os quais são ainda posteriormente resolvidos sob métodos infinitesimais

3 Integração, derivação e os Teoremas Fundamentais do Cálculo

Além de uma questão conceitual que pode ser negligenciada, uma abordagem não problematizada dos TFC pode se traduzir, na disciplina de Cálculo, na não consideração das hipóteses desses teoremas, levando à aplicação indiscriminada a quaisquer funções sem a devida verificação. Do ponto de vista da matemática acadêmica, esse tipo de prática não estaria adequada, pois as hipóteses de um teorema fazem parte de seus elementos estruturantes: se alteramos as hipóteses, o próprio sentido do teorema sofre mudanças; altera-se o ponto de partida, mas também todo o caminho e, possivelmente, o lugar aonde se quer chegar. Assim, o tipo de abordagem que desconsidera as hipóteses

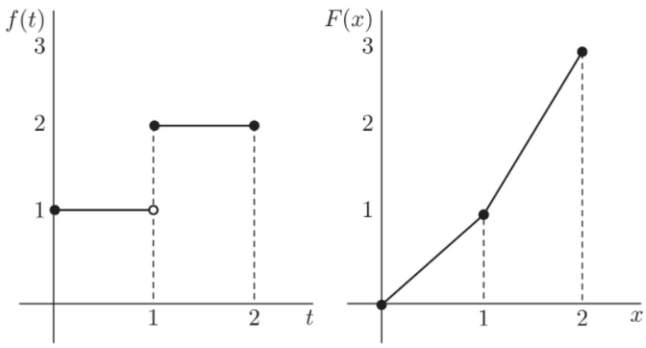
> [...] segue uma via que começa em um ponto qualquer, sem que se saiba ainda a relação desse começo com o resultado que daí deve surgir, [...] comporta tais determinações e tais relações e afasta outras sem que possamos nos dar conta, imediatamente, segundo qual necessidade isso ocorre [...] (BALDINO, 2000, p. 73-74).

Contudo, a problemática envolvendo a desconsideração das hipóteses dos TFC não se limita à matemática acadêmica. Quando não as discutimos na licenciatura em matemática, estamos supervalorizando os resultados (as teses, as conclusões) em detrimento de como as ideias se articulam para que sejam produzidos. Isso tende a constituir a futura prática docente daquele(a) licenciando(a), de modo que essa pessoa acabe por adaptar essa supervalorização para o ensino de matemática: as fórmulas e os resultados seriam mais importantes que o caminho e a mobilização de ideias diversas. Porém, a fórmula sem a articulação de ideias torna-se vazia, sem expressar algum sentido para o(a) estudante (SANTOMÉ, 1995), podendo produzir um afastamento dele(a) com relação à matemática.

Reivindicamos, portanto, que as hipóteses dos TFC devem ser tensionadas junto a futuros(as) professores(as) de matemática. Tensioná-las não significa somente sublinhá-las, mas também mostrar a sua relevância para o entendimento dos teoremas e dos conceitos envolvidos. A que caminhos as problematizações podem nos levar? O que podem revelar sobre as relações entre integral e derivada? Quais são seus impactos na conclusão dos teoremas?

Dessa forma, propomos um exemplo, em diálogo com Alcock (2014), que tenta realizar o tensionamento sobre a afirmação de que "a integração é a operação inversa da derivação", a partir das hipóteses dos TFC. Observemos, então, os seguintes gráficos de uma função f e de sua integral F:

Figura 1 - Uma função que não é contínua em um ponto de seu domínio, mas que é integrável



Fonte: Alcock (2014, p. 198).

Nesse caso, f não é contínua em $t = 1$, mas é integrável no intervalo [0, 2], pois é possível calcularmos o valor da área abaixo de seu gráfico. Esse exemplo pode levar a discussões sobre as hipóteses do TFC (derivada da integral), pois f não é contínua em $t = 1$ e F não é diferenciável neste ponto. Isso mostra a razão de analisarmos a condição de f ser contínua na hipótese, uma vez que, não sendo, poderão haver severas mudanças de inclinação em F, fazendo com que esta não seja diferenciável naquele ponto (ALCOCK, 2014). A ausência dessa análise, entretanto, tenderia a um entendimento no qual o teorema poderia ser indiscriminadamente aplicado, caracterizando uma visão puramente algorítmica e pouco conceitual dos TFC.

