em teia
Revista de Educação Matemática e Tecnológica Ibero-Americana
ISSN 2177-9309

Universidade Federal de Pernambuco
Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica
EDUMATEC

Menos vezes menos dá mais: observações históricas sobre o conceito de número negativo

Minus times minus makes plus: historical remarks about the concept of negative number

Fernando Raul Neto[1]

Resumo:
O presente artigo aborda dois problemas didáticos que ocorrem nas aulas de matemática da 6ª série do Ensino Fundamental: a introdução do conceito de número negativo e a apresentação da regra dos sinais da multiplicação, particularmente, a famosa regra *menos vezes menos dá mais*. O enfoque utiliza a história: exposto o problema didático, recorre-se à história da matemática para tomar exemplos e examinar como a correspondente questão matemática foi abordada. Espera-se que o exame do tateio dos matemáticos traga bons ensinamentos para a didática. O exame é complementado com observações gerais acerca da filosofia da matemática. O artigo conclui com uma prova formal da famosa regra, encontrada na maioria dos livros de álgebra utilizados nos cursos de matemática, e com alguns comentários didáticos.
Palavras chaves: número negativo; regra dos sinais; menos vezes menos dá mais.

Abstract:
This paper concerns two didactical problems that happen to occur in the 6ª class of the *Ensino Fundamental* in Brazil: the introduction of the concept of negative number and the rule of the signs in the multiplication, particularly the famous *minus times minus makes plus*. The way is historical: the didactical problem is presented and one uses the history of mathematics to see how the similar mathematical question was worked out by the mathematicians. The expectation is that the ways with which the mathematicians have thought about will be helpful for didactical uses. The study is complemented with general observations about the philosophy of mathematics. The paper ends with a proof of the famous rule, which is to be founded in the most didactical books of algebra of the mathematics graduate courses, and with some didactical commentaries.
Keywords: negative number; rule of the signs; minus times minus makes plus.

---

[1] Professor da UFPE/Universidade Federal de Pernambuco, CFCH/Depto. de Filosofia, Av. Acadêmico Hélio Ramos, s/n, 15º andar, 50.740-530 Cidade Universitária–Recife–PE. feraneto@uol.com.br. Agradecemos à Capes, que forneceu o apoio financeiro, e à UFPE, que me liberou no período 2007/8 para um Programa de Pós-doutorado na Alemanha, na *Philosophisches Fakultät* da *Universidade de Göttingen*, sob a supervisão do Prof. Dr. Wolfgang Carl. Agradeço as valiosas sugestões de dois pareceristas anônimos. Agradeço também ao Prof. Dr. Gert Schubring, da *Universität Bielefeld*, na Alemanha, que em nossos encontros muito contribuiu tanto para este artigo como para a discussão geral acerca da "metafísica das quantidades negativas".

em teia
Revista de Educação Matemática e Tecnológica Ibero-Americana
ISSN 2177-9309

Universidade Federal de Pernambuco
Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica
EDUMATEC

Introdução

Dois importantes problemas didáticos da matemática da 6ª série são a introdução do conceito de número negativo e a compreensão da *regra dos sinais* na multiplicação. O primeiro é um desafio para os professores, que têm de convencer os seus alunos de que, por exemplo, 7 - 12 = - 5. Até então, seus alunos vinham perdendo bolas de gude no jogo, gastando dinheiro ou emprestando coisas e, com isso, sabiam muito bem que a - b é uma conta muito simples. Desde que a > b! A dificuldade agora é que a < b, e toda aquela experiência e o aprendizado anteriores parecem prejudicar o novo aprendizado. Os professores seguem então, normalmente, as estratégias dos livros didáticos: débito x crédito, temperaturas abaixo e acima de zero, esquerda x direita na reta numérica, etc. A intenção dessas aplicações é mostrar aos alunos que o "-" da conta de subtração não significa *apenas* retirar uma parte concreta de um todo igualmente concreto. Isso tem de ser feito, porque sem ampliar o conceito de subtração e de número não é possível compreender que é permitido fazer “7 menos 12”. Feito isso os professores passam para as expressões numéricas mais simples envolvendo a adição e a subtração e chegam então à famosa regra dos sinais na multiplicação. Ensinar essas regras dos sinais, particularmente a que afirma que “menos vezes menos dá mais”, é o segundo problema mencionado.

Uma leitura dos livros-textos de matemática e dos programas oficiais das Secretarias de Educação dos Estados brasileiros mostra, presumidamente, que as crianças ao final da 5ª série:

1. conhecem os inteiros positivos;
2. aprenderam os algoritmos das quatro operações: **+** (adição)**,** **-** (subtração), x (multiplicação) e ÷ (divisão)
3. associaram (no mínimo) ao sinal **+** a idéia de juntar, ao sinal **-** a idéia de subtrair, ao sinal **x** a idéia de adição repetida e ao sinal ÷ a idéia de divisão;
4. entenderam que as operações de **+** e de **-**, bem como as de x e de ÷, são inversas uma da outra.

em teia Revista de Educação Matemática e Tecnológica Ibero-Americana
Universidade Federal de Pernambuco
Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica
EDUMATEC
ISSN 2177-9309

Sem entrar nos detalhes das estratégias didáticas utilizadas para os quatro aprendizados acima, observamos que, de um modo geral, elas intencionam, por um lado, fornecer aos alunos a habilidade formal na escrita e na leitura matemáticas e, por outro, o domínio progressivo de significados extramatemáticos e intramatemáticos para os conceitos, objetos e operações trabalhadas. Exemplificando, para uma conta como 12 - 5 objetiva-se que o aluno saiba o resultado correto e, ao mesmo tempo, o que significa esse resultado em um campo de aplicações ou de metáforas qualquer.

Olhando para a história da matemática, vemos que esse conteúdo trabalhado até a 5ª série foi menos problemático para os matemáticos. Historicamente problemáticos foram, sim, o conceito de número negativo e a regra dos sinais na multiplicação. São, hoje em dia, desafios, não mais para os matemáticos, mas para os professores de matemática da 6ª série. Neste artigo apresentamos algumas observações histórico-filosóficas, mais filosóficas, que acreditamos iluminam as dificuldades encontradas na didática da matemática, uma vez que a questão didática de hoje guarda fortes semelhanças com a questão matemática de ontem.

A regra dos sinais

A história da matemática conta-nos que os matemáticos tiveram grandes problemas com a regra dos sinais. Segundo Glaeser, os matemáticos necessitaram de mais de um milênio e meio para se porem de acordo sobre o negativo e a regra dos sinais (Cf. GLAESER, 1981, p. 301 e 340)[2]

Os problemas em torno da regra dos sinais que preocuparam os matemáticos também estão presentes na didática da matemática. Um deles é que, quando utilizamos no cálculo aritmético/algébrico usual a regra dos sinais envolvendo a multiplicação, estamos de fato na presença de dois *tipos* de sinais conceitualmente bem distintos. São os *sinais de números* e os *sinais de operação*. É o que acontece quando escrevemos que $7 + 3. (-4) = 7 + (-12) = 7 - 12 = - 5$. É claro que no cálculo não precisamos nos preocupar com os

[2] Não pretendemos aqui uma análise exaustiva dos textos matemáticos e filosóficos sobre os números negativos. Stevin e Euler serão usados a seguir apenas instrumentalmente para apresentar a primeira das dificuldades, a que gira em torno das regras dos sinais. Glaeser apresenta de forma clara as dificuldades dos dois autores. Como leitura adicional, sugerimos os importantes textos de Schubring listados na bibliografia.

emteia Revista de Educação Matemática e Tecnológica Ibero-Americana
ISSN 2177-9309
Universidade Federal de Pernambuco
Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica
EDUMATEC

diferentes sinais envolvidos. É fácil mostrar que as expressões aritméticas envolvendo os dois sinais podem ser reescritas como soma de parcelas que envolvem apenas multiplicações dos números relativos. Mas os dois conceitos precisam ser trabalhados distintamente até entendermos que eles podem ser confundidos no cálculo. Os livros didáticos não nos parecem aqui felizes em suas estratégias didáticas, mas não nos ocuparemos neste artigo com as críticas a essas estratégias.

Vejamos como essa questão se apresenta na história. Um exemplo da *Aritmética* (1634) de Simon Stevin (1548-1620) mostra-nos em qual contexto os matemáticos começaram a justificar que *menos vezes dá mais* e a conviver com os dois tipos de sinais acima comentados. Stevin propunha-se a apresentar uma prova para a regra dos sinais, a qual ele enunciava da seguinte forma:

> Mais multiplicado por mais dá produto mais, & menos multiplicado por menos dá produto mais; & mais multiplicado por menos, ou menos multiplicado por mais, dá produto menos (STEVIN, 1634 apud GLAESER, 1981, p. 312).

De início Stevin toma um exemplo particular e explica o uso das regras:

> Explicação do dado: Suponhamos 8 - 5 multiplicado por 9 - 7 da seguinte maneira: -7 vezes -5 são +35 (+35, porque, como diz o teorema, - vezes - dá +). A seguir -7 vezes 8 faz -56 (-56, porque, como é dito no teorema, - por + dá -). E semelhantemente seja 8 - 5 multiplicado por 9, & darão produtos 72 - 45; depois adicione +72 + 35, são 107. Depois adicione os -56 -45, são 101; e subtraindo o 101 de 107 resta 6, para o produto de tal multiplicação. (STEVIN, 1634, apud GLAESER, 1981, p. 312).

Observemos que o trecho acima é apenas um exercício de aplicação da regra em um caso particular. Não nos diz como a regra surgiu nem apresenta uma prova para elas. Uma prova ele tenta logo a seguir:

em teia
Revista de Educação Matemática e Tecnológica Ibero-Americana
ISSN 2177-9309

Universidade Federal de Pernambuco
Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica
EDUMATEC

```
      8 - 5
      9 - 7
_____________
   -56 + 35
 72 - 45
_____________
      6
```

Explicação do exigido. É preciso demonstrar pelo dado, que + multiplicado por + dá +, & que - por - dá +, & que + por -, ou - por + dá -. Demonstração. O número a multiplicar 8 - 5 vale 3, & o multiplicador 9 - 7 vale 2. Mas multiplicando 2 por 3, o produto é 6.

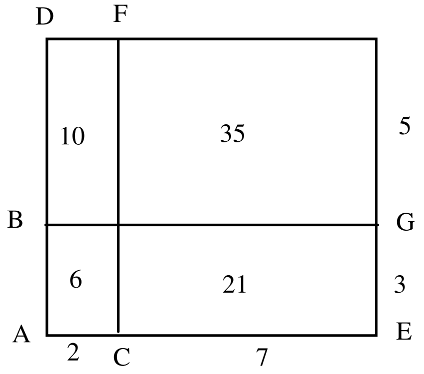
Como o produto acima também é 6 ele é o produto verdadeiro. Mas o valor é encontrado pela multiplicação, onde dissemos que + multiplicado por + dá produto + & - por - dá produto +, & + por -, ou - por + dá produto -, logo o teorema é verdadeiro (STEVIN, 1634, apud GLAESER, 1981, p. 312).

O argumento de Stevin é logicamente falacioso, pois equivale a afirmar: como o resultado ao qual cheguei está correto, então a regra utilizada está correta. Mas, independentemente da falácia cometida, seu exemplo é bem instrutivo didaticamente. De passagem, ele já mostra o quanto o conceito de prova matemática depende da época histórica. Hoje, com certeza, qualquer aluno do 2º grau não aceitaria essa prova de Stevin, no máximo uma verificação do teorema em um caso particular. Mas, para a nossa exposição, vale observar que em Stevin não aparecem números *positivos* e *negativos*. Os sinais "+" e "-" são "sinais de operação". Número negativo isolado não tem sentido algum para Stevin. O -56 do algoritmo acima é exclusivamente um resultado intermediário (Cf. GLAESER, 1981, p. 313).

Stevin conclui com outra demonstração, geométrica agora, para o teorema. Na realidade, a Geometria aparece apenas como auxílio epistemológico para a distributividade e, novamente, para confirmar as regras dos sinais.

em teia
Revista de Educação Matemática e Tecnológica Ibero-Americana
ISSN 2177-9309

Universidade Federal de Pernambuco
Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica
EDUMATEC

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>Outra demonstração geométrica
Suponhamos AB 8 - 5 (a saber, AD8 - DB5). Depois AC 9 - 7 (a saber, AE9 - EC7) seu produto será CB: ou seja, segundo a multiplicação precedente ED72 - EF56 -DG45 + GF35, os quais demonstraremos serem iguais a CB desta maneira. De todo ED + GF, subtraindo EF, & DG, resta CB.
Conclusão. Logo mais multiplicado por mais, dá produto mais, & menos multiplicado por menos, dá produto mais, &</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">mais multiplicado por menos, ou menos multiplicado por mais, dá produto menos; o que queríamos demonstrar (STEVIN, 1634 apud GLAESER, 1981, p. 312).</td>
</tr>
</table>

Leonhard Euler (1707-1783), na sua *Introdução completa à álgebra superior* (*Vollständige Anleitung zur Algebra)*, é descritivo em sua abordagem das operações com números relativos:

> Quando a um número outro é reunido ou adicionado, então esse outro é indicado com o sinal +, que deve ser anteposto a ele e que se pronuncia mais (EULER, 1796, § 8, p. 7).
> Quando, ao contrário, de um número outro deve ser retirado ou subtraído, este é indicado com o sinal -, que se pronuncia menos ou menos que, e que deve ser anteposto ao número que deve ser subtraído (Ibidem, § 11, p. 8).
> [...] na Álgebra consideram-se os números com seus sinais como grandezas isoladas e aquelas que têm o sinal + são chamadas de afirmativas ou positivas; as que têm o sinal - de grandezas denegativas ou negativas (Ibidem, §16, p. 11).

emteia Revista de Educação Matemática e Tecnológica Ibero-Americana
ISSN 2177-9309
Universidade Federal de Pernambuco
Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica
EDUMATEC

É bem conhecida a prova que Euler apresenta para a regra *menos vezes menos dá mais* no seu livro de álgebra. De início ele justifica as demais regras, utilizando argumentos envolvendo grandezas, mais ou menos como se faz hoje em dia nos textos de matemática para a 6ª série. Por exemplo, ele justifica que + x - = -, argumentando que três dívidas de *a* reais perfazem uma dívida de *3a* reais. Observemos, de passagem, que Euler lança mão aqui da comutatividade para concluir outra regra, a de que - x + = -. Mas, representativa mesmo da dificuldade envolvendo a questão é a sua argumentação para a regra - x - = +, um misto de dribles e firulas técnico-verbais, que citamos por completo: [3]

> Agora só falta um caso para determinar, a saber, quando - e -, por exemplo, -a e -b são multiplicados. De início está claro que o produto em pauta com respeito às letras é ab; se o seu sinal é + ou - ainda não é sabido; mas algo é certo, que ele tem de ser ou um ou o outro. Porém afirmo que não pode ser o sinal -. Pois, quando -a é multiplicado por +b o resultado é -ab; dessa forma -a vezes -b não pode fornecer aquilo que -a vezes +b fornece; é preciso portanto que surja o contrário, a saber, o produto +ab. Dessa forma surge a regra: Negativo vezes negativo ou - multiplicado por - dá mais, da mesma forma que + vezes + (EULER, 1770, p. 19).

O conceito de número negativo

Esses exemplos de Stevin e de Euler que aqui trouxemos tirados do artigo de Glaeser são para ilustrar que, até certo momento da história da matemática, a grande preocupação não era com as questões ontológicas acerca do negativo, não havia preocupação maior com a *natureza metafísica* do negativo. A pergunta metafísica clássica - o que é um número negativo? – não se punha com a mesma força e intensidade que ela teria na primeira metade do século XIX. E isso, como Glaeser ilustrou, por uma razão logicamente simples: não havia o objeto acerca do qual se pudesse, filosoficamente, indagar sobre sua natureza, se concreta, abstrata, ou de qual outro tipo. Os exemplos paradigmáticos de Stevin e Euler mostram que os matemáticos preocupavam-se mais em

[3] Confira também a análise que GLAESER 1981 faz sobre essa prova.

em teia
Revista de Educação Matemática e Tecnológica Ibero-Americana
ISSN 2177-9309
Universidade Federal de Pernambuco
Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica
EDUMATEC

explicar como e por que funcionavam as operações com os números relativos. Além de saberem que elas *funcionam* aritmeticamente na distributividade, havia o apoio oferecido pelo recurso à Geometria, como no caso de Stevin, ou o apoio de situações do cotidiano, como no exemplo de Euler. É interessante observar que os matemáticos estavam fazendo matemática, utilizando exatamente recursos do domínio hoje dos professores de matemática do Ensino Fundamental em suas salas de aula.

As dificuldades metafísicas começaram de fato em outro momento da história, quando os negativos isolados entrelaçados na regra dos sinais começavam a ter livre trânsito na matemática. A partir da segunda metade do século XVII, a partir do rápido desenvolvimento da álgebra, da teoria das equações em particular, o cálculo com os números relativos instaurou-se sem maiores questionamentos na prática matemática. Havia já uma prática bem estabelecida, bem mais próxima dos atuais procedimentos, mas que era incapaz de responder e dar respostas convincentes e de aceitação universal para certas perguntas básicas que começavam a ser feitas. O que é um número negativo? Como entender algo que é menor que nada? Como justificar, sem apelo a metáforas e com o grau de rigor que começava a ganhar contornos mais próximos dos dias de hoje, as regras básicas da aritmética e da álgebra elementares, particularmente a regra de que na multiplicação *menos vezes menos dá mais*? Da mesma forma que hoje, qualquer texto de álgebra ou aritmética iniciava com a apresentação dos números, das suas quatro operações básicas e das regras básicas da aritmética e da álgebra. Não faltaram, então, nem explicações para a *metafísica do negativo,* nem tentativas de organização lógica do edifício da matemática elementar, particularmente as *provas* para a regra dos sinais. Mas os matemáticos ainda não dispunham de uma prova para as regras dos sinais que obtivesse uma aceitação universal. Tanto as diversas tentativas apresentadas quanto às críticas que elas traziam contra si estavam longe de alcançar aceitação universal. Uma escolha aleatória de textos de matemática dos séculos XVIII e XIX, por exemplo, apresentaria com grande probabilidade uma *prova* para cada autor. E diferentes não em estilo ou em coisas semelhantes, mas essencialmente diferentes em seus fundamentos. Uma citação de um

emteia Revista de Educação Matemática e Tecnológica Ibero-Americana
ISSN 2177-9309
Universidade Federal de Pernambuco
Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica
EDUMATEC

texto de álgebra inglês mostra a falta de unanimidade sobre a questão e o grau de insatisfação dos matemáticos ao final do século XVIII.

> As idéias de número são as mais claras e as mais distintas da mente humana; as ações mentais sobre elas são igualmente simples e claras. Não existe confusão entre elas. [...] Mas os números são divididos em duas espécies, positivos e negativos; e uma tentativa é feita para explicar a natureza do número negativo aludindo a débitos e créditos e outras coisas. Porém quando uma pessoa não consegue explicar os princípios de uma ciência sem referências metafóricas a probabilidade é que ela nunca pensou acuradamente sobre a matéria. Um número pode ser maior ou menor que outro; ele pode ser adicionado, subtraído, multiplicado e dividido por outro número; mas em outro aspecto ele é intratável: até que o mundo inteiro seja destruído, um será um e três será três; e nada poderá mudar sua natureza. Você pode colocar um sinal antes dele e ele obedecerá: ele se submete a ser subtraído de outro número maior que ele, mas qualquer tentativa de subtraí-lo de um número menor que ele próprio é ridícula. Embora isto seja tentado pelos algebristas que falam de número menor que nada, de multiplicar um número negativo por um número negativo produzindo dessa forma um número positivo e de um número ser imaginário. Falam assim, portanto, de duas raízes para cada equação do segundo grau [...] falam que resolvem uma equação quando ela exige duas raízes impossíveis para torná-la solúvel: eles descobrem alguns números impossíveis que multiplicados entre si produzem a unidade. Tudo isto é jargão que o senso comum recusa (FREND, 1796, p. x-xi, apud NAGEL, 1979a).

A história do desenvolvimento do conceito de número negativo passa pelas críticas relativas ao seu legítimo estatuto na matemática, pelas descrições das razões de sua não aceitabilidade pelos matemáticos e pelas tentativas de deduzir as regras dos sinais. As dificuldades, ao cabo e ao final, são a confusão entre sinal de operação e sinal de número, como mostrado no exemplo de Viète, e, ligada a essa primeira, a tentativa de fazer o negativo surgir ontologicamente a partir de considerações epistemológicas acerca do mesmo, como no exemplo de Euler. As tentativas de justificar os dois tipos de sinais, de diferenciar *sinal de número* de *sinal de operação*, eram frequentes nas provas da regra dos sinais, tanto pela utilização de expressões diferentes, como *negativo/subtrativo* e *positivo/aditivo* (Cf. KLÜGEL, 1795) quanto pelo uso de símbolos diferentes, como $4 - 7$

ISSN 2177-9309

ou $4+\bar{7}$. (Cf. FÖRSTEMANN, 1817)[4]. O passo que os matemáticos demoraram a dar foi exatamente esse, o do reconhecimento da impossibilidade de deduzir o negativo do positivo; da impossibilidade de o negativo surgir dentro do conceito restrito da operação de subtração. Era preciso ampliar os conceitos de número e de operação.

> A ampliação do conceito de número pela introdução dos números negativos foi uma conseqüência da necessidade de generalizar a subtração. Tal generalização foi, no desenvolvimento da álgebra, logo cedo reconhecida como de grande comodidade. Levados pela necessidade a introduzir os números negativos os matemáticos jamais conseguiram livrar a sua teoria dos incômodos paradoxos. Na segunda metade do século as explicações gerais acerca dos números negativos e das suas regras operacionais foram gradativamente reconhecidas como insuficientes, sem que, no entanto, se tenha conseguido no século XVIII um desenvolvimento rigoroso dos pressupostos lógicos (CANTOR, 1908, p. 79).

Tentava-se o impossível, a saber, deduzir os números negativos dos positivos, sem expressamente ampliar a operação de subtração ou iluminar o conceito de "menor que nada". Tal ampliação ou iluminação exigiria a generalização do conceito de número. (CANTOR, 1908, p. 87).

O entendimento substancial dos negativos

É evidente que, se a matemática é entendida, como efetivamente ocorreu durante bom tempo de sua história, apenas como a ciência das grandezas, o conceito de número tem de ser ligado ao conceito de grandeza, e surgirão, especialmente com os números negativos, algumas dificuldades. Nagel escreve a respeito:

[4] Klügel e Förstemann são apenas dois exemplos entre outros autores do século XIX que tentaram justificar as regras dos sinais por meio da diferenciação entre sinal de número e sinal de operação. O leitor pode consultar NETO 1995 e NETO 1992 para uma lista mais extensa. Förstemann, com a sua diferenciação consegue avançar mais e aproximar-se das futuras formulações estruturadas da aritmética. Em NETO 1995 o leitor encontra uma análise mais detalhada do livro de Förstemann.

emteia Revista de Educação Matemática e Tecnológica Ibero-Americana
ISSN 2177-9309
Universidade Federal de Pernambuco
Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica
EDUMATEC

> Número é entendido em primeira e última instância como uma resposta às questões Quantos são? e, no caso de grandezas extensivas, Quanto mede? [...] Se matemática era a ciência das grandezas, então esses números impossíveis tem de ser quantidades; mas quantidades negativas e imaginárias eram simplesmente sem sentido, incompatíveis com todas as definições anteriores de quantidade. [...] Se número não era nada mais que a resposta a Quantos são? e Quanto mede?, então os números negativos e imaginários não tinham lugar na Matemática (NAGEL, 1979a, p. 196).

A questão é que esses números tinham lugar na matemática. Ao final do século XVIII, eles faziam parte da cultura geral matemática e a aritmética dos números relativos e a álgebra elementar eram conteúdos obrigatórios dos livros-textos. O conflito era conciliá-los, era entendê-los, numa matemática que ainda estava fortemente ligada ao empirismo. A história do negativo é a história da mudança do auto-entendimento da matemática pelos matemáticos. É a história da passagem de uma matemática relativamente *concreta* para uma mais *abstrata*.[5]

Pelo menos uma das dificuldades que os alunos encontram no aprendizado do conceito de número negativo guarda um paralelo muito forte com uma dificuldade encontrada pelos matemáticos no desenvolvimento histórico do conceito. Trata-se da dificuldade de entender o negativo no quadro de uma concepção *substancial* de número. Por essa concepção, que predominou até certo período do século XIX, o número era entendido como *coisa*, como grandeza, como objeto dotado de substância, e não como objeto abstrato. É claro que dentro dessa concepção fica difícil entender o número negativo. Um fato corriqueiro da matemática, o que afirma que "um número negativo é menor que zero", torna-se problemático. Isso porque, se número é quantidade, a identificação do número zero com ausência de quantidade ou com a expressão *nada* é natural. E como conceber algo menor que nada?

---

[5] Gottlob Frege (1848-1925), em 1884, publicou seu "*Os fundamentos da aritmética - uma investigação lógico-filosófica sobre o conceito de número*", que traz uma extensa análise histórica das concepções de número e de operações entre números. O livro é de leitura agradável, e os argumentos de Frege contra as concepções empiristas e psicológicas de número são de extrema atualidade e relevantes para a educação matemática. A tradução brasileira, Frege 1980, é da coleção "Os Pensadores" e fácil de obter.

emteia Revista de Educação Matemática e Tecnológica Ibero-Americana
ISSN 2177-9309
Universidade Federal de Pernambuco
Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica
EDUMATEC

Os textos de matemática do final do século XVIII até a primeira metade do século XIX são pródigos em questionar ou tentar elucidar o significado de "uma quantidade negativa isolada". O matemático francês Lazare Carnot (1753-1823) perguntava explicitamente: "Para obter realmente uma quantidade negativa isolada é preciso retirar uma quantidade efetiva de zero, tirar qualquer coisa de nada: operação impossível. Como conceber então uma quantidade negativa isolada?" (CARNOT, 1803, p. iii).

Para Carnot, admitir que as quantidades negativas sejam menores que zero é introduzir na matemática "uma porção de paradoxos" e "absurdos palpáveis". Ele argumenta, num outro exemplo, que -3 seria menor que 2, enquanto que $(-3)^2$ seria maior que 2^2, uma vez que $(-3)^2$ é 9 e 2^2 é 4. Isto é, conclui Carnot, "entre duas quantidades desiguais 2 e -3, o quadrado da maior seria menor que o quadrado da menor, e reciprocamente. O que choca com todas as idéias claras que se pode formar sobre quantidade" (CARNOT, 1803, p. ix).

Carl Friedrich Gauss (1777-1855), em 1831, no seu famoso artigo onde ele apresenta uma interpretação geométrica para os números complexos, alertava para a impossibilidade de um entendimento correto do conceito de negativo quando prevalece uma concepção substancial de número, que parece ser aquilo para o que Carnot procura chamar atenção em suas indagações. Para Gauss,

> números positivos e negativos só podem encontrar uma aplicação quando o que se conta possui um oposto, quando o que se conta se pode comparar com a idéia de aniquilação. Olhando precisamente, só se encontra esta condição quando os objetos que se contam não são substâncias (objetos pensáveis em si próprios), mas relações entre cada dois objetos (GAUSS, 1831, p. 175).

Quando se conta, Gauss alerta, não se contam objetos concretos, "objetos pensáveis em si próprios", mas "relações entre cada dois objetos". Isso hoje pressupõe, na didática da matemática das séries iniciais, um trabalho bem cuidadoso no ensino da relação entre os aspectos ordinais e cardinais do número. O grande passo histórico dado no século XIX, ao qual Gauss explicitamente alude na citação acima, foi perceber que os conceitos

em teia
Revista de Educação Matemática e Tecnológica Ibero-Americana
ISSN 2177-9309
Universidade Federal de Pernambuco
Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica
EDUMATEC

matemáticos não representam *coisas*, mas *relações entre coisas*; foi perceber que "dessa forma a matemática é, no sentido mais geral, a ciência das relações na medida em que se abstrai todo conteúdo das relações. Relação pressupõe duas coisas e chama-se então relação simples, etc." (GAUSS, 1809, p. 396)[6]. Essa mudança no auto-entendimento da matemática, que Ernst Cassirer caracterizou como "a passagem do pensamento substancial para o pensamento funcional" (Cf. JAHNKE, 1981, p. 218), entrelaça-se com o desenvolvimento histórico do conceito de número, isto é, os dois desenvolvimentos são interdependentes, e a história de um é a história do outro (evidente que também com a história de outros conceitos matemáticos).

O pensamento substancial foi, assim, um obstáculo que os matemáticos precisaram ultrapassar para que o conceito de número, em particular o de número negativo, pudesse ser corretamente apreendido. Com as crianças parece ocorrer o mesmo, e a didática precisa montar estratégias para ajudá-las a superar a dificuldade. Isso poderia ser feito desde os primeiros anos da educação da criança, evitando-se a identificação irrestrita entre os objetos e os conceitos matemáticos e as suas representações empíricas. Os objetos e os conceitos matemáticos são entidades teóricas, abstratas e, ao mesmo tempo, capazes de revelar as relações mais diversas do mundo empírico. Dito de outro modo, é preciso que se mantenha a interdependência entre a *matemática* e a *aplicação da matemática*. Não se deve nem identificá-las nem separá-las radicalmente. Exemplificando, a identificação entre o *conceito matemático de subtração* e a aplicação *retirar a quantidade b de uma quantidade maior a* privaria de desenvolvimento os dois lados. Não seria possível aplicar o conceito ao caso a - b, quando b > a. Por outro lado, as duas coisas não são completamente independentes. Novas aplicações sugerem ampliações da teoria e, reciprocamente, modificações teóricas, sugeridas pela própria dinâmica interna da teoria, abrem o campo para novas aplicações. Portanto, é importante que o número seja entendido como relação, para além de uma simples resposta às questões: *quantos são?* e *quanto mede?* Acostumar a criança a *pensar em relações,* ajudá-la a superar o obstáculo do pensamento substancial e ensiná-la a

[6] Cf., também nesse ponto, JAHNKE 1981.

em teia
Revista de Educação Matemática e Tecnológica Ibero-Americana
ISSN 2177-9309

Universidade Federal de Pernambuco
Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica
EDUMATEC

trabalhar corretamente a interdependência entre matemática e aplicação da matemática são diretrizes básicas para o professor de matemática.

Uma solução estruturada

A grande característica do século XIX é que ele se encontra entre os séculos XVIII e XX. Essa blague que alguém já utilizou para caracterizar no mesmo tom o século XVI pretende ressaltar o caráter de preparação do século XIX. Sua característica seria a de passagem de uma matemática substancial, característica do século XVIII, para uma matemática que no século XX trabalhou com estruturas axiomatizadas. O século XIX preparou a passagem de uma matemática concreta para uma matemática abstrata. A álgebra e a aritmética elementares são exemplos paradigmáticos dessa passagem, particularmente, a questão da natureza do número negativo e a da justificativa da regra dos sinais. E nenhum outro autor exprimiu essa tensão entre o concreto e o abstrato, entre uma matemática substancial e uma matemática estrutural como o matemático inglês George Peacock (1791-1858), quando publicou em 1830 seu *Treatise of Algebra* (ampliado em dois volumes em 1842 e 1845). Peacock contempla a tensão, ao estabelecer uma diferença entre *álgebra aritmética* e *álgebra simbólica* que procurava, particularmente, solucionar a questão da subtração a - b quando a < b. Para Peacock, na álgebra aritmética

> os sinais + e - denotam as operações de adição e subtração apenas em seus significados ordinários, e elas são consideradas impossíveis em todos os casos onde os símbolos submetidos a elas possuem valores que tornam as operações impossíveis quando eles são substituídos por números digitais (PEACOCK, 1842, p. iv).

A álgebra simbólica, ao contrário,

> adota as regras da Álgebra aritmética, mas remove todas as suas restrições: assim a subtração simbólica difere da mesma operação na Álgebra aritmética pela permissão do uso de todas as relações de valor dos símbolos ou expressões utilizadas (PEACOCK, 1842, p. vi).

Peacock, evidentemente, usa “força bruta” para “resolver” o problema. Por um ato

emteia Revista de Educação Matemática e Tecnológica Ibero-Americana
ISSN 2177-9309
Universidade Federal de Pernambuco
Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica
EDUMATEC

de vontade, ele estabelece uma álgebra simbólica tal qual a álgebra que ele chama de aritmética, mas removendo "todas as suas restrições". A importância histórica dessa divisão da álgebra é que Peacock não tenta mais justificar empiricamente as "operações impossíveis". Peacock justifica a transição de uma Álgebra para a outra pela formulação de um "princípio da permanência de formas equivalentes", que é simplesmente a expressão em leis gerais dos resultados da álgebra aritmética. Por exemplo, a comutatividade a + b que se conhece na Aritmética dos números positivos é formulada para todos os valores de a e de b. "É a adoção das regras das operações da Álgebra aritmética como as regras para realizar as operações que possuem o mesmo nome na Álgebra simbólica que garante a identidade absoluta dos resultados das duas ciências quando esses resultados existem" (PEACOCK, 1842, p. vