QUANDO E COMO DEVEMOS INTRODUZIR A DIVISÃO NAS SÉRIES INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL? CONTRIBUIÇÃO PARA O DEBATE

Sandra Magina[1] – PUC-SP
Aparecido dos Santos[2] - FIESI e PUC-SP
Vera Merlini[3] – PUC-SP

Resumo: Este artigo objetiva apresentar e discutir as estratégias empregadas por estudantes das séries iniciais do Ensino Fundamental e seus desempenhos na resolução de situações de divisão. Trata-se de um estudo descritivo analítico, desenvolvido a partir das idéias teóricas de Vergnaud (1990; 1998) de Campo Conceitual, mais especificamente das Estruturas Multiplicativas. O estudo é parte integrante do projeto de pesquisa "(re)significar as estruturas multiplicativas a partir da formação 'ação-reflexão-planejamento-ação' do professor", financiado pelo CNPq e desenvolvido por pesquisadores do grupo de pesquisa "REPARE em EdMat – Reflexão, Planejamento, Ação, Reflexão em Educação Matemática". Ele consistiu da aplicação de um teste em 349 estudantes do Ensino Fundamental, de uma Escola Pública de São Paulo, assim distribuídos: 80 estudantes da 1ª série, 86 da 2ª, 94 da 3ª e 89 da 4ª série. O teste foi composto por 13 questões todas envolvendo situações da estrutura multiplicativa. A aplicação ocorreu simultaneamente em toda a escola, ficando cada professora responsável pela condução de sua turma, com a supervisão de três pesquisadores. Neste artigo será apresentado o resultado de 3 questões envolvendo situação de divisão, sendo uma partitiva e duas de quotitiva (envolvendo coleção e não-coleção). As variáveis "uso de recurso pictórico" e "uso de recurso numérico" na resolução foram analisadas. A análise também permitiu a identificação de quatro níveis de estratégias de resolução associadas ao raciocínio multiplicativo.

Palavras-chave: Estrutura Multiplicativa, Divisão, Ensino Fundamental, Estudo diagnóstico

Abstract: The aim of this paper is to present and discuss strategies used by primary school pupil, as well as to analyze the performances used by these students whilst they were solving problems which required the division operation. This analytical descriptive study was developed under Vergnaud's theoretical ideas (1990, 1998) of conceptual field, specifically the multiplicative structures. This study is a part of a research project named "**(**re)significar as estruturas multiplicativas a partir da formação 'ação-reflexão-planejamento-ação' do professor", funded by CNPq and carried out by the research group "REPARE em EdMat – Reflexão, Planejamento, Ação, Reflexão em Educação Matemática". For the purpose of the study 349 students, divided into 80 from the 1st grade, 86 from de 2nd, 94 from the 3rd and 89 from the 4th grade, were asked to solve a test composed by 13 questions concerns to the multiplicative field. The test was applied by the each classroom teacher and presently supervised by the researchers. With regards to this paper, we will only

[1] Pós Doutora - Professora titular da PUC/, sandra@pucsp.br
[2] Doutorando em Educação Matemática, Professor e Diretor da Faculdade Santa Izildinha - FIESI –SP. asantos@fiesi.com.br
[3] Doutoranda em Educação Matemática e Professora no Ensino Médio na Rede particular de São Paulo, vera.merlini@gmail.com

discuss three out of the 13 applied questions, all related to the division operation (one involved partition situation and two quotation, with and without the idea of collection). The analysis took into account the pictorial and numerical variables. In the course of analysis it was also identify four students strategy levels which could be related to their multiplicative reasoning.

1. Introdução

A aprendizagem da Matemática no Brasil está aquém dos patamares considerados satisfatórios em todas as etapas de escolarização da Educação Básica, fato que pode ser constado tanto no âmbito internacional como no âmbito Nacional.

Na esfera internacional, segundo dados do PISA[4] (2006), que avalia entre outros aspectos, a proficiência dos estudantes em Matemática, revela que o Brasil ocupa a 54ª posição dentre os 57 países participantes.

No âmbito nacional, o panorama não é muito diferente, pois os resultados denunciam os baixos desempenhos alcançados pelos estudantes tanto nas avaliações federais SAEB[5] (2005; 2007), quanto nas avaliações estaduais SARESP[6] (2007; 2008), divulgados periodicamente. O SAEB é realizado com periodicidade de 2 anos e o SARESP é realizado anualmente.

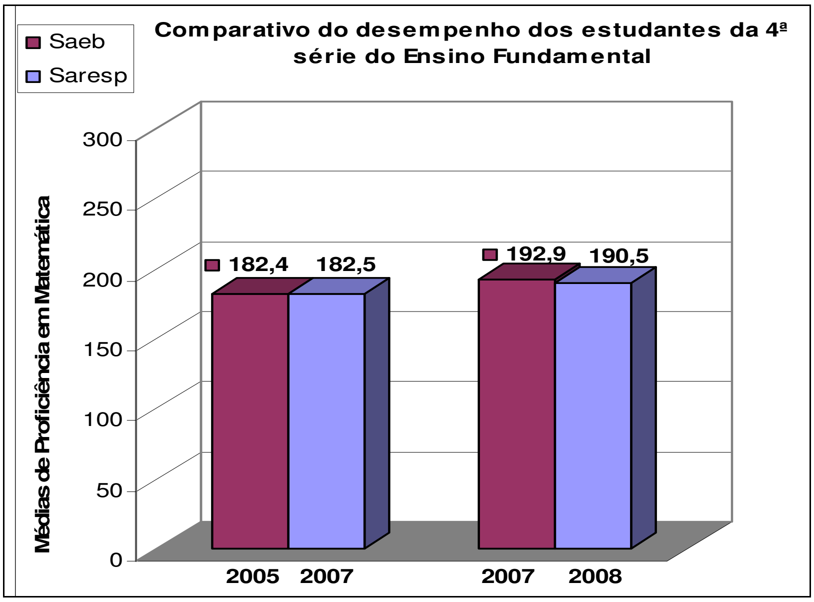
O quadro a seguir apresenta, comparativamente, os resultados alcançados pelos estudantes nas duas avaliações, considerando apenas as médias de proficiência em Matemática dos estudantes da 4ª série do Ensino Fundamental.

---

[4] Programme for International Student Assessment (Programa Internacional de Avaliação de estudantes).

[5] SAEB é a sigla utilizada para significar Sistema de Avaliação da Educação Básica.

[6] SARESP é a sigla usada para significar Sistema de Avaliação do Rendimento Escolar do Estado de São Paulo.



Quadro 1 - Fonte: Relatório Pedagógico Saresp 2008, p. 35.
Saeb 2005: Primeiros Resultados: Médias de desempenho em perspectiva comparada p. 7.

Os dados mostram que o desempenho em Matemática dos estudantes da 4ª série do Ensino Fundamental, nas duas avaliações, é praticamente equivalente nos biênios 2005/2007 e 2007/2008.

Focalizando os dados do SARESP (2008), que adota quatro níveis de proficiência[7] para classificar o desempenho dos estudantes, é possível observar, com base na média obtida (190,5), que os estudantes da 4ª série estão classificados no nível 2 (Básico). À primeira vista, pode-se pensar, equivocadamente, que o desempenho global dos estudantes foi satisfatório. Contudo, numa análise mais amiúde dos resultados, observa-se que o percentual de desempenho não está, majoritariamente, concentrado no nível básico, pois 39,7% está no nível 1, 37,3 % no nível 2; 19,4% no nível 3 e apenas 4,2% no nível 4, o que significa que apenas 23,6% dos estudantes apresentam um nível acurado de competências matemáticas, isto é, estão no nível 3 (adequado) ou no nível 4 (avançado), conforme Relatório Pedagógico SARESP (2008, p. 37).

Tal panorama geral do desempenho dos estudantes coloca, no centro do debate, questões recorrentes a respeito do ensino e da aprendizagem matemática em todos os níveis de escolaridade. Contudo, não é o foco deste artigo discutir todas as questões relativas ao ensino da Matemática, tampouco se ater na análise dos resultados do desempenho dos estudantes nas duas avaliações. O nosso interesse

[7] Nível 1 - Abaixo do Básico (< 175 pontos); Nível 2 - Básico (entre 175 e 225 pontos); Nível 3 - Adequado (entre 225 e 275 pontos); Nível 4 - Avançado (acima de 275 pontos).