Ademais, o exemplo também tensiona a afirmação de que a integração e a diferenciação são operações inversas porque $F(x) = \int_0^x f(t)dt$, então $F'(1)$ deveria ser igual a $f(1)$, se ignorarmos as hipóteses do TFC (derivada da integral) e aplicarmos seu resultado. Contudo, $F'(1)$ não existe e $f(1) = 2$. Mais uma vez, as hipóteses do teorema devem ser verificadas e discutidas antes de uma aplicação indiscriminada dos resultados. Mostramos, assim, como a invertibilidade entre integração e derivação deve ser tensionada, além de problematizarmos as hipóteses de ambos os TFC.

4 Antes do rigor: noções intuitivas sobre os TFC

Como terceiro e último ponto, propomos a discussão de noções intuitivas acerca dos TFC antes de formalizá-los, para que se produza um conhecimento significativo junto ao(à) licenciando(a). Inicialmente, nota-se que as concepções intuitivas sobre conceitos abordados nas aulas de Cálculo que envolvem grandezas infinitesimais, quando apresentadas pelos estudantes, são frequentemente consideradas como não suficientes, não rigorosas e até mesmo como sinais de fracasso de compreensão do conteúdo (MORENO-ARMELLA, 2014). Por outro lado, historicamente, os conceitos de derivada e integral foram construídos a partir dos processos algébricos finitos de diferença (Δ) e soma (Σ), para construir a percepção infinitesimal de diferenciação (∂) e integral ($\int$) (BOS, 1974). E, por essa intuição finita, podemos perceber a relação inversa existente entre diferenciação e integralização e a sequente formalização dos Teoremas Fundamentais do Cálculo – eis, então, uma justificativa para tratarmos da intuição sobre os TFC.

Assim como o cálculo infinitesimal de Leibniz teve uma forte relação com a intuição baseada na geometria das curvas estudadas e enfrentou, em seu desenvolvimento, a tensão entre o intuitivo e o formal (BOS, 1974), o ensino desses conceitos também pode – e talvez devesse – passar por essas reflexões. De acordo com Moreno-Armella (2014), a intuição não substitui a formalização, porém, pedagogicamente, o(a) aluno(a) não conseguiria estruturar rigorosamente, de forma lógica, uma investigação, sem antes a idealizar intuitivamente. A formalização, portanto, é processo posterior e não principal, de modo que não deveria ser encarada como um fim em si mesmo. Não obstante sua importância enquanto ferramenta de enlace teórico e sistêmico, a formalização no processo de um ensino problematizado deve ser constantemente tensionada em relação às ideias intuitivas com as quais os objetos são apreendidos. Assim, no processo didático, a formalização se faz como apreensão conceitual e sistêmica de uma intuição, de modo a formar papéis complementares do conhecimento, pois a formalização de um objeto sem sua intuição tende a esvaziá-lo, enquanto a intuição sem sua formalização não permite comunicá-lo.

Dessa maneira, concordamos, aqui, com Giraldo e Roque (2021), uma vez que estes valorizam os processos intuitivos de formação histórica das ideias matemáticas naquilo que chamam de "processos de invenção":

> Axiomas e definições, que na ordem da estrutura precedem os teoremas, constituem, na verdade, condições que garantem a validade de determinados resultados e que, em geral, foram entendidas e formuladas por último, a partir de explorações em torno dos próprios resultados. Nesse sentido, axiomas e definições nascem de processos de invenção que buscam encapsular e organizar formalmente ideias (em geral, já familiares em algum sentido) e que encerram uma intencionalidade de expressar condições que possibilitem a validade formal dessas ideias (GIRALDO; ROQUE, 2021, p. 3).

Tais processos inventivos produzem intuições a respeito das ideias que serão posteriormente formalizadas. Nesta seção, trataremos da importância das noções intuitivas da derivada (pela taxa de variação) e da integral (como acumulação global) que, entrelaçadas, culminam na concepção intuitiva dos TFC.

Para compreender o TFC (integral da derivada), uma ideia intuitiva seria perceber como uma partição P = {x_0, ..., x_n} de [a, b] se relaciona com a derivada de F: [a, b] $->$ $\mathbb{R}$ por meio das taxas de variação de cada intervalo. Vamos observar, primeiramente, a função F no intervalo [x_0, x_1], com o objetivo de representar o valor da função de F(x_1) por meio da taxa de variação local no intervalo. Podemos escrever, então, F(x_1) = F(x_1) - F(x_0) + F(x_0), incluindo, dessa forma, Δy_1 = F(x_1) - F(x_0). De maneira semelhante, podemos inserir o Δx_1, escrevendo F(x_1) = $\frac{\Delta y_1}{\Delta x_1}\Delta x_1$ + F(x_0).

