O DESENVOLVIMENTO DO RACIOCÍNIO COMBINATÓRIO NA ESCOLARIZAÇÃO BÁSICA

Cristiane Azevedo dos Santos Pessoa[1]
Rute Elizabete de Souza Rosa Borba[2]

Resumo
Neste artigo discute-se a importância de se desenvolver entre os estudantes da escolarização básica o raciocínio combinatório, como uma forma de pensamento que auxilia no aprendizado matemático, bem como de outras áreas do conhecimento, especificamente em conteúdos nos quais a sistematização de informações e análise das mesmas é necessária. Referenciais teóricos são apresentados que defendem a relevância da Combinatória no desenvolvimento de um pensamento lógico proposicional. Dados empíricos de um estudo realizado com 568 estudantes, de escolas públicas e particulares, do 2º ano do Ensino Fundamental ao 3º ano do Ensino Médio serão apresentados e discutidos. Evidencia-se a influência da escolarização e, em particular, do ensino promovido na escola no desenvolvimento do raciocínio combinatório, bem como se reflete quanto à necessidade de serem considerados em sala de aula os variados significados, distintas relações e propriedades e diversificadas representações simbólicas que compõem as situações combinatórias.

Palavras-chave: Raciocínio combinatório; escolarização básica; significados, relações e representações simbólicas.

Abstract
In the present paper the importance of developing combinatorial reasoning in basic schooling as a way of thinking that aids mathematical learning, and from other areas, specifically in subjects in which it is necessary to systematically analyse information, is discussed. Theoretical references are presented that defend the relevance of Combinatorics in the development of logical propositional thinking and empirical data is presented and discussed from a study with 568 students, of private and state schools, from the beginning of Primary School to the end of Secondary School. The results bring evidence of the influence of schooling, in particular the type of teaching, in the development of combinatorial reasoning, and these lead to the need to consider in the classroom the varied meanings, distinct relations and properties and diverse symbolic representations that compose combinatorial situations.

Key words: Combinatorial reasoning, basic schooling, meanings, relations and symbolic representations.

---

[1] Professora do Departamento de Métodos e Técnicas de Ensino da Universidade Federal de Pernambuco e pesquisadora do Grupo de Estudos em Raciocínio Combinatório do Centro de Educação (Geração) – crispessoa@hotmail.com.
[2] Professora do Departamento de Métodos e Técnicas de Ensino e do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica (Edumatec) e líder do Grupo de Estudos em Raciocínio Combinatório do Centro de Educação (Geração) da Universidade Federal de Pernambuco – rborba@ce.ufpe.br.

Combinatória – conceitos e definições

Morgado, Pitombeira de Carvalho, Carvalho e Fernandez (1991) afirmam que a *Análise Combinatória* é a parte da Matemática que analisa estruturas e relações discretas. Merayo (2001) defende que a *Análise Combinatória* é a técnica de saber quantos objetos há em um conjunto sem realmente ter que contá-los, porque essa técnica não necessita listar ou enumerar todos os elementos que formam o conjunto.

A utilidade da *Análise Combinatória* vai além da Matemática Teórica e dos trabalhos em sala de aula. Segundo Guirado e Cardoso (2007), apesar de ter sua origem nos jogos de azar – tais como lançamentos de dados e jogos de carta – ao longo do tempo a *Análise Combinatória* sofreu intenso desenvolvimento e hoje seus métodos são aplicados em diversas áreas como no cálculo das probabilidades, em problemas de transporte, de confecção de horários, de elaboração de planos de produção, de programação linear, de estatística, de teoria da informação, de biologia molecular, de economia, de lógica, etc. Além disso, esses métodos são também utilizados em problemas de Matemática Pura, como na teoria dos grupos e de representações, no estudo dos fundamentos da Geometria, nas Álgebras não associativas, etc.

Portanto, a *Combinatória* nos permite quantificar conjuntos ou subconjuntos de objetos ou de situações, selecionados a partir de um conjunto dado, ou seja, a partir de determinadas estratégias ou de determinadas fórmulas, pode-se saber quantos elementos ou quantos eventos são possíveis numa dada situação, sem necessariamente ter que contá-los um a um.

Assim, no presente estudo, entende-se o *raciocínio combinatório* como um tipo de pensamento que envolve contagem, mas que vai além da enumeração de elementos de um conjunto. Na Combinatória contam-se, baseando-se no raciocínio multiplicativo, grupos de possibilidades, através de uma ação sistemática, seja pelo uso de fórmula, seja pelo desenvolvimento de uma estratégia que dê conta de atender aos requisitos desses tipos de problemas, como a constituição de agrupamentos, a determinação de possibilidades e sua contagem. Neste estudo, portanto, considera-se a *Análise Combinatória* como a parte da Matemática que estuda os agrupamentos a partir de alguns critérios; a *Combinatória* como os tópicos referentes a esta parte da Matemática; o *raciocínio combinatório* como a forma de pensar referente à Combinatória; e *combinação* como um dos significados dos problemas de Combinatória, juntamente com *arranjo*, *produto cartesiano* e *permutação*.

A Combinatória como problema multiplicativo particular

Baseado em Merayo (2001) e classificações anteriores (Nunes e Bryant, 1997; Vergnaud, 1983 e 1991 e PCN, 1997), o presente trabalho classifica os problemas que envolvem *raciocínio combinatório* em uma organização única – não identificada em estudos anteriores. Alguns autores se referem exclusivamente ao *produto cartesiano* quando tratam de problemas combinatórios e outros se referem exclusivamente a *arranjos*, *combinações* e *permutações*. No presente estudo, os quatro tipos de problemas foram considerados como característicos do pensamento combinatório, contribuindo, dessa forma, para a reflexão teórica da necessidade de se considerar este conjunto de problemas no ensino e aprendizagem da Combinatória no Ensino Básico. Os problemas básicos que envolvem *raciocínio combinatório* trabalhados no Ensino Fundamental e Médio organizados neste estudo assumem os seguintes significados[3]: *produto cartesiano, permutação, arranjo e combinação,* os quais podem ser solucionados, dentre outras formas, através do *princípio fundamental da contagem*[4]*.*

A seguir estão colocados os tipos de problemas, ou seja, significados presentes na Combinatória, com seus exemplos, invariantes (relações e propriedades que se mantêm constantes) e características.

- **Produto Cartesiano** (Nunes e Bryant, 1997), **Produto de Medidas** (Vergnaud, 1983, 1991) ou **Combinatória** (PCN, 1997), os quais são considerados no estudo como tipo único:

---

[3] Neste trabalho, quando se refere aos *tipos de problemas de Combinatória* está se referindo a *significados de problemas de Combinatória*, ou seja, tipos de problemas estão aqui considerados em termos de diferentes significados que a Combinatória pode assumir. Cada um dos significados possui invariantes diferentes, mas são todos problemas combinatórios porque possuem a característica de levantamento de possibilidades – por contagem direta ou indireta.

[4] Para compreender o Princípio Fundamental da Contagem, suponhamos que um evento seja constituído de duas etapas sucessivas. A 1ª etapa pode ser realizada de n maneiras distintas. Para cada uma dessas possibilidades, a 2ª etapa pode ser realizada de m maneiras distintas. Então, o número de possibilidades de se efetuar a ação completa é dado por n x m. Esse princípio pode ser generalizado para ações constituídas de mais de duas etapas sucessivas (IEZZI; DOLCE; DEGENSZAJN; PERIGO; ALMEIDA, 2004, p. 307).

Ex.: Para a festa de São João da escola, tem 3 meninos (Pedro, Gabriel e João) e 4 meninas (Maria, Luíza, Clara e Beatriz). Se todos os meninos dançarem com todas as meninas, quantos pares diferentes poderão ser formados?

Invariantes:

- Dados dois (*ou mais*) conjuntos distintos, os mesmos serão combinados para formar um novo conjunto.
- A natureza dos conjuntos é distinta do novo conjunto formado.

O que caracteriza estes problemas é que dois ou mais conjuntos disjuntos (neste caso, o de meninos e o de meninas) são combinados para formarem um terceiro conjunto (o de pares para a dança).

- **Permutação**

Ex.: Calcule o número de anagramas da palavra AMOR.

Invariantes:

- Todos os elementos do conjunto serão usados, cada um apenas uma vez (especificamente para os casos sem repetição);
- A ordem dos elementos gera novas possibilidades.

O que caracteriza esses problemas é que todos os elementos são usados em diferentes ordens para formar as permutações. Para formar todas as permutações com as letras da palavra AMOR, por exemplo, todas as quatro letras devem ser usadas e quando a ordem dos elementos é modificada, novas possibilidades são geradas, por exemplo, AMOR é diferente de AOMR, que é diferente de AMRO.

- **Arranjo**

Ex.: O quadrangular final da Copa do Mundo será disputado pelas seguintes seleções: Brasil, França, Alemanha e Argentina. De quantas maneiras distintas podemos ter os três primeiros colocados?

Invariantes:

- Tendo **n** elementos, poderão ser formados agrupamentos ordenados de 1 elemento, 2 elementos, 3 elementos.... **p** elementos, com **0** < **p** < **n**, sendo **p** e **n** números naturais;
- A ordem dos elementos gera novas possibilidades.

O que caracteriza esses problemas é que de um grupo maior (Brasil, França, Alemanha e Argentina, por exemplo), alguns subgrupos são organizados e a ordem dos elementos gera novas possibilidades, sendo importante na composição das possibilidades, ou seja, a organização Brasil, Alemanha, Argentina é diferente de Brasil, Argentina e Alemanha.

- **Combinação**

Ex.: Três alunos (Mário, Raul e Júnior) participam de um concurso em que serão sorteadas duas bicicletas iguais. Quantos resultados diferentes podem ser obtidos no concurso?

Invariantes:

- Tendo **n** elementos, poderão ser formados agrupamentos ordenados de 1 elemento, 2 elementos, 3 elementos.... **p** elementos, com **0**< **p** < **n, p** e **n** naturais;

- A ordem dos elementos não gera novas possibilidades.

De forma semelhante aos problemas de arranjo, tem-se um conjunto maior e dele são selecionados elementos para formar subconjuntos, porém, de forma diferente, a ordem dos elementos não gera novas possibilidades, como, por exemplo, Mário e Raul serem sorteados constitui o mesmo que Raul e Mário serem sorteados

Estes problemas combinatórios podem ser resolvidos por meio de diferentes formas de *representação*: desenhos, listagens, árvores de possibilidades, tabelas, fórmulas, dentre outras. As diferentes formas de *representação simbólica* ocorrem tanto no que se refere às soluções apresentadas pelos alunos quanto na proposição da questão.

Há outras possíveis classificações ou aspectos diferenciadores dos problemas combinatórios. O presente estudo, porém, tratará dos problemas de *produto cartesiano, arranjo, permutação e combinação,* como exemplificados acima, com agrupamentos simples, sem repetição. Nos problemas apresentados solicitava-se a contagem de possibilidades (não necessariamente a enumeração das mesmas) e apenas o princípio multiplicativo era suficiente, ou seja, não havia escolhas alternativas de um evento *ou* de outro.

Investigações anteriores com alunos da educação básica

Batanero, Navarro-Pelayo e Godino (1997) afirmam que, além da sua importância no desenvolvimento da idéia de probabilidade, a capacidade combinatória é um componente fundamental do pensamento formal. Esta afirmação se relaciona com o que Inhelder e Piaget (1955) defendem em relação ao desenvolvimento do pensamento operatório formal – caracterizado por uma forma lógica de pensar mais generalizada e baseada em proposições e hipóteses.

Trabalhar na escola com problemas combinatórios é relevante para que surjam e se transformem esquemas e relações de caráter combinatório, uma das dimensões que condiciona o aparecimento da lógica das proposições (Inhelder e Piaget, 1955). Na fase das operações concretas, a criança, segundo Piaget, é capaz de trabalhar com situações conhecidas e quando entra para a fase das operações formais ela passa a ser capaz de trabalhar com situações hipotéticas, dessa forma, para Piaget, o *raciocínio combinatório* é evidência de pensamento operatório formal.

Inhelder e Piaget (1955) buscaram investigar a natureza da dificuldade em problemas de *Análise Combinatória* e observaram que, atingindo o estágio das operações formais, os adolescentes são capazes de desenvolver procedimentos sistemáticos de enumeração e de contagem combinatória. Estes autores também verificaram que a compreensão das operações combinatórias desenvolve-se através de estágios. Eles defendem que crianças no primeiro estágio usam procedimentos de listagem aleatória, sem tentar encontrar uma estratégia sistemática ao resolverem problemas combinatórios; no segundo estágio, as crianças se utilizam da estratégia de tentativa e erro, descobrindo alguns procedimentos empíricos com alguns elementos; e, no período das operações formais, os adolescentes descobrem procedimentos sistemáticos de resoluções combinatórias, embora, para resolver sistematicamente permutações, só por volta dos 15 anos de idade.

Os estágios piagetianos referentes ao desenvolvimento dos alunos em permutações são os seguintes:

- **Estágio IA** – Não consegue encontrar todas as *permutações* possíveis entre os elementos e tem dificuldade em compreender que os mesmos elementos podem ser arrumados de várias maneiras diferentes.
- **Estágio IB** – Pode encontrar, por ensaio e erro, as possíveis *permutações* entre os elementos, mas não tem certeza de que esgotou todas as possibilidades.
- **Estágio IIA** – Encontra todas as *permutações* por ensaio e erro (com combinações menores) e tem a consciência de que as esgotou, mas com combinações maiores não consegue resolver.

- **Estágio IIB** – Consegue generalizar para mais elementos a descoberta feita para as combinações com poucos elementos.
- **Estágio III** – Todas as possíveis *permutações* são geradas sem necessidade de intervenção.

Ressalta-se que Inhelder e Piaget (1955) analisaram mais especificamente o desenvolvimento de um dos tipos de problemas que envolvem *raciocínio combinatório* – as *permutações* – sendo necessário ampliar esta análise para outros significados, como os que envolvem *produtos cartesianos, arranjos* e *combinações.*

Se os resultados de Inhelder e Piaget (1955) podem levar à conclusão de um desenvolvimento do raciocínio combinatório associado meramente ao desenvolvimento do pensamento lógico, Fischbein (1975) defende que a capacidade de resolução de problemas de combinatória não poderá ser alcançada sem o ensino formal. Fischbein, Pampu e Minzat (1970) estudaram o efeito de instruções específicas sobre a capacidade combinatória e os resultados apontam que crianças de 10 anos são capazes de aprender idéias combinatórias com a ajuda do diagrama de árvore.

Portanto, há defesa, a partir de pressupostos de Piaget, de desenvolvimento de raciocínio combinatório à medida que se avança nos estágios de desenvolvimento e há defesa, por parte de Fischbein, da importância da escola, do ensino formal, neste desenvolvimento. No presente estudo, acredita-se na importância da escola no processo de aprendizagem formal de conceitos, porém, também não se pode deixar de defender aspectos relacionados ao desenvolvimento extra-escolar, à maturidade e ao próprio desenvolvimento cognitivo.

Outro estudo que trata de estágios de desenvolvimento do raciocínio combinatório é o de Soares e Moro (2006). Estas pesquisadoras, ao discutirem o que denominam de psicogênese do *raciocínio combinatório*, encontraram, de forma semelhante ao que descrevem Inhelder e Piaget (1955), diferentes níveis de desenvolvimento em 31 alunos de 5ª série e 29 alunos de 6ª série. Para chegar a estes resultados, estas pesquisadoras aplicaram coletivamente um teste com quatro problemas multiplicativos do tipo *produto cartesiano* com duas e/ou três variáveis e valores numéricos pequenos e/ou grandes, sem e com presença de valores distractores[5]. Estas autoras destacam os seguintes níveis:

- **Nível I -** ***da ausência de solução combinatória***

As soluções de *ausência de solução combinatória* têm como característica revelar limites de compreensão ou interpretação, pelos participantes. Esses limites resultam, segundo estas autoras, em composições numéricas por justaposição de algarismos do texto e em cálculos aritméticos os mais variados com os números obtidos, na tentativa de dar, de algum modo, resposta numérica ao problema. Outra forma de manifestação dos limites mencionados é a de apelar a critérios relacionados ao uso social na busca da solução.

- **Nível II -** ***dos primeiros indícios de soluções combinatórias*.**

Soares e Moro (2006) colocam como características que marcam as soluções de Nível II: nenhuma delas apresenta total ausência de referência ao texto do problema, e nelas prevalecem a marca dos valores distractores e a interpretação do conteúdo do problema conforme contexto sócio-cultural. Por vezes, ainda, fazem-se presentes, complementares às soluções, cálculos aritméticos envolvendo tanto valores numéricos do texto (incluídos os distractores), como valores numéricos estranhos ao texto.

- **Nível III** ***- alguma aproximação de soluções combinatórias.***

As soluções do nível III diferenciam-se dos níveis anteriores pelas seguintes características: não são distorcidas nem pelos valores distractores, nem por interpretações do conteúdo do problema restritas a contextos sócio-culturais específicos. Há presença de cálculos (mental, ou não, e, predominantemente, multiplicativos) com parte dos valores de algumas das variáveis.

- **Nível IV -** ***presença de soluções combinatórias*.**

Apoiadas em diagramas ou em outro recurso gráfico (listas, tabelas, por exemplo), as soluções desse nível diferenciam-se das do nível anterior ao representarem a relação de *um para muitos* entre todos os valores de todas as variáveis dos problemas, sejam elas duas ou três. E há, na elaboração dessas soluções, o emprego de procedimentos econômicos, inclusive os com marca algébrica.

[5] Entende-se por *valores distractores* aqueles números expressos nos enunciados que não devem ser levados em consideração na solução dos problemas, ou seja, fazem parte do enunciado, mas não influenciam na situação-problema.

Como foi visto, Soares e Moro (2006) destacam níveis e sub-níveis de construção do *raciocínio combinatório* compondo uma hierarquia que corresponde a soluções desde as não pertinentes e/ou pertinentes ao problema, sem sinal de *raciocínio combinatório*, até aquelas em que há sinais desse raciocínio.

Ressalta-se que, assim como Inhelder e Piaget (1955) se detiveram na análise de problemas de *permutação*, Soares e Moro (2006) concentraram suas análises nos problemas de *produto cartesiano*. Estes estudos também analisam faixas etárias mais restritas, sendo, portanto, necessária a realização de pesquisas – como o presente estudo – que investiguem alunos de faixas etárias mais amplas e que envolvam significados diferenciados presentes em problemas que envolvem *raciocínio combinatório*. Investigações mais abrangentes – em idades de participantes e situações envolvidas – podem possibilitar o estudo mais amplo do desenvolvimento deste tipo de raciocínio.

Estudo do desenvolvimento dos 7 aos 17 anos

Objetivos

É relatado no presente artigo um estudo que tinha como objetivo geral analisar a compreensão de alunos do 2º ano do Ensino Fundamental ao 3º ano do Ensino Médio sobre problemas que envolvem o *raciocínio combinatório,* e como objetivos específicos: verificar o desempenho dos alunos nos diversos tipos de problemas de *Combinatória*; observar o desempenho dos alunos ao longo do período de escolaridade lidando com as mesmas questões que envolvem o *raciocínio combinatório*; analisar como alunos das séries iniciais resolvem problemas cujos conceitos não foram ainda formal e explicitamente trabalhados pela escola e como alunos de séries posteriores lidam com as situações após o conhecimento de procedimentos formais.

Participantes

Participaram do estudo alunos de quatro escolas, sendo duas públicas e duas particulares: uma pública e uma particular que atendem alunos do 2º ao 5º ano do

Ensino Fundamental[6]; e uma pública e uma particular que atendem tanto alunos do 6º ao 9º ano do Ensino Fundamental quanto alunos do 1º ao 3º ano do Ensino Médio. A pesquisa abrangeu, assim, escolas públicas e particulares em três níveis distintos de escolarização, quais sejam, 2º ao 5º ano do Ensino Fundamental, 6º ao 9º ano do Ensino Fundamental e 1º ao 3º ano do Ensino Médio, totalizando 568 alunos.

As escolas e turmas foram escolhidas por conveniência, ou seja, pela disponibilidade em ceder o espaço para a pesquisa. Os alunos participaram da pesquisa a partir da sua disponibilidade no momento do teste, por esta razão têm-se números diferentes de alunos em cada série/turma analisada.

Procedimentos metodológicos

Cada aluno resolveu, individualmente, uma ficha contendo oito problemas de *combinatória,* dois de cada tipo: *produto cartesiano, combinação, arranjo e permutação.* Os quatro primeiros problemas envolviam números que levavam à maior número de possibilidades na solução e os quatro últimos envolviam menos possibilidades, de modo que em cada tipo de problema o aluno entrava em contato com problemas de maiores e de menores possibilidades envolvidas.

Foi colocado para os alunos que os problemas poderiam ser resolvidos da forma que eles quisessem e considerassem melhor, seja por desenhos, tabelas, gráficos, operações numéricas ou quaisquer outras formas. Dessa maneira, as soluções poderiam ser encontradas através de estratégias menos formais, como desenhos, tabelas, árvores de possibilidades, desenhos de diversos tipos ou através de estratégias mais formais, como o algoritmo da multiplicação (em alguns casos), o *princípio fundamental da contagem* ou o uso de fórmulas.

Com o objetivo de que os alunos se sentissem livres para resolver os problemas, não foi estipulado tempo para a resolução. Para os alunos de 2º e 3º ano do Ensino Fundamental, foi feita pelo pesquisador a leitura dos enunciados dos problemas.

[6] Por uma questão de organização da linguagem escrita, neste estudo optou-se por adotar a denominação de uso corrente na linguagem oral e não nos documentos oficiais: *Ensino Fundamental I* para os anos referentes ao 2º, 3º 4º e 5º anos e de *Ensino Fundamental II* para os anos referentes ao 6º, 7º, 8º e 9º anos.

Proposta de análise de dados

A análise dos dados do estudo foi realizada de forma qualitativa e quantitativa, cuja estatística foi efetuada através do Statistical Package for the Social Sciences – SPSS.

Analisou-se o desempenho dos alunos a partir das variáveis *tipo de escola* (pública e particular), *nível de ensino* (Ensino Fundamental I, Ensino Fundamental II e Ensino Médio) e *significados de Combinatória dos problemas* (arranjo, combinação, permutação e produto cartesiano).

Apresentação e análise de dados

Análise de desempenho por tipo de escola

Nesta seção serão discutidos os resultados buscando contemplar a análise de desempenho por tipo de escola (Tabela 1). Para um maior detalhamento dessa discussão, são contempladas na análise da Tabela 2 as variáveis tipo de escola por ano de escolarização e significado de Combinatória do problema.

Tabela 1. Percentuais de acerto por tipo de escola.

Escola Pública	13,4
Escola Particular	34,81

É preciso salientar que neste aparente desempenho fraco – tanto dos alunos da escola pública quanto da particular – foram considerados apenas acertos completos, ou seja, se os alunos conseguiam chegar aos resultados corretos. Deve-se, porém, considerar que há um número muito maior de acertos parciais, ou seja, casos nos quais os alunos iniciaram corretamente suas soluções e se aproximaram das respostas corretas, mas não a obtiveram por dificuldades de sistematização em suas resoluções. Além disso, é preciso considerar que estes valores indicam o percentual de acertos envolvendo os alunos de todos os anos de escolarização.

Foi observada diferença significativa de desempenho em função do tipo de escola (pública e particular), evidenciada pela análise de variância: tipo de escola, $F(1, 567) = 206.498$, $p < 0.0001$.

A Tabela 2, a seguir, é um detalhamento da Tabela 1 discutida anteriormente. O objetivo principal da apresentação da Tabela 2 é discutir a diferença entre os dois tipos de escola pesquisados: pública e particular, analisando-se os acertos por tipo de escola e por ano de escolarização. Nas seções subsequentes, os desempenhos por ano de escolarização e por tipo de problema serão foco de análise.

Tabela 2. Percentual de acertos por tipo de escola, por ano de escolarização e por significado de Combinatória do problema.

		Arranjo	Combinação	Permutação	Produto Cartesiano
Escola pública	2º ano EF	0	0	0	0
	3º ano EF	1,6	4,8	1,6	12,9
	4º ano EF	1,3	5,4	1,3	4
	5º ano EF	1,6	8,3	3,3	15
	6º ano EF	11,1	2,7	0	30,5
	7º ano EF	13,8	2,7	0	41,6
	8º ano EF	23,6	2,6	2,6	42,1
	9º ano EF	36,8	0	10,5	73,6
	1º ano EM	19	4,7	11,9	69
	2º ano EM	22,2	13,8	2,7	77,7
	3º ano EM	23,6	13,1	7,8	60,5
Escola particular	2º ano EF	0	1,7	0	0
	3º ano EF	6	19,6	3	15,1
	4º ano EF	5,9	14,2	4,7	40,4
	5º ano EF	27,7	14,8	5,5	81,4
	6º ano EF	24	20	20	76
	7º ano EF	50	7,4	31,4	90,7
	8º ano EF	27	22,9	47,9	81,2
	9º ano EF	58,3	25	33,3	91,6
	1º ano EM	48,1	7,4	53,7	94,4
	2º ano EM	58	4	40	88
	3º ano EM	68,9	27,5	84,4	87,9

Obs.: EF = Ensino Fundamental; EM = Ensino Médio

Na Tabela 2, verifica-se que, de um modo geral, à medida que se avança nos anos de escolarização também se avança no nível de desempenho, tanto na escola pública quanto na particular, embora, de um modo geral, esta segunda apresente um melhor desempenho que a primeira.

Uma importante observação é a de que os alunos tanto da escola pública quanto da particular partem de um nível de desempenho bem semelhante, porém, à medida que os anos de escolarização avançam, os dois tipos de escola se distanciam cada vez mais. Assim, à medida que o nível de escolaridade avança, as diferenças de desempenho se distanciam em favor dos alunos das escolas particulares.

Na análise qualitativa observa-se que, apesar de no 2º ano do Ensino Fundamental os alunos já apresentarem estratégias interessantes, não há acertos no sentido de desenvolver uma estratégia apresentando compreensão total do cálculo relacional (VERGNAUD, 1991) e nem uma resposta correta no que se refere ao cálculo numérico (VERGNAUD, 1991). Porém, a partir do 3º ano do Ensino Fundamental, o desempenho dos alunos dos dois tipos de escola começa a se diferenciar e, como afirmado anteriormente, os da escola particular apresentam um desempenho significativamente superior em relação aos alunos da escola pública.

Diante do fato de iniciarem a partir de um mesmo nível de desempenho, há evidências que não há uma dificuldade cognitiva nos alunos da escola pública que os diferencia dos alunos da escola particular. As escolas particulares envolvidas no estudo parecem estar estimulando melhor os alunos a pensarem em problemas diferenciados e a buscarem sistematicamente soluções para situações distintas. Segundo Fischbein, Pampu e Minzat (1970), o desenvolvimento do raciocínio combinatório tem uma forte influência da escolarização, pois a escola pode estimular que os alunos busquem estratégias para solucionar problemas de natureza diferenciada, bem como incentivá-los à busca de sistematizações em suas soluções.

Mesmo com as diferenças de desempenho entre os tipos de escola, observa-se que nas duas redes de ensino ocorrem avanços à medida que avança o nível de ensino, ou seja, a escola pública apresenta um desempenho inferior à escola particular, mas analisando-se o desempenho dos alunos verifica-se avanço de um nível de ensino para o seguinte – tanto na escola particular quanto na pública. Este avanço de desempenho por nível de ensino será analisado a seguir.

Análise de desempenho por nível de ensino

Nesta seção será analisado o desempenho dos alunos por nível de ensino (Tabela 3).

Tabela 3. Percentuais de acerto por nível de ensino.

Ensino Fundamental I	9,3
Ensino Fundamental II	33,5
Ensino Médio	43,2

Entre os distintos níveis de escolarização, foram observadas diferenças significativas no desempenho dos alunos ($F (2, 566) = 173.826$ $p < 0.001$). Testes post-hoc foram realizados (Tukey MSD e Bonferroni) e indicaram diferenças significativas ($p < 0.001$) entre os três níveis de ensino, ou seja, os desempenhos no Ensino Fundamental II foram significativamente superiores aos desempenhos no Ensino Fundamental I e os desempenhos no Ensino Médio foram significativamente superiores aos do Ensino Fundamental II.

A Tabela 3 evidencia que há progressos de um nível de ensino para outro com grandes saltos em termos de desempenho do Ensino Fundamental I para o Ensino Fundamental II, mas menores avanços entre o Ensino Fundamental II e o Ensino Médio (embora as diferenças sejam significativas). Parece, assim, haver evidência de que a maturidade e/ou experiências extra-escolares ou escolares, não necessariamente relacionadas de forma direta ao ensino da Combinatória, têm uma grande influência nos desempenhos, pois nos anos finais do Ensino Fundamental os alunos melhoram significativamente mesmo sem instrução escolar específica.

É importante lembrar que nestas análises está sendo considerada como acerto a finalização total do problema, com a resposta correta. Porém, acertos intermediários ocorrem em todos os níveis de ensino. Portanto, embora o Ensino Fundamental I apresente um percentual baixo de acertos (9,3%), os alunos demonstram interessantes estratégias de resolução e diferentes níveis de compreensão em relação aos problemas.

Há um avanço grande de desempenho no Ensino Fundamental II se comparado ao Ensino Fundamental I. Porém, dos alunos do Ensino Médio esperava-se um avanço maior, pois se previa que o possível trabalho formal com a combinatória ocorrida neste nível de ensino tivesse um impacto maior no desempenho.

Observou-se, ao analisar os dados, que, ao se utilizarem de fórmulas, alunos ainda o fazem de maneira inadequada, demonstrando que mesmo formalizando esse ensino, talvez o trabalho não esteja ocorrendo de maneira adequada, que deveria ajudar o aluno a pensar sobre a lógica implícita em cada significado de problema estudado (*arranjo*, *combinação*, *permutação* e *produto cartesiano*). Assim, parece que o *cálculo relacional* (VERGNAUD, 1991) fica relegado, priorizando o *cálculo numérico* através de fórmulas, bem como os invariantes (VERGNAUD, 1986) dos diferentes significados nem sempre são analisados, discutidos, refletidos, não ajudando, assim, o aluno a desenvolver a compreensão das diferentes lógicas dos problemas.

Diante da necessidade de se desenvolver a compreensão dos diferentes tipos de problemas de Combinatória (com suas variações em termos de significados envolvidos, de invariantes presentes nas situações e das representações simbólicas utilizadas), é importante que desde o Ensino Fundamental I sejam exploradas estratégias espontâneas para a resolução de situações que envolvam significados e invariantes diversos, estimulando os alunos ao uso de diferentes representações simbólicas (VERGNAUD, 1986), considerando estes aspectos nos diferentes níveis de ensino e aprofundando-os à medida que se avança nos anos escolares. É necessário, assim, explorar os *conceitos-em-ação* que os alunos apresentam para, a partir do nível de conhecimento evidenciado, aprofundar os saberes relacionados à Combinatória. Ao buscar acompanhar as estratégias utilizadas pelos alunos, pode-se identificar quais *teoremas-em-ação* os alunos estão utilizando e, assim, melhor auxiliá-los no desenvolvimento das relações predicativas (VERGNAUD, 2009) das situações combinatórias, ou seja, as historicamente construídas e aceitas pela escola.

Além da necessidade de acompanhamento dos processos desenvolvidos pelos alunos, é importante que a escola tenha consciência de que conhecimentos são desenvolvidos também fora dela, assim, não só o que se trabalha dentro da escola com conteúdos específicos auxilia no desenvolvimento do conhecimento do aluno, mas também o que se aprende fora do contexto escolar se soma às experiências dos alunos e formam uma teia, interferindo no processo de aprendizagem. Carraher, Carraher e Schliemann (1988) defendem que conhecimentos ocorrem dentro e fora da escola e esta precisa levar em consideração os diferentes conhecimentos dos alunos para, assim, poder desenvolver o trabalho de formalização dos saberes. Porém, não se pode negar a importância da escola no desenvolvimento do raciocínio combinatório, pois esta tem um papel fundamental na formalização dos conhecimentos, na sistematização de saberes que ocorrem dentro e fora do seu âmbito e, neste sentido, existem conhecimentos que só serão sistematizados, organizados, ampliados e aprofundados na escola. Nessa direção, Fischbein (1975) afirma que a capacidade de resolução de problemas combinatórios nem sempre é alcançada na idade adulta, sendo necessária a instrução escolar específica para que esta capacidade se dê.

Análise de desempenho por significado de Combinatória dos problemas

O objetivo da apresentação da Tabela 4, a seguir, é chamar a atenção sobre as diferenças nos significados de Combinatória dos problemas nos diferentes níveis de ensino. Nesta tabela tem-se o percentual de acertos por nível e por significado envolvido nos problemas.

Tabela 4. Percentual de acertos por significado de Combinatória do problema e por nível de ensino

	Arranjo	Combinação	Permutação	Produto Cartesiano
Ensino Fundamental I	10,5	5,2	2,5	42,3
Ensino Fundamental II	32,1	11,4	20,4	68,9
Ensino Médio	43,1	12,2	38,4	81,2

Ao analisar o desempenho dos alunos por nível de ensino e por significado de Combinatória dos problemas, percebe-se que mesmo nos problemas em que são apresentados desempenhos mais baixos, como os de *combinação*, há um avanço no desempenho à medida que se avança nos níveis.

A seguir serão discutidos os desempenhos de acordo com os significados dos problemas. Por meio de t-testes, observou-se que há diferenças significativas (em nível de $p < 0.001$) entre cada um dos significados de Combinatória dos problemas. Dessa forma, os desempenhos diferenciaram-se significativamente nos problemas de *arranjo*, de *combinação*, de *permutação* e de *produto cartesiano*, quando comparados entre si.

Pode-se observar a partir da Tabela 4 que, de acordo com o desempenho dos alunos nos diferentes níveis de ensino, os problemas mais fáceis são os de *produto cartesiano*, seguidos dos de *arranjo* e os mais difíceis são os de *permutação* e de *combinação*, este último com percentuais bastante baixos de acertos em todos os níveis, sendo a permutação o significado de mais difícil compreensão no Ensino Fundamental I.

Os problemas de *produto cartesiano* são os que apresentam o maior percentual de acertos em todos os três níveis pesquisados e este melhor desempenho pode, em parte, ser creditado ao ensino nas escolas, pois a partir do 3º ano do Ensino Fundamental problemas que envolvem o raciocínio combinatório são, em geral, trabalhados e os de produto cartesiano são os únicos problemas combinatórios explicitamente trabalhados desde cedo na escolarização básica. Quando as estruturas multiplicativas são introduzidas por volta do 3º ou 4º ano do Ensino Fundamental, o produto cartesiano é trabalhado junto com outros significados dos problemas de estruturas multiplicativas (proporcionalidade, configuração retangular e comparativa, utilizando os termos dos Parâmetros Curriculares Nacionais – Brasil, 1997). Salienta-se que alguns tipos de problemas de combinatória, como os problemas de *arranjos*, *combinações* e *permutações*, não são explicitamente ensinados nestas séries, embora os PCN (BRASIL, 1997) orientem para que sejam trabalhados. Barreto, Amaral e Borba (2007) evidenciaram que há um trabalho implícito e não sistematizado com os outros tipos de problema – em termos de significados envolvidos – em alguns livros didáticos de anos iniciais de escolarização. Apesar da ausência de um trabalho explícito e sistematizado com *arranjos*, *combinações* e *permutações*, alguns alunos foram bem sucedidos em suas resoluções destas situações. O bom desempenho nestes casos pode ser conseqüência de experiências escolares, mesmo não explícitas ou com outros conteúdos que auxiliam no desenvolvimento de um modo de pensar sistematizado, ou, ainda, pode indicar um possível desenvolvimento extra-escolar do *raciocínio combinatório*.

Dos significados menos trabalhados no Ensino Fundamental (*arranjo, permutação* e *combinação),* os problemas de *arranjo* são os que se apresentam como mais fáceis, de acordo com o desempenho dos alunos pesquisados. Este significado dos problemas de Combinatória apresenta como um de seus invariantes o agrupamento de conjuntos menores que a quantidade dada pelo conjunto maior, ou seja, tendo, por exemplo, um conjunto com 6 elementos, pode-se solicitar que sejam formados agrupamentos de 1, 2, 3, 4 e 5 elementos. Assim, de acordo com este invariante de arranjos, tendo n elementos, poderão ser formados agrupamentos ordenados de 1 elemento, 2 elementos, 3 elementos.... p elementos, com $0 < p < n$, sendo p e n números naturais. Outro invariante conceitual de arranjo é o de que a ordem dos elementos gera novas possibilidades. Assim, por exemplo, se 3 de 4 elementos forem selecionados, a ordem específica destes elementos gera novas possibilidades, ou seja, ABC é uma possibilidade distinta de ACB, que por sua vez é diferente da possibilidade BAC e sucessivamente. Dessa forma, no caso de situações de *arranjos*, ao listarem todas as possibilidades, os alunos não terão que eliminar algumas destas, o que ocorre no caso das *combinações*, para as quais os alunos terão que atentar para os casos que são iguais, ou seja, nas quais os elementos apenas variam em ordem, mas que não constituem possibilidades distintas.

Se os problemas de *arranjo* forem comparados aos de *permutação,* percebe-se que os de permutação necessitam de uma sistematização bastante rigorosa para que o aluno não se perca na organização das possibilidades, pois percebendo os invariantes (VERGNAUD, 1990) da permutação, o aluno precisa levar em consideração que todos os elementos do conjunto serão usados, cada um apenas uma vez (especificamente para os casos sem repetição); e a ordem dos elementos gera novas possibilidades. O que tem ocorrido de um modo geral nas soluções desses problemas é que o aluno se dá por satisfeito listando apenas alguns casos e não buscando apresentar todos os possíveis casos.

De um modo geral, os problemas de *combinação* foram os que se apresentaram como os mais difíceis para os alunos, pois neste significado específico de problemas os alunos precisam perceber que de forma semelhante aos problemas de *arranjo,* tem-se um conjunto maior e dele são retiradas possibilidades para formar subconjuntos, porém, de forma diferente, a ordem dos elementos não gera novas possibilidades. Este invariante é necessário ser considerado e os alunos precisam observar quais casos são idênticos e não podem ser contados mais de uma vez. Assim, por exemplo, para ganhar a bicicleta do sorteio no Problema 7 (*Três alunos (Mário, Raul e Júnior) participam de um concurso em que serão sorteadas duas bicicletas. Quantos resultados diferentes podem ser obtidos no concurso?)*, a dupla Mário/Raul é igual à dupla Raul/Mário, assim como a dupla Mário/Júnior é igual a Júnior/Mário e a dupla Raul/Júnior é igual à dupla Júnior/Raul. O total de possibilidades, então, precisa ser reduzida à metade, uma vez que há possibilidades iguais duas a duas. Muitas vezes o aluno não percebe que a segunda opção de cada formação é igual à primeira e uma delas deve ser eliminada, sendo a resposta correta 3 e não 6.

Deve-se ressaltar que o problema proposto de combinação com números grandes requeria um procedimento mais formalizado, pois dificilmente se conseguiria chegar à solução 126 utilizando uma estratégia menos formal, pela dificuldade de enumerar os elementos.

Ao analisar o desempenho nos diferentes níveis de escolarização por significado de Combinatória dos problemas, confirma-se a colocação anterior de que há avanços de desempenho à medida que se avança nos níveis de escolarização e, no caso da análise detalhada a partir dos problemas, percebe-se que esse avanço é geral em cada significado de problema pesquisado, ou seja, mesmo nos problemas com mais baixo percentual de acertos, como nos problemas de combinação, há crescimento de desempenho nos níveis de ensino.

A análise por significado do problema evidencia que diferentes desempenhos ocorrem com os distintos problemas, ou seja, alguns se apresentam mais fáceis e outros mais difíceis para os alunos pesquisados. Confirma-se o que se esperava, ou seja, os problemas de *produto cartesiano* são mais fáceis do que os demais e, dos mais difíceis, os de *arranjo* são os que apresentam um maior percentual de acertos, seguidos pelos de *permutação* e por fim os de *combinação*. Estes resultados se assemelham aos de um estudo realizado pelos pesquisadores portugueses Correia e Fernandes (2007) com alunos do 9º ano, envolvendo problemas de *permutação simples, arranjo com repetição, arranjo simples e combinação simples,* no qual os resultados obtidos apresentam um maior percentual de acertos nos problemas de arranjos com repetição e de arranjos simples, seguidos dos problemas de permutação e como mais difíceis, os de combinação.

Os problemas de produto cartesiano são trabalhados na escola desde os anos iniciais, desde o início do trabalho com multiplicação. Os de combinação, além de serem trabalhados explicitamente apenas no Ensino Médio, apresentam um invariante que possivelmente dificulta a formação das combinações, pois a mudança na ordem dos elementos não gera novas possibilidades e os alunos, em grande parte das vezes, não se dão conta dessa característica e acabam repetindo possibilidades e, assim, extrapolando-as. Os problemas de arranjo e de permutação são mais fáceis que os de combinação e mais difíceis que os de produto cartesiano, de acordo com o desempenho demonstrado pelos alunos. Os de arranjo se apresentam como mais fáceis do que os de permutação. Estes três tipos de problemas combinatórios requerem a compreensão de quais elementos dos conjuntos dados podem ser selecionados e como serão organizados. A dificuldade na permutação reside em organizar todos os elementos em ordens variadas e nas combinações é preciso verificar quais casos são idênticos para não contá-los duplamente.

Considerações finais

Um dos aspectos que se pode considerar como contribuição do presente estudo é o levantamento sobre o desenvolvimento do raciocínio combinatório realizado com uma grande quantidade de alunos em três níveis da Educação Básica, no qual se tem um panorama de como alunos de diferentes níveis, de diferentes idades, de escolas públicas e particulares estão pensando sobre este conhecimento.

Com a presente investigação, buscou-se defender a tese que o desenvolvimento do *raciocínio combinatório* ocorre em um longo período de tempo, influenciado por aspectos extra-escolares, assim como também por vivências escolares, sejam elas relacionadas direta ou indiretamente às situações combinatórias. Este desenvolvimento é evidenciado desde os anos iniciais do processo de escolarização, com estratégias que demonstram níveis de conceitualizações que vão se modificando, graças às diversas experiências – escolares ou não – no sentido de uma maior sistematização e formalização na compreensão dos diversos significados da combinatória. Diante dos resultados, é preciso que a escola reconheça esse desenvolvimento e busque aproveitar as pistas fornecidas pelas diversas formas que o aluno utiliza para resolver e responder os problemas combinatórios, para que possa auxiliá-los nos processos de sistematização, aprofundamento, ampliação e formalização dos seus conhecimentos referentes à Combinatória.

Destaca-se a importância de serem considerados em sala de aula os variados significados, distintas relações e propriedades e diversificadas representações simbólicas que compõem as situações combinatórias para que estas sejam aproveitadas da melhor forma possível, no sentido de auxiliar os alunos no desenvolvimento desse raciocínio.

Espera-se ter contribuído com o presente estudo para uma melhor compreensão de como se dá o desenvolvimento do raciocínio combinatório, evidenciando os fatores que influenciam nesta construção. A análise do desempenho de alunos – influenciados por suas experiências escolares e extra-escolares – pode contribuir para a reflexão de como conceitos combinatórios devem ser trabalhados em sala de aula.

Embora no dia-a-dia o levantamento de possibilidades não ocorra necessariamente de maneira sistemática, o desenvolvimento de um pensamento como o utilizado em situações combinatórias é útil no pensar matemático e de outras áreas do conhecimento. Se bem trabalhada na escola, os alunos poderão perceber o valor da Combinatória para resolver situações cotidianas – escolares e extra-escolares.

REFERÊNCIAS

BARRETO, Fernanda; AMARAL, Fábio; BORBA, Rute. Como o raciocínio combinatório tem sido apresentado em livros didáticos de séries iniciais. **Caderno de Trabalhos de Conclusão de Curso de Pedagogia**, Recife: UFPE, 2007, v. 2, p. 1-21.

BATANERO, Carmen; NAVARRO-PELAYO, Virginia; GODINO, Juan. Effect of the implicit combinatorial model on combinatorial reasoning in secondary school pupils. **Educational Studies in Mathematics** 32, 1997, pp.181-199.

BRASIL, MEC. **Parâmetros Curriculares Nacionais**. Matemática. 1º e 2º ciclos. Brasília: Secretaria de Ensino Fundamental, 1997.

CARRAHER, Terezinha Nunes; CARRAHER, David; SCHLIEMANN, Analúcia. **Na vida dez, na escola zero**. São Paulo: Cortez, 1988.

CORREIA, P. F.; FERNANDES, J. A. Estratégias intuitivas de alunos do 9º ano de escolaridade na resolução de problemas de combinatória. **Libro de Actas do Congresso Internacional Galego-Português de Psicopedagoxia.** A. coruña/Universidade de Coruña: Revista Galego-Portuguesa de Psicoloxia e Educación, 2007.

FISCHBEIN, Efraim. **The Intuitive Sources of Probabilistic Thinking in Children**, Reidel: Dordrecht, 1975.

FISCHBEIN, Efraim; PAMPU, Ileana; MINZAT, Ion. Effects of age and instruction on combinatory ability in children. **The British Journal of Educational Psychology,** nº 40, 1970.

GUIRADO, João Cesar; CARDOSO, Evelyn. Análise combinatória: da manipulação à formalização de conceitos. **Anais do IX Encontro Paranaense de Educação Matemática.** Paraná, 2007.

IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; DEGENSZAJN, David; PÉRIGO, Roberto; ALMEIDA, Nilze. **Matemática**: Ciência e aplicações. 2ª série do Ensino Médio. São Paulo: Atual, 2004.

INHELDER, Barbara; PIAGET, Jean. **De la logique de l'enfant à la logique se l'adolescent**. Paris: Presses Universitaires de France, 1955.

MERAYO, Felix. **Matemática Discreta**. Madri: Editora Thomson Paraninfo S.A., 2001.

MORGADO, Augusto; PITOMBEIRA DE CARVALHO, João; PINTO DE CARVALHO, Paulo; FERNANDEZ, Pedro. **Análise combinatória e probabilidade**. Rio de Janeiro: Graftex, 1991.

NUNES, Terezinha; BRYANT, Peter. **Crianças fazendo matemática**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1997.

SOARES, Maria Teresa; MORO, Maria Lúcia. Psicogênese do raciocínio combinatório e problemas de produto cartesiano na escola fundamental. **Anais do III Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática**. Águas de Lindóia, SP, 2006.

VERGNAUD, Gérard. **El niño, las matemáticas y la realidad** - Problemas de la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria. Mexico: Trillas, 1991.

VERGNAUD, Gérard. La théorie de champs conceptuels. **Recherches en Didactique de Mathématiques,**, vol 10, n°2.3, Pensée Sauvage: Grenoble, França. 1990, pp. 133-170.

VERGNAUD, Gérard. Multiplicative structures. In: LESH, R.; Landau, M. (Eds.). **Acquisition of mathematics**: Concepts and processes. New York: Academic Press, 1983.

VERGNAUD, Gérard. Psicologia do desenvolvimento cognitivo e didática das matemáticas. Um exemplo: as estruturas aditivas. **Análise Psicológica, 1,** 1986, pp. 75-90.

VERGNAUD, Gérard. The theory of conceptual fields. **Human Development**. 52, 2009, 83-94.