é focar no desempenho apresentado pelos estudantes em situações do Campo Conceitual Multiplicativo, mais especificamente aquelas envolvendo o conceito da divisão.

Nessa perspectiva, vamos examinar duas situações de divisão abordadas no Saresp (2008):

Situação 1: *Um carro percorre 192 quilômetros em 3 horas. Em uma hora o carro percorre quantos quilômetros?*
Situação 2: *Dividindo 369 por 3 obtemos:*

Fonte: Relatório Pedagógico – Saresp 2008, p. 35 e 45.

A situação 1 envolve a idéia de proporcionalidade e requer a operação de divisão para a sua resolução. Na categorização adotada pelo SARESP (2008), a situação é classificada no nível 225, o que significa que a resolução correta se configura como indicativo de que os estudantes estão no nível considerado adequado. No entanto, o percentual de acerto para essa questão, na 4ª série, foi de 45%, o que significa que menos da metade dos estudantes não têm sucesso na resolução desse tipo de situação.

Já a situação 2 requer que o estudante saiba aplicar corretamente os procedimentos do algoritmo da divisão. Trata-se de uma situação simples, classificada pela matriz de referência do SARESP 2008 como uma situação de nível básico. O percentual de acerto para essa situação foi de 65%.

Nas duas situações os valores numéricos são baixos e o algoritmo requerido não apresenta grandes dificuldades para a sua execução. Por se tratar de duas situações simples, era de se esperar que o desempenho apresentado pelos estudantes da 4ª série fosse superior ao alcançado nas duas situações.

Com relação a esse último aspecto, o que pode se observar é uma diferença de 20 pontos percentuais em favor da segunda situação. Tal diferença pode estar ligada à dificuldade dos estudantes identificarem a divisão como a operação adequada para a resolução do problema na primeira situação, uma vez que o enunciado não traz, de forma explícita, qualquer palavra-chave indicativa da operação da divisão, tais como distribuir, repartir, dividir, entre outras – estratégia muito utilizada para o ensino das operações elementares da matemática.

Em que pesem todas as considerações, resguardadas as proporções metodológicas empregadas pelo SARESP e SAEB, temos consciência que os dados apresentados contribuem para a tessitura da problemática inicial, ao mesmo tempo em que desvelam a ponta do *iceberg* constituído por uma complexidade de aspectos multifacetados que demandam diversos olhares críticos.

Nesse contexto, o presente artigo tem por finalidade apresentar o desempenho dos estudantes das quatro séries iniciais do Ensino Fundamental e discutir as estratégias utilizadas por eles na resolução de situações que requerem a operação de divisão para a sua resolução.

2. Princípios da Psicologia Cognitiva para a compreensão do conceito de divisão: a Teoria dos Campos Conceituais

A Teoria dos Campos Conceituais, formulada por Vergnaud (1990), visa possibilitar uma estrutura consistente às pesquisas sobre atividades cognitivas, em especial, com referência à aprendizagem da matemática. Permite, ainda, situar e estudar as filiações e as rupturas entre conhecimentos, na perspectiva de seu conteúdo conceitual, isto é, estudar as teias de relação existentes entre os conceitos matemáticos, no sentido proposto por Kieren (1988). Em outras palavras, trata-se de uma teoria cognitivista que oferece um quadro coerente e alguns princípios de base para o estudo do desenvolvimento e da aprendizagem de competências complexas.

Essa teoria possibilita duas análises importantes: a primeira refere-se à relação existente entre os conceitos como conhecimentos explícitos e os invariantes operatórios implícitos nos comportamentos dos sujeitos frente a uma determinada situação, e a segunda sustenta um aprofundamento das relações existentes entre o significado e o significante.

Assim, a teoria *vergnaudiana* postula que os conceitos matemáticos traçam seus sentidos com base em uma variedade de situações e, normalmente, cada situação não pode ser analisada com a ajuda de apenas um conceito. Em outras palavras, uma situação, por mais simples que seja, envolve mais que um conceito e, por outro lado, um conceito não pode ser apropriado a partir da vivência de uma única situação.

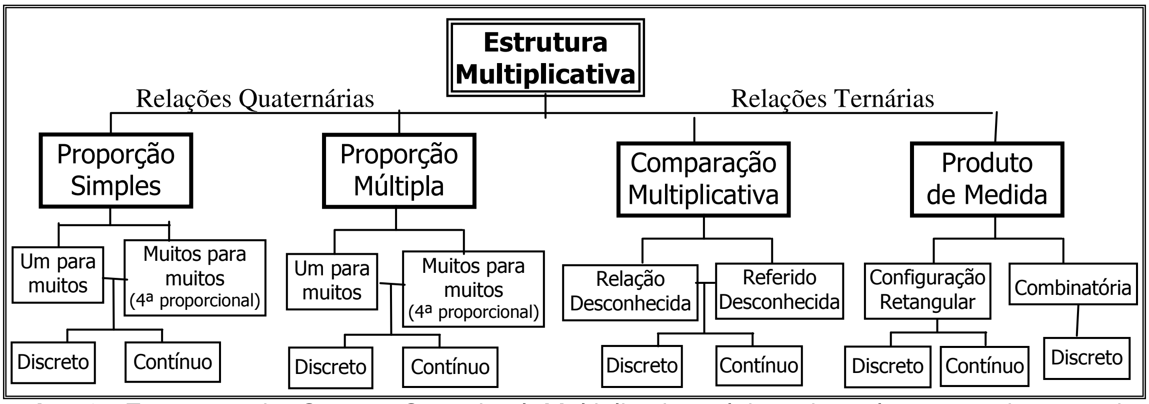
Dessa forma, podemos nos referir a um campo conceitual como sendo um conjunto de problemas ou situações, cuja análise e tratamento requerem vários tipos de conceitos, procedimentos e representações simbólicas, os quais se encontram em estreita conexão uns com os outros.

O autor destaca que, para a matemática, dois campos conceituais são necessários por alicerçarem todos os demais conceitos matemáticos: o campo conceitual das estruturas aditivas e o campo conceitual das estruturas multiplicativas. O primeiro se caracteriza como um conjunto de situações que requerem para a sua resolução uma operação de adição ou subtração ou as duas combinadas, e o segundo se caracteriza como sendo um conjunto de situações que requerem para a sua resolução uma operação de divisão ou multiplicação ou a combinação de ambas. É sobre essa última que passaremos a discorrer na próxima seção.

2. 1. O Campo Conceitual das Estruturas Multiplicativas.

Podemos nos referir a um Campo Conceitual Multiplicativo como sendo um conjunto de problemas ou situações, cuja análise e tratamento requerem vários tipos de conceitos, procedimentos e representações simbólicas, os quais se encontram em estreita conexão uns com os outros. Entre os conceitos podemos destacar: as funções linear e não-linear, o espaço vetorial, a análise dimensional, a fração, razão, proporção, número racional, multiplicação e a divisão.

A partir das idéias teóricas de Vergnaud (1990; 1994) sobre o Campo Conceitual Multiplicativo, elaboramos um esquema com o objetivo de sintetizar as idéias centrais desse campo. Assim, o esquema apresentado no quadro 2 está dividido em duas partes: relações quaternárias e relações ternárias. A primeira parte, por sua vez, é constituída por duas classes de situações: proporção simples e proporções múltiplas, e a segunda também é formada por duas classes de situações: a comparação multiplicativa e produto de medidas.



Quadro 2: Esquema do Campo Conceitual Multiplicativo elaborado pelo grupo de pesquisa REPARE em EdMat – Reflexão, Planejamento, Ação, Reflexão em Educação Matemática – em 2009.

Para fazer uma breve distinção entre as relações ternárias e quaternárias, vamos discutir a seguinte situação: *Um bombom custa R$ 2,00. Quanto pagarei na compra de cinco bombons?*

Na escola, esse tipo de situação é o protótipo da multiplicação cuja resolução, comumente, se apóia em uma relação ternária: a x b= c (2 x 5 = 10). Contudo, o que está implícito nessa situação é uma relação quaternária entre duas grandezas de natureza distintas que esquematicamente pode ser representada da seguinte maneira:

$$\begin{tikzcd} \text{Balas} & \text{Preço} \\ 1 \arrow[r] \arrow[d, bend right, "(x\ 5)"'] & 2 \arrow[d, bend left, "(x\ 5)"] \\ 5 \arrow[r] & x \end{tikzcd}$$

Esse é um problema típico das relações quaternárias. Nesse caso temos uma dupla relação entre duas variáveis (preço e bombom). O entendimento das relações quaternárias possibilita aos estudantes compreender o porquê de se multiplicar o preço de um objeto pela quantidade deste (reais por bombom) e o resultado é dado em reais e não em balas. Além disso, amplia os procedimentos de resolução, podendo pensar no fator escalar como estratégia ou ainda no fator funcional (conhecimento de base que é central para o trabalho com as funções nos anos mais avançados de escolaridade).

Mas qual seria outra vantagem dessa abordagem, além dos argumentos apresentados acima? A situação a seguir ajuda a esclarecer:

Paguei por 5 bombons R$ 10,00. Quanto pagaria se quisesse comprar 7 bombons?

Essa situação mantém a mesma estrutura da discutida acima, contudo não faz sentido pensar no produto direto entre as duas grandezas (preço x bombom), mas sim na relação multiplicativa que existe entre elas, duas a duas.

Diferentemente das relações quaternárias, as ternárias são tratadas como uma relação entre dois elementos, de mesma natureza ou grandeza, que se compõem para formar um terceiro elemento. Por exemplo, multiplicam-se centímetros por centímetros resultando centímetros quadrados ou, ainda, meninos dançarinos x meninas dançarinas produzindo pares de dançarinos. Em outras palavras, os dois elementos (quantidade de meninos e meninas) estão ligados por uma relação multiplicativa que resultará o número total de pares possíveis, isto é, o produto entre o conjunto de meninos (formado por três meninos) e o conjunto de meninas (formado por quatro meninas) resulta no conjunto de possíveis pares. No plano numérico temos: *x = 3* x *4* e no plano dimensional *x pares = 3 meninos* x *4 meninas.* Todos esses argumentos justificam a necessidade, do ponto vista didático, de se fazer uma clara distinção entre as duas classes de situações: a quaternária e ternária.

Passaremos a descrever, sucintamente, cada uma das classes que compõe as relações ternárias e quaternárias.

Classe 1 – Proporção simples: Trata-se de uma relação quaternária. Como o próprio nome diz, envolve uma relação entre quatro quantidades, sendo duas de um tipo e as outras duas de outro tipo ou, então, uma simples proporção direta entre duas grandezas, como por exemplo: pessoas e objetos, bens e custos, tempo e distância, entre outras. Essa classe pode ser subdividida em duas subclasses de situações: a correspondência um para muitos e a correspondência muitos para muitos.

Exemplo 1: Correspondência um para muitos - *Um carro tem quatro rodas. Quantas rodas têm cinco carros*?

Exemplo 2: Correspondência muitos para muitos – *A cada cinco bombons comprados, a loja Boa Compra dá três caramelos de brinde. Se Ana comprar 15 bombons quantos caramelos ela ganhará?*

Classe 2 – Proporções múltiplas: Essa classe de situação trata também de uma relação quaternária envolvendo mais de duas grandezas relacionadas duas a duas. Por exemplo: (operários, horas e dias trabalhados).

Exemplo 1: Correspondência um para muitos - *Uma floricultura vende uma caixa de jarros com flores. Cada caixa contém 6 jarros. Por sua vez, cada jarro vem com 2 flores. Sandra comprou 3 caixas, quantas flores ela levou?*

Exemplo 2: Correspondência muitos para muitos – *Um grupo de seis amigos decidiu passar 15 dias de férias em um hotel fazenda. O custo de duas diárias é de R$ 90,00 por pessoa. Quanto gastou o grupo?*

Classe 3 – Comparação multiplicativa: as situações que fazem parte de classe envolvem a comparação entre duas grandezas de mesma natureza. Já no início da escolarização, situações envolvendo a relação de dobro e de metade são exploradas e se configuram como protótipo dessa classe de situação, como por exemplo: *João tem a metade da quantia de Maria. Se João tem R$ 10,00, qual é a quantia de Maria?* A seguir destacamos alguns exemplos:

Exemplo 1: Relação desconhecida - *Comprei uma boneca por R$ 21,00 e uma bola por R$ 3,00. Quantas vezes a boneca foi mais cara que a bola?*

Exemplo 2: Referido desconhecido - *A idade de Paulo é 5 vezes maior que a idade do seu filho. Paulo tem 30 anos. Qual é a idade do seu filho?*

Classe 4 – Produto de medidas: Essa classe é constituída por duas subclasses: (a) situações envolvendo a idéia de configuração retangular em quantidades contínuas e discretas; (b) situações envolvendo a idéia de combinatória.

Exemplo 1: Configuração retangular (discreto/contínuo) – **(a)** *Num cinema há cinco fileiras com 10 cadeiras cada uma. Quantas cadeiras há no cinema?* **(b)** *Qual a área de um retângulo que possui 6m de comprimento e 3m de largura?*

Exemplo 2: Combinatória – *Numa festa há quatro meninas e três meninos. Cada menino quer dançar com cada uma das meninas, e cada menina também quer dançar com cada um dos meninos. Quantos pares diferentes de menino-menina são possíveis de serem formados?*

Apresentamos um breve panorama das classes de situações que compõem o Campo Conceitual Multiplicativo, considerando apenas o conjunto dos números inteiros. Cabe explicitar que em todas as classes é possível pensar em situações, com a mesma estrutura, que requerem para a sua resolução uma operação de multiplicação ou divisão e ou ainda uma combinação das duas operações.

Contudo, o foco desse artigo não é esgotar e nem discutir todas as possibilidades de formulação de situações que envolvem esse campo, mas sim de explorar as situações que requerem a operação de divisão como estratégia mais adequada para a sua resolução.

Fischbein et al. (1985) sugerem dois modelos intuitivos de divisão. Um associado ao ato de repartir, ou situações que envolvem a idéia de partição e outro relacionado com medida, ou situações que envolvem a idéia de divisão por quota. O primeiro modelo está relacionado ao ato de dividir grandezas de naturezas diferentes (ex. figurinhas por crianças) e o segundo modelo está associado ao ato de dividir grandezas de mesma natureza (exemplo: quantidade de figurinha por figurinha).

Organizamos, em forma de esquema, os dois modelos propostos por Fischbein. Esses esquemas estão expostos a seguir e, para facilitar sua compreensão, serão acompanhados por exemplos:

Esquema 1

Informação 1 **(conhecida)**	Informação 2 **(conhecida)**	Resultado (**partição desconhecida**)
Variável 1 (V1) **Quantidade: 30 figurinhas**	Variável 2 (V2) **Quantidade: 6 amigos**	Relação entre V1 e V2 **Desconhecida (?)**

Tabela 1: Esquema da divisão por partição entre duas grandezas de naturezas diferentes.

Exemplo 1: *João tem 30 figurinhas e quer dividir igualmente com os seus 6 amigos. Quantas figurinhas cada um dos seus amigos vai receber*?

Esquema 2

Informação 1 **(conhecida)**	Informação 2 **(desconhecida)**	Resultado **(quota conhecida)**
Variável 1 (V1) **Quantidade: 30 figurinhas**	Variável 2 (V2) **Quantidade: amigos (?)**	Relação entre V1 e V2 **Conhecida: 5**

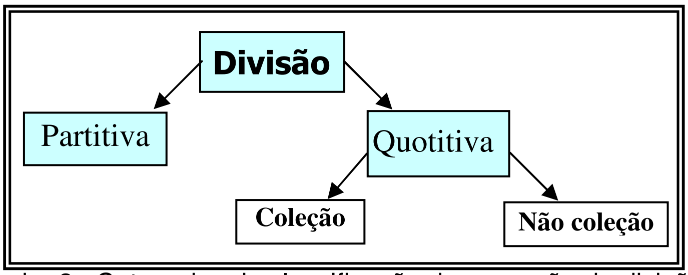
Tabela 2: Esquema da divisão por quota entre duas grandezas de mesma natureza.

Exemplo 2: *João tem 30 figurinhas e vai dar 5 figurinhas para os seus amigos. Quantos amigos de João ganharão figurinhas*?

Magina e colaboradores (2009 no prelo) realizaram um estudo diagnóstico a partir da aplicação de um instrumento, contendo 15 situações-problemas do campo das Estruturas Multiplicativas, aplicado a 1014 estudantes da 1ª à 8ª série, cuja análise se deu à luz da Teoria dos Campos Conceituais. Esse grupo constatou que, do ponto de vista cognitivo, há diferença significativa no desempenho dos estudantes na resolução de problemas envolvendo a operação de multiplicação com coleção e não coleção.

O grupo ainda observou que nas situações com a idéia de coleção o desempenho dos estudantes foi majoritariamente superior em relação aos problemas de não coleção. Constatou também que para a resolução dos problemas que envolviam a multiplicação da primeira classe, em situação de coleção, a estratégia de resolução mais comum utilizada pelos estudantes, principalmente aqueles das séries iniciais, era baseada na adição de parcelas repetidas.

Baseados no estudo de Magina e colaboradores (ibid) no que diz respeito às situações de coleção e não coleção envolvendo multiplicação e, ainda, pensando no modelo proposto por Fishbein (1985), ampliamos essa categorização subdividindo o esquema 2 (idéia de divisão por quota) em duas sub-categorias: a quota como coleção e quota como não coleção. O quadro 3 apresenta esquematicamente a classificação das categorias das situações envolvendo a operação da divisão.



Quadro 3 : Categorias de classificação da operação de divisão.

Um exemplo de problema de divisão quotitiva envolvendo não-coleção é aquele apresentado no esquema 2, enquanto que um exemplo para situações envolvendo coleção seria:

Em uma caixa de lápis de cor tem 12 unidades. A professora precisa de 36 lápis de cor. Quantas caixas ela terá que comprar?

No que tange ao estudo realizado por Magina et al (no prelo), este nos interessa de perto porque o instrumento utilizado no presente projeto de pesquisa apoiou-se no de Magina, tendo, inclusive, questões iguais.

3. Metodologia

O estudo apoiou-se nos princípios da pesquisa descritiva. Trata-se, assim, de um estudo em que o pesquisador tem por objetivo conhecer e interpretar determinados fenômenos ligados à realidade sem nela interferir para modificá-la (Rudio, 1978). Dessa forma, o presente estudo busca investigar não só o desempenho dos estudantes das séries iniciais do Ensino Fundamental na resolução de situações envolvendo a divisão, como também tem por finalidade categorizar e descrever as estratégias empregadas por eles.

Para tanto, foi aplicado um teste em 349 estudantes, de 1ª a 4ª séries, do Ensino Fundamental, de uma mesma Escola Pública Estadual, localizada em um bairro classe média da cidade de São Paulo. Foram 80 estudantes da 1ª série, 86 da 2ª, 94 da 3ª e 89 estudantes da 4ª série. O teste foi composto de 13 questões que contemplavam situações do Campo Conceitual Multiplicativo, aplicado coletivamente aos estudantes que responderam individualmente. A aplicação foi conduzida pela professora de cada turma com a supervisão de três pesquisadores, presentes na escola.

Para efeito desse artigo analisaremos o desempenho e as estratégias empregadas pelos estudantes em três questões sobre a divisão. Uma das questões envolve a divisão com a idéia de partição e as outras duas referem-se à divisão com a idéia de quota, sendo que uma delas é classificada como coleção e a outra como não-coleção.

Questão 1 (Q1) Idéia de quota – coleção	**Questão 2 (Q2)** Idéia de quota – não-coleção	**Questão 3 (Q3)** Idéia de partição
Em uma caixa de chicletes vêm 2 unidades. João precisa de 18 chicletes. Quantas caixas de chicletes ele vai ter que comprar?	*João tem 24 bolas de gude para dar de presente aos seus amigos. Cada amigo vai ganhar 3 bolinhas. Quantos amigos de João ganharão bolinhas de gude?*	*A professora tem 18 pirulitos para distribuir igualmente com seus 6 alunos. Quantos pirulitos cada aluno vai ganhar?*

De posse dos resultados, a análise foi estruturada em duas partes: uma quantitativa e outra qualitativa. A análise quantitativa refere-se ao desempenho dos estudantes e perfaz um total de 1047 itens[8] de análise. Essa análise será realizada comparativamente entre os desempenhos dos estudantes nas três questões dentro da série e entre as séries, levando em consideração três variáveis: (a) análise global do desempenho, (b) divisão por partição versus divisão por quota em situação de não-coleção e (c) divisão por quota em situação de coleção versus divisão por quota em situação de não-coleção.

A análise qualitativa, por sua vez, será realizada com base na categorização das estratégias empregadas pelos estudantes na resolução das três situações acima apresentadas. A próxima seção será destinada à apresentação e à análise dos resultados.

4. Apresentação e discussão dos resultados

Nessa seção apresentaremos os resultados dos desempenhos dos estudantes e discutiremos os dados sob dois enfoques: o quantitativo e o qualitativo.

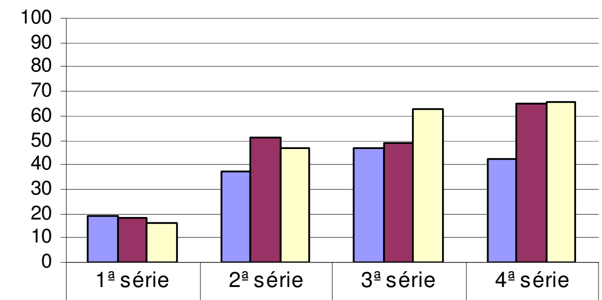
---

[8] O número 1047 é o resultado do produto entre as três situações e os 349 estudantes.

Salienta-se que usaremos o aplicativo *Statistical Package for the Social Sciences* (SPSS) para realizar a análise quantitativa. Já a análise qualitativa será feita a partir da categorização das estratégias empregadas pelos estudantes nas resoluções, tanto aquelas que levaram ao acerto, bem como as que induziram ao erro.

4.1. Análise quantitativa

Iniciamos nossa análise observando o desempenho dos estudantes das quatro séries nas três questões de divisão.



	1ª série	2ª série	3ª série	4ª série
Q1 cota coleção	19	37	47	42
Q 2 cota ñ-coleção	18	51	49	65
Q 3 partição	16	47	63	66

Quadro 4: Desempenho dos estudantes das quatro séries nas três questões.

Os dados apontam que os estudantes da 1ª série tiveram baixo desempenho em todos os três problemas (percentual de acerto abaixo de 20%). As demais séries apresentam desempenhos bem superiores ao da 1ª série, mas caminham próximas umas das outras, não apresentando diferença igual ou maior a 20 pontos percentuais. Ao aplicar o teste de Fisher para averiguar se houve diferença nos desempenhos entre séries, podemos afirmar que sim e esta diferiu significativamente [F(3,344) = 21,691; p = 0,000].

Tabela 3: Número Médio de Respostas Corretas de Estudantes por Série

Série	**n**	**Média (*) DP**
1ª	80	0,5250**a**
2ª	86	1,3488**b**
3ª	94	1,5851**b**
4ª	89	1,7273**b**

(*) Médias com letras iguais não diferem estatisticamente segundo o teste de comparação Múltiplas de Tukey.

O teste de Tukey (DHS) detectou diferença significativa entre o desempenho dos estudantes da 1ª série e os das demais séries. Entretanto não foram observadas diferenças entre os desempenhos das outras séries. Podemos inferir que houve avanço expressivo somente dos estudantes da 2ª série em relação aos da 1ª série, pois, embora tenha havido diferenças entre os desempenhos da 2ª para 3ª série, assim como da 3ª para 4ª série, essas não são estatisticamente significativas, nem tampouco da 2ª para a 4ª série. Tal análise é válida para os desempenhos das séries tanto considerando as três questões (como apresentado acima), quanto considerando cada uma das questões isoladamente, segundo o resultado do Qui-quadrado (para Q1 [$\chi^2(3)$, N = 349) = 16,154; p = 0,001]; para Q2 [$\chi^2(3)$, N = 349) = 41,340; p = 0,000]; para Q3 [$\chi^2(3)$, N = 349) = 52,326; p = 0,000]).

A nossa segunda perspectiva de análise quantitativa é proceder com a comparação do desempenho dos estudantes das quatro séries entre a questão que envolvia a idéia de quota, em situação de não-coleção (Q2), e a questão que envolvia a idéia de partição (Q3). Para tanto aplicamos o teste estatístico Mc Nemar, cujos resultados estão descritos na Tabela 3:

Tabela 5: Desempenho dos estudantes Q2 X Q3

		Q3	
SÉRIE	Q2	0	1
1	0	58	8
	1	9	5
2	0	30	12
	1	16	28
3	0	26	22
	1	9	37
4	0	20	11
	1	10	48

A tabela acima nos permite inferir que os estudantes da 1ª série tiveram dificuldade tanto nas questões de divisão por quota como na partição. Já o resultado do desempenho da 2ª série mostra que o número de estudantes que acerta as duas questões é praticamente igual ao que erra. Na 3ª série, os estudantes tiveram maior sucesso na resolução da questão de divisão por partição (Q3) do que por quota (Q2) e esta diferença é significativa [$\chi^2(1)$, = 4,645; p = 0,031]. Já para os estudantes da 4ª série as duas questões foram igualmente fáceis.

Esse estudo revela que nas situações que envolvem divisão o sucesso, ou insucesso, dos estudantes não depende do tipo de situação (partição ou quota), com exceção dos estudantes da 3ª série, quando seus desempenhos foram bem melhores nas situações de partição do que nas de quota. Esse resultado era de se esperar, pois o processo de ensino e de formalização do conceito da divisão inicia-se na 3ª série e, de sobre maneira, por meio de situações partitivas.

Com relação ao terceiro enfoque – divisão por quota em situação de coleção versus divisão por quota em situação de não-coleção – utilizamos os mesmos testes estatísticos (McNemar e Qui-quadrado), porém agora relacionando as questões 1 e 2. Os dados estão descritos na Tabela 6:

Tabela 6: Desempenho dos estudantes Q1 X Q2

		Q2	
SÉRIE	Q1	0	1
1	0	54	10
	1	11	4
2	0	35	19
	1	7	25
3	0	35	15
	1	13	31
4	0	25	27
	1	6	31

De acordo com os dados, observamos que para os estudantes da 1ª série a variável coleção não foi facilitadora, já que essas crianças tiveram insucesso nas duas questões igualmente. Já para os estudantes da 2ª e da 4ª séries, a divisão por quota envolvendo situação de não-coleção foi significativamente mais fácil que a de coleção (para 2ª [$\chi^2(1) = 4{,}654$; $p = 0{,}031$] para 4ª [$\chi^2(1) = 13{,}781$; $p = 0{,}000$]). Por fim, para os estudantes da 3ª série, essa variável (coleção versus não-coleção) não interferiu em seus desempenhos.

Assim, no que tange ao efeito da situação ser de coleção, ou não, sobre o percentual de acerto dos estudantes, observamos que não houve efeito em nosso universo pesquisado; ao contrário, os estudantes da 2ª e 4ª séries se saíram melhor quando a situação envolvia a idéia de não-coleção. Esses resultados diferem dos encontrados por Magina e cols (no prelo), embora Magina discuta apenas esse efeito em problemas de multiplicação. Para entendermos o porquê de tal comportamento de nossos estudantes é necessário que examinemos atentamente as estratégias utilizadas por eles, o que acontecerá na próxima sub-seção.

4.2 Análise qualitativa

Após proceder com a análise quantitativa dos dados, deter-nos-emos na qualidade das estratégias utilizadas pelos estudantes ao resolver as questões propostas. Optamos por analisar todas as estratégias utilizadas por eles, sejam as que resultaram em sucesso, sejam as que levaram ao fracasso. Essas estratégias foram agrupadas de tal forma a permitir que as categorias de análise fossem relacionadas aos níveis de complexidade dos raciocínios utilizados pelos estudantes.

Foram identificados quatro níveis de estratégia, alguns dos quais (nomeadamente o 3º e o 4º níveis) contendo sub-níveis. A seguir apresentamos cada um desses níveis, descrevendo-os e observando seu número de incidência, segundo as variáveis “numérico” e “pictórico”.

Salientamos que a análise qualitativa será realizada a partir de uma visão holística dos dados coletados. Assim apenas após a apresentação de todos os níveis identificados é que teceremos comentários sobre e buscaremos estabelecer relações entre as estratégias utilizadas, as variáveis (pictórica ou numérica) escolhidas e o sucesso alcançado nos problemas.

A seguir encontram-se descritas as estratégias identificadas, devidamente classificadas por níveis e acompanhadas por extratos de protocolos servindo de ilustração desses níveis:

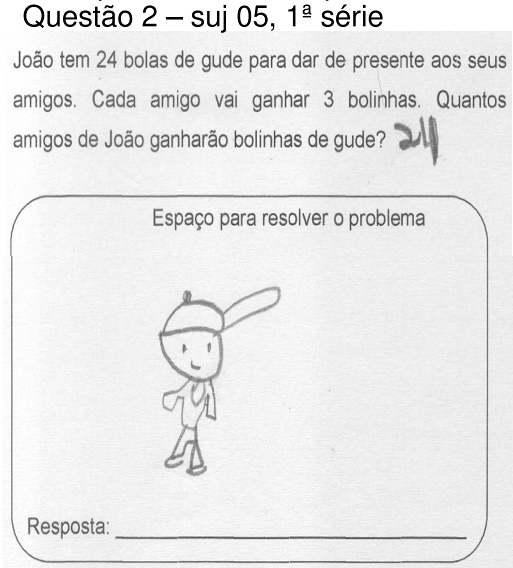
Estratégia de Nível 1

Incompreensível → Pictórico / Numérico

	1ª	2ª	3ª	4ª
Pictórico	73	45	22	10
Numérico	94	31	21	18

Estão classificadas como estratégias de nível 1 aquelas respostas em que o estudante não explicita a operação realizada por ele para resolver o problema. Ele pode fazer um desenho sem significado para a resolução do problema, pode repetir um dos dados do problema ou, ainda, pode escolher um outro número sem que se consiga entender a razão para tal. Nesse nível as respostas das crianças estão invariavelmente erradas. Apresentamos dois exemplos que ilustram as estratégias classificadas no nível 1 – Incompreensível.

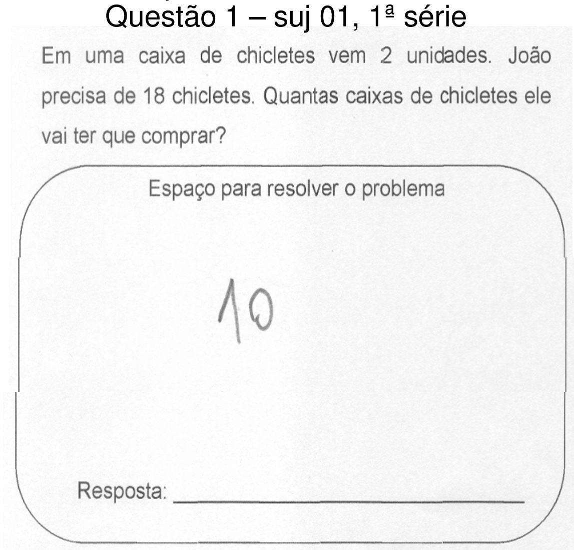
Exemplo inconsistente pictórico
Questão 2 – suj 05, 1ª série


João tem 24 bolas de gude para dar de presente aos seus amigos. Cada amigo vai ganhar 3 bolinhas. Quantos amigos de João ganharão bolinhas de gude? 24

Espaço para resolver o problema

Resposta: ____

Exemplo inconsistente numérico
Questão 1 – suj 01, 1ª série


Em uma caixa de chicletes vem 2 unidades. João precisa de 18 chicletes. Quantas caixas de chicletes ele vai ter que comprar?

Espaço para resolver o problema

10

Resposta: ____

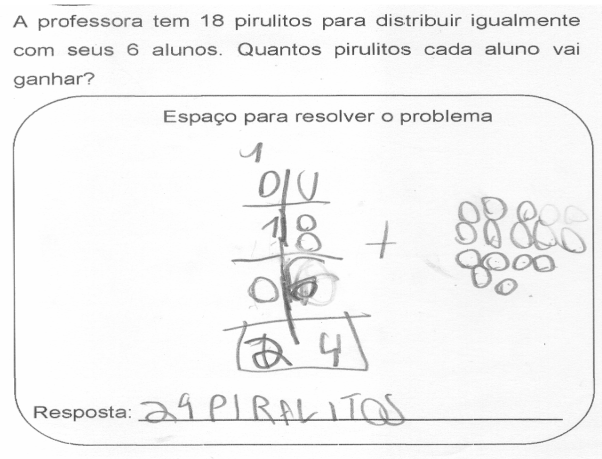
Estratégia de Nível 2

Pensamento Aditivo

	1ª	2ª	3ª	4ª
Pictórico	4	28	6	-
Numérico	20	20	53	34

Ao utilizar a estratégia de Nível 2, o estudante faz uma adição ou subtração usando os dados do problema em forma numérica ou pictórica. Não se trata de fazer adições ou subtrações repetidas. Como no nível 1, aqui também as estratégias de ação que o estudante lança mão para encontrar a solução do problema ainda não se encontra dentro da ótica da estrutura multiplicativa, o que o leva ao insucesso.

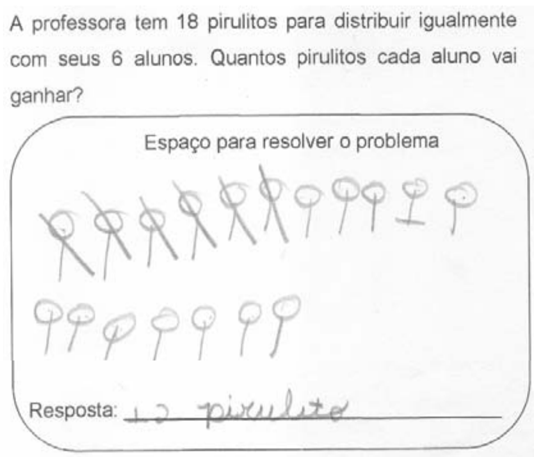
Exemplo de estratégia de pensamento aditivo numérico - Questão 3: suj 124, 2ª série


A professora tem 18 pirulitos para distribuir igualmente com seus 6 alunos. Quantos pirulitos cada aluno vai ganhar?

Espaço para resolver o problema

Resposta: 24 PIRALITOS

Exemplo de estratégia de pensamento aditivo pictórico – Questão 3: suj 134, 2ª série


A professora tem 18 pirulitos para distribuir igualmente com seus 6 alunos. Quantos pirulitos cada aluno vai ganhar?

Espaço para resolver o problema

Resposta: 12 pirulito

Estratégia de Nível 3A

Transição

		1ª	2ª	3ª	4ª
Correto	Pictórico	23	99	99	34
	Numérico	-	2	6	2
Incorreto	Pictórico	6	15	13	3
	Numérico	-	-	1	-

Estratégia de Nível 3B

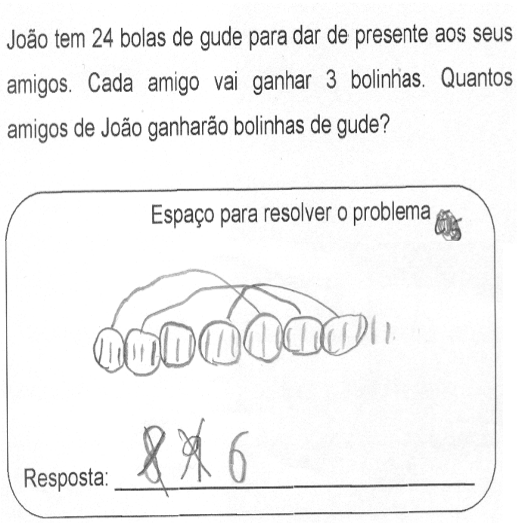
Transição

		1ª	2ª	3ª	4ª
Incorreto	Pictórico	1	3	3	-
	Numérico	-	-	11	32

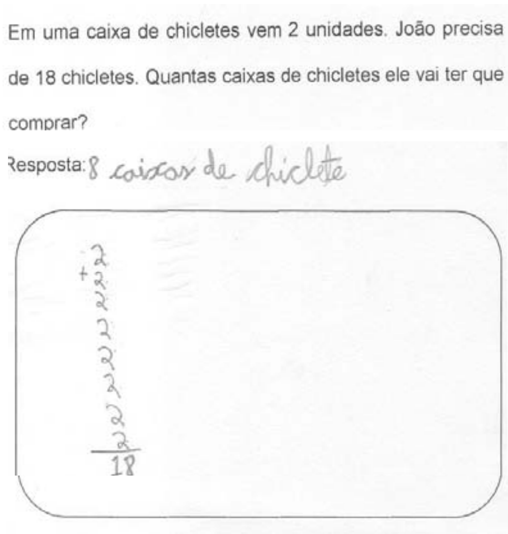
Neste nível 3 as estratégias dos estudantes se mostram mais sofisticadas. Duas estratégias foram identificadas e classificadas em sub-níveis distintos: o sub-nível 3A, quando o estudante agrupa, pictórica ou numericamente, as cotas até chegar na quantidade total informada no problema. Esta estratégia pode levar tanto ao erro quanto ao acerto, a depender da ação de agrupamento (algumas vezes confusas) ou da interpretação dada pelo estudante aos números do problema; e o sub-nível 3B, que se refere às estratégias em que a criança, apesar de usar uma das operações do campo multiplicativo, o faz de maneira inadequada para encontrar resolução do problema (escolhe a operação inversa), levando-o ao erro. Ilustramos a seguir algumas dessas estratégias adotadas pelos estudantes pesquisados.

Exemplos de estratégias de pensamento do tipo **transitivo**, sub-tipo **3A**, com resoluções pictórica e numérica **incorretas**

Questão 2, sujeito 18, 1ª série

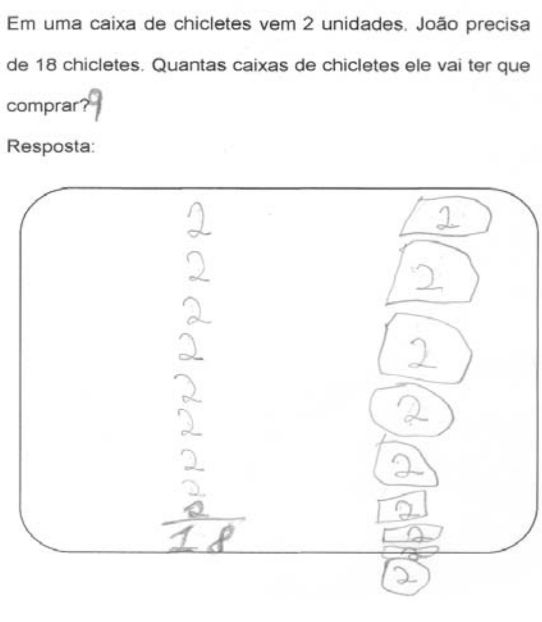


Questão 1, sujeito 215, 3ª série

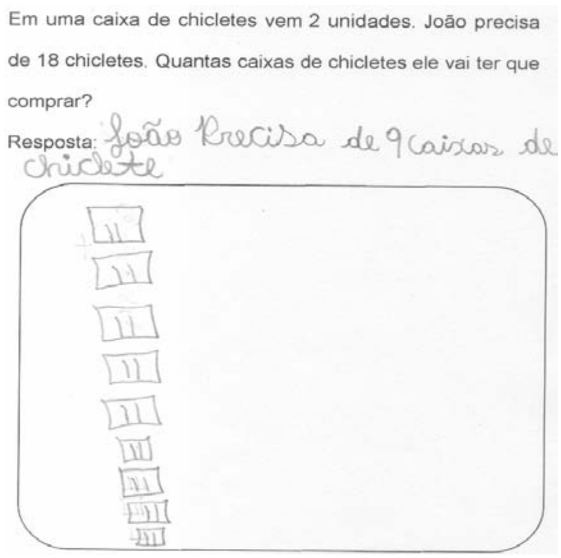


Exemplos de estratégias de pensamento do tipo **transitivo**, sub-tipo **3A**, com resoluções pictórica e numérica **corretas**

Questão 1, sujeito 200, 3ª série

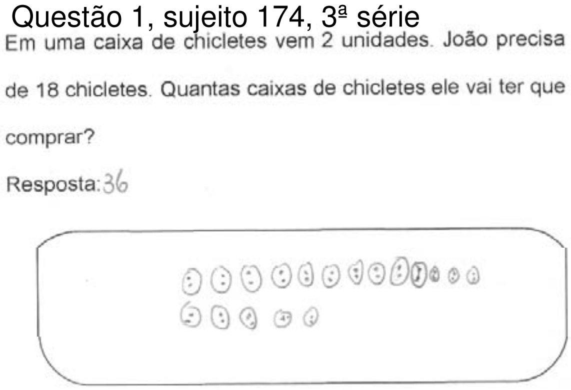


Questão 1, sujeito 202, 3ª série



Exemplos de estratégias de pensamento multiplicativo do tipo **transitivo**, sub-tipo **3B**, com resoluções pictórica e numérica **incorretas** – Questão 1, sujeitos

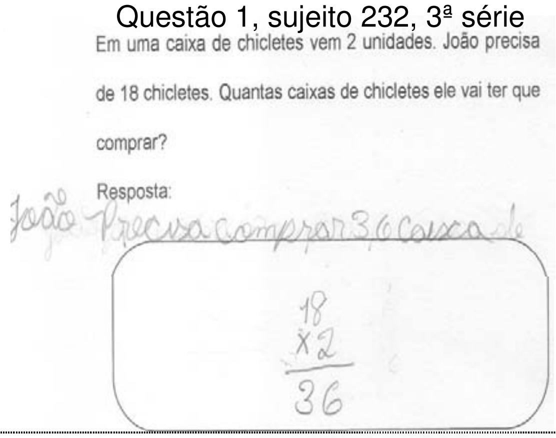
Questão 1, sujeito 174, 3ª série



Em uma caixa de chicletes vem 2 unidades. João precisa de 18 chicletes. Quantas caixas de chicletes ele vai ter que comprar?

Resposta: 36

Questão 1, sujeito 232, 3ª série



Em uma caixa de chicletes vem 2 unidades. João precisa de 18 chicletes. Quantas caixas de chicletes ele vai ter que comprar?

Resposta: João Precisa comprar 36 caixa de

18
x2
36

Estratégia de Nível 4A

Pensamento Multiplicativo

		1ª	2ª	3ª	4ª
Correto	Pictórico	-	2	5	1
Correto	Numérico	-	1	12	8
Incorreto	Numérico	-	-	-	3

Estratégia de Nível 4B

Pensamento Multiplicativo

		1ª	2ª	3ª	4ª
Correto	Pictórico	-	2	4	4
Correto	Numérico	-	-	10	92
Incorreto	Numérico	-	-	3	13

Estratégia de Nível 4C

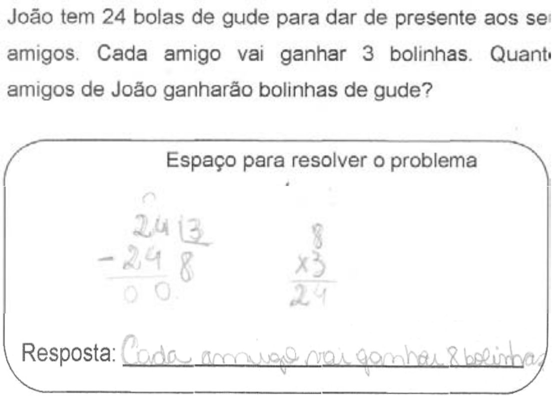
Pensamento Multiplicativo

		1ª	2ª	3ª	4ª
Correto	Numérico	3	2	3	4

Neste nível o estudante já lança mão de estratégias bastante eficientes e claramente multiplicativas. Isto é, aqui ele lança mão de estratégias que envolvem as operações de multiplicação ou divisão. Contudo, este nível divide-se em três sub-níveis: o *4A*, quando o estudante escolhe a operação correta requerida para a resolução o problema, levando-o, muitas vezes, ao acerto. Quando ocorre o erro, este é procedimental (algoritmo); o sub-nível *4B* quando usa a multiplicação como complementar (ou inversa); o sub-nível *4C*, que se refere à apresentação da resposta correta, sem contudo haver qualquer indicação da estratégia utilizada, apenas a resposta. O estudante apenas será considerado dentro do sub-nível *4C* quando ele lança mão de tal estratégia em, pelo menos, dois dos três problemas.

Exemplos de estratégias multiplicativas, relativos ao nível de pensamento mais avançado – nível 4

Sub-nível 4A: resolução numérica **correta** – Questão 2, sujeito 265, 4o ano


João tem 24 bolas de gude para dar de presente aos se[us] amigos. Cada amigo vai ganhar 3 bolinhas. Quant[os] amigos de João ganharão bolinhas de gude?

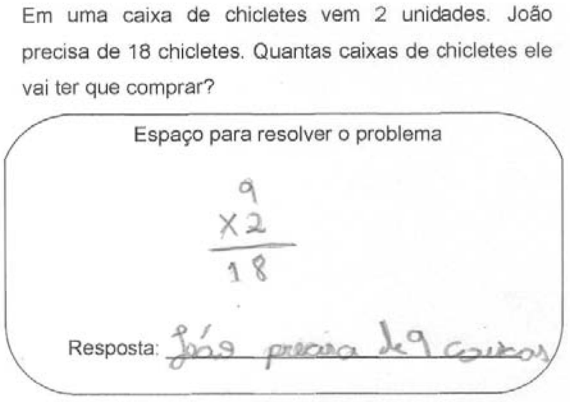
Espaço para resolver o problema

24 | 3
-24 8
00

8
x3
24

Resposta: Cada amigo vai ganhar 8 bolinhas

Sub-nível 4B: resolução numérica **correta –** Questão 1, sujeito 270, 4o ano

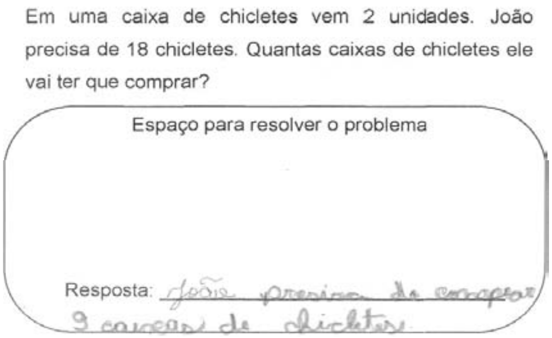

Em uma caixa de chicletes vem 2 unidades. João precisa de 18 chicletes. Quantas caixas de chicletes ele vai ter que comprar?

Espaço para resolver o problema

9
x2
18

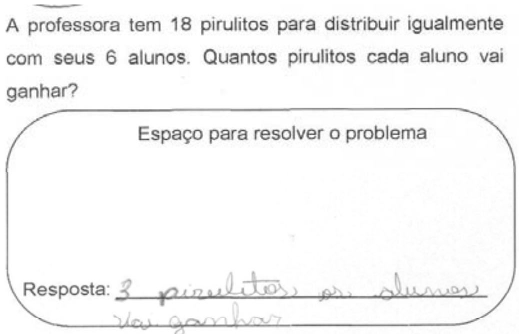
Resposta: João precisa de 9 caixas

Sub-nível 4C (cálculo mental), com resolução **correta** nas questões 1 e 3, sujeito 278, 4ª série


Em uma caixa de chicletes vem 2 unidades. João precisa de 18 chicletes. Quantas caixas de chicletes ele vai ter que comprar?

Espaço para resolver o problema

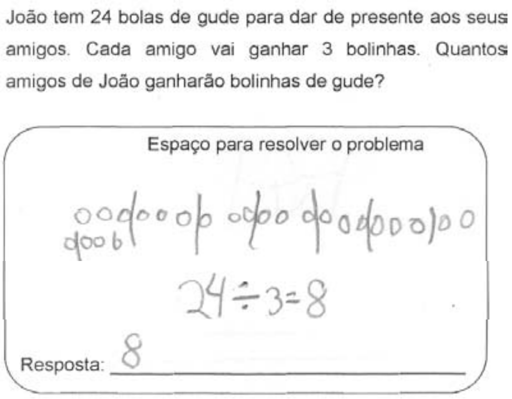
Resposta: João precisa de comprar 9 caixas de chicletes


A professora tem 18 pirulitos para distribuir igualmente com seus 6 alunos. Quantos pirulitos cada aluno vai ganhar?

Espaço para resolver o problema

Resposta: 3 pirulitos os alunos vai ganhar

Sub-nível 4A pictórica **correta,** questão 2 sujeito 122, 2ª série

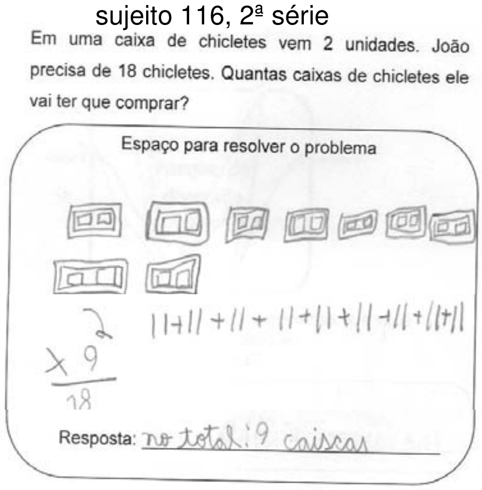

João tem 24 bolas de gude para dar de presente aos seus amigos. Cada amigo vai ganhar 3 bolinhas. Quantos amigos de João ganharão bolinhas de gude?

Espaço para resolver o problema

24÷3=8

Resposta: 8

Sub-nível 4B pictórica **correta,** questão .1 sujeito 116, 2ª série


Em uma caixa de chicletes vem 2 unidades. João precisa de 18 chicletes. Quantas caixas de chicletes ele vai ter que comprar?

Espaço para resolver o problema

2
x9
18

Resposta: no total: 9 caixas

Notamos que a variável pictórica como estratégia de resolução é mais utilizada pela 2ª série, seguida pela 3ª. Nessas duas séries essa estratégia leva muito mais ao sucesso do que ao erro, o que não é verdade para os estudantes da 1ª série. Já os estudantes da 4ª série, embora tenham usado bem menos dessa variável, quando comparado com a variável numérica, quando fizeram tiveram, proporcionalmente, mais êxito do que os estudantes das demais séries. Nota-se ainda que, embora os estudantes da 1ª série tenham apresentado baixo índice de sucesso, seja utilizando variável numérica ou a pictórica, a utilização desta última possibilitou um número bem maior de sucesso (23 pictóricas corretas contra 3 numéricas corretas).

A análise das estratégias também nos permite supor que os estudantes da 2ª e 3ª séries, quando apoiados pelo recurso pictórico demonstram estar cognitivamente preparados para trabalhar com situações de divisão. De fato, cada uma dessas séries utilizou dessa variável, com sucesso, por mais de 100 vezes. Esse resultado revela que os estudantes dessas duas séries encontram-se no mesmo patamar cognitivo, no que tange ao bom uso do raciocínio multiplicativo.

Do ponto de vista dos níveis de estratégias, independentemente de resolução correta ou não, observa-se que os estudantes da 3ª série se aproximam dos da 4ª série, concentrando-se majoritariamente nos níveis 3 e 4.

5. Considerações finais

O objetivo do presente artigo foi o de apresentar e discutir as estratégias empregadas pelos estudantes das séries iniciais do Ensino Fundamental, analisando seus desempenhos na resolução de situações que requerem a operação de divisão. A análise dos resultados nos permite fazer duas considerações: uma do ponto de vista quantitativo e outra do ponto de vista qualitativo.

No que concerne ao ponto de vista quantitativo, se considerarmos o sucesso dos estudantes como indicador de aprendizagem, os resultados indicam que houve pouco ganho quando comparamos o desempenho dos estudantes da 2ª à 4ª séries nas três situações. Esse dado é preocupante, pois era esperado que tivesse uma clara evolução da 2ª para 3ª e desta para a 4ª série, tal qual houve da 1ª para a 2ª série. O estudo aponta que o desempenho dos estudantes não sofre diferença significativa nas situações de quota (coleção e não coleção) comparativamente com a situação de partição. De fato, parece que não é o tipo de situação que leva ao sucesso ou não na resolução do problema; esse sucesso parece estar muito mais relacionado à estratégia utilizada pelo estudante.

Diante do exposto, fizemos a análise também do ponto de vista qualitativo. Para tanto, optamos por analisar todas as estratégias utilizadas pelos estudantes, tanto as que resultaram em sucesso, assim como as que levaram ao erro. Dessa análise identificamos quatro níveis de estratégia, segundo as variáveis “numérico” e "pictórico". Constatamos que a estratégia pictórica foi de grande valia para os estudantes da 2ª e 3ª séries, e mesmo para a 1ª série ela levou muito mais ao sucesso do que a variável numérica. Este fenômeno indica o efeito poderoso que esta variável tem sobre o sucesso dos estudantes, o que nos leva a enfaticamente propor o seu uso no processo de aprendizagem do conceito da divisão. Tal variável parece estar sendo pouco ou nada explorada na escola, perdendo-se assim a oportunidade de introduzir tal operação desde a 1ª série do Ensino Fundamental.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BRASIL. Relatório SAEB – Matemática. *Sistema de Avaliação do Ensino Básico*. Brasília: INEP, MEC. 2006

______. Relatório SAEB – Matemática. *Sistema de Avaliação do Ensino Básico*. Brasília: INEP, MEC. 2008.

BRASIL. Relatório SARESP – Matemática. *Sistema de Avaliação do Ensino Básico*. Brasília: INEP, MEC. 2007

DALLABRIDA, N. Educação Básica: Os resultados preocupantes do SAEB. *Jornal da Educação,* Fev/2007, disponível em: http://www.jornaldaeducacao.inf.br/index.php?option=com_content&task=view&id=108&Itemid=35 (consultado em 20/08/2008).

FISCHBEIN, E.; DERI, M.; NELLO, M.; MARINO, M. The rule of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division. *Journal of Research in Mathematics Education*, 1985, pp. 3-17.

KIEREN, T. Personal Knowledge of rational numbers: its intuitive and formal development. In: HIEBERT, J.; BEHR, M. (eds.). *Number Concepts and Operations in the Middle Grades* Hillsdale, New Jersey: Erlbaum. 1988, pp.80-162.

MAGINA, S.; CAMPOS, T. M. M.; CANOAS, S.S.; CUNHA, M.C: *Similaridades no Pensamento Multiplicativo: Professores e Alunos*, IV CIBEM, 2001, pp.1-8.

MAGINA, S.; GITIRANA, V.; SPINILLO, A.; CAMPOS, T. M. *Repensando Multiplicação e Divisão: Contribuições da Teoria dos Campos Conceituais*. São Paulo: PROEM (no prelo).

NUNES, T.; CAMPOS, T. M. M.; MAGNA, S.; BRYANT, P. *Educação Matemática*: números e operações numéricas. São Paulo: Cortez, 2005.

Relatório OECD (Organização para a Cooperação e o Desenvolvimento Econômico): *The Programme For International Student Assessment:* Disponível em:

http://www.pisa.oecd.org/dataoecd/15/13/39725224.pdf (consultado em 01 de setembro de 2008).

RUDIO, F. V. *Introdução ao Projeto de Pesquisa Científica*. 32. ed. Petrópolis, RJ: Vozes, 2001.

SARESP 2008: Relatório Pedagógico de Matemática – São Paulo, SEE, 2009.

VERGNAUD, G. A. *Multiplicative structures.IEm R. Lesh 8 M. Landau (Eds.).* Acquisitions of mathematics concepts and procedures. New York: Academic Press, 1983, pp.127-174.

______. Multiplicative structures. In: HIEBERT, H.; BEHR, M. (Ed.). *Research Agenda in Mathematics Education.* Number Concepts and Operations in the Middle Grades. Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum, 1988. p. 141-161.

______. La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Grenoble, v. 10, n. 23, p. 133-170, 1990.

______. Multiplicative conceptual field: what and why? In: GUERSHON, H.; CONFREY, J. (Eds.). *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics*. Albany, N.Y.: State University of New York Press, 1994. p. 41-59.