Pelo mesmo raciocínio, podemos escrever F(x_2) = $\frac{\Delta y_2}{\Delta x_2}\Delta x_2$ + F(x_1); F(x_3) = $\frac{\Delta y_3}{\Delta x_3}\Delta x_3$ + F(x_2); …; F(x_n) = $\frac{\Delta y_n}{\Delta x_n}\Delta x_n$ + F(x_{n-1}). Ao somar todas as igualdades, temos que:

$$F(b) = \sum_0^n \frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\Delta xi + F(a)$$

Até então, tudo que utilizamos foram manipulações algébricas finitas em relação à função F que incluíram a diferença (Δ) e a soma (Σ). Apesar da simbologia utilizada no processo poder ser assustadora para alunos(as) de Cálculo, que muitas vezes são calouros(as) dos cursos de licenciatura em Matemática, pode haver uma construção por meio da intuição e das manipulações algébricas finitas. A derivada e a integral emergem formalmente a partir da passagem de um processo finito para uma concepção infinitesimal da diferença e da soma, percebendo a primeira como a taxa de variação local e a segunda como acumulação global. Dessa forma, torna-se possível escrever que:

$$F(b) = \int_a^b F'(x)dx + F(a)$$

A partir da passagem da intuição para a formalidade por meio dos infinitesimais, para compreender o TFC (derivada da integral) poderíamos, primeiro, pensar na diferença da soma $\Delta \sum_0^i f(x_j)$, por meio das partições. Como Bos (1974) indica, essa relação carece de uma interpretação geométrica como a do TFC (integral da derivada), mas, ainda assim, podemos realizar uma passagem análoga à anterior ao concebermos a soma em um ponto qualquer da partição como a acumulação da função até aquele ponto. Então, $\Delta \sum_0^i f(x_j)$ representa a diferença das acumulações em dois pontos consecutivos na partição. Imagine que você tenha R\$150,00 (cento e cinquenta reais) acumulados na segunda-feira e R\$180,00 (cento e oitenta reais) acumulados na terça-feira. A diferença entre as acumulações seria de R\$30,00 (trinta reais), que também é o valor que você ganhou na terça-feira. Retornando ao âmbito das funções, temos que a diferença entre as acumulações em dois pontos consecutivos é igual ao valor da função no maior desses dois pontos, isto é:

$$\Delta \sum_0^i f(x_j) = f(x_{i+1})$$

Assim, podemos interpretar o fato acima da seguinte maneira: ao realizarmos a diferença entre somas finitas de elementos da imagem, o resultado é ainda um elemento da imagem. Nesse sentido, quando realizamos a passagem para os infinitesimais de modo que as funções satisfaçam as hipóteses, teríamos o TFC (derivada da integral), lembrando que o operador Δ corresponde à derivada e o operador Σ corresponde à integral:

$$\frac{d}{dx}\int_0^x f(t)dt = f(x)$$

É importante destacarmos que esse raciocínio utilizado a partir das ideias de diferença e soma que inspiraram o Cálculo de Leibniz não são exatamente as mesmas que estruturam o conceito de derivada e de integral atuais (BOS, 1974). Entretanto, a passagem de um processo finito para uma concepção infinitesimal da diferença e da soma, em ambos os TFC, promove entendimentos que podem ser invisibilizados pelas abordagens não problematizadas, as quais, em vez de discutirem essa passagem, privilegiam algoritmizações que reduzem os TFC a fórmulas a serem aplicadas indiscriminadamente.

Dessa forma, a culminação do entendimento dos TFC em conjunto se torna a percepção da derivada e da integral como operações inversas, assim como eram a diferença e a soma e a taxa de variação local e acumulação global no âmbito finito. Porém, como mostramos nas seções anteriores, além de apelarmos à intuição para discutir tal relação, entendemos que uma abordagem problematizada também privilegia um debate acerca das hipóteses desses teoremas.

5 Considerações Finais

Tecemos, neste texto, algumas abordagens para os TFC nas disciplinas de Cálculo. Entendemos que elas não são fórmulas prontas a serem aplicadas em qualquer contexto, mas destacamos que são possíveis e se apresentam como alternativas a abordagens não problematizadas. Elas podem, ainda, avançar em certas direções, como incorporar e problematizar conteúdos e práticas da educação básica relacionadas a funções reais – afinal, nossas propostas se situam na formação inicial de professores(as) de matemática. No entanto, mesmo com suas limitações, as abordagens que aqui propomos optam por um outro olhar sobre os TFC, que é distinto daquele apresentado em cursos de Cálculo pautados por algoritmizações.

Ressaltamos, uma última vez, a necessidade de problematizar a matemática, não só com os TFC e na formação docente, mas em toda a educação. Adotar abordagens não problematizadas, marcadas por procedimentos isolados e reducionistas, ao longo de todo o processo educativo provoca um afastamento dos(as) estudantes com relação à matemática, gerando a impressão de que não há lugar para um raciocínio articulado nessa disciplina (BOALER, 2018). Giraldo (2019) indica que as consequências desse modo de ensino já podem estar presentes na sociedade, manifestando-se por meio do fortalecimento das concepções anticientíficas, como as noções de "Terra plana" ou "movimento antivacina", uma vez que, "quando nada faz sentido, tudo pode fazer sentido" (GIRALDO, 2019, p. 10). Por exemplo, quando as leis da gravitação universal são concebidas de maneira não problematizada, podem produzir tanto sentido quanto a falsa planicidade da Terra (GIRALDO, 2019), assim como os TFC, se abordados de tal forma, podem produzir tanto sentido quanto dizer que $\int_a^b f(x)dx = f'(b) - f'(a)$ ou outras afirmações absurdas do ponto de vista da matemática acadêmica.

Quando optamos por uma matemática problematizada, é preciso, portanto, entender que o campo é um domínio conceitual e não uma lista de fatos e métodos a serem decorados (BOALER, 2018), privilegiando sentidos e afetos sobre os conceitos estudados e revisitados. Nesse sentido, não procura entender, por exemplo, os TFC de modo superficializado e não se limita a estudá-los apenas sob a ótica formal, mas busca, ao contrário, entendê-los de modo profundo, diverso e em articulação com outros saberes e com a intuição.

Referências

ALCOCK, Lara. **How to Think About Analysis**. 1. ed. Oxford: Oxford University Press, 2014.

BALDINO, Roberto Ribeiro. Infinitésimos: Quem Ri por Último? **Boletim GEPEM**, Rio de Janeiro, n. 36, p.69-82, jan. 2000.

BOALER, Jo. **Mentalidades matemáticas**: estimulando o potencial dos estudantes por meio da matemática criativa, das mensagens inspiradoras e do ensino inovador. 1. ed. Porto Alegre: Penso, 2018.

BOS, Henk Jan Maarten. Differentials, higher-order differentials and the derivative in the Leibnizian calculus. **Archive for History of Exact Sciences**, v. 14, n. 1, p. 1-90, 1974.

FIORENTINI, Dario; OLIVEIRA, Ana Teresa de Carvalho Correa de. O lugar das matemáticas na Licenciatura em Matemática: que matemáticas e que práticas formativas? **Bolema**: Boletim de Educação Matemática, v. 27, n. 47, p. 917-938, 2013. Disponível em: https://www.scielo.br/j/bolema/a/99f8nsJSh8K9KMpbGrg8BrP/abstract/?lang=pt. Acesso em: 25 de fev. de 2023.

GIRALDO, Victor. Que Matemática para a Formação de Professores? Por uma Matemática Problematizada. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 13., 2019, Cuiabá. **Anais** [...]. Cuiabá: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2019. Disponível em: https://www.sbemmatogrosso.com.br/xiiienem/anais.php. Acesso em: 08 de set. de 2021.

GIRALDO, Victor; ROQUE, Tatiana. Por uma Matemática Problematizada: as Ordens de (Re)Invenção. **Perspectivas da Educação Matemática**, v. 14, n. 35, p. 1-21, 2021. Disponível em: https://periodicos.ufms.br/index.php/pedmat/article/view/13409. Acesso em: 25 de fev. de 2023.

LINS, Rômulo Campos. A formação pedagógica em disciplinas de conteúdo matemático nas licenciaturas em matemática. **Revista de Educação PUC-Campinas**, Campinas, n. 18, p. 117-123, jun. 2005. Disponível em: https://periodicos.puc-campinas.edu.br/reveducacao/article/view/267. Acesso em: 25 de fev. de 2023.

MORENO-ARMELLA, Luis. An essential tension in mathematics education. **ZDM**, v. 46, n. 4, p. 621-633, 2014.

SANTOMÉ, Jurjo Torres. As culturas negadas e silenciadas no currículo. In: SILVA, Tomaz Tadeu da (Org.). **Alienígenas na sala de aula**: uma introdução aos estudos culturais em educação. Petrópolis: Vozes, 1995. p. 159-189.

STEWART, James. **Cálculo**. São Paulo: Thompson, 2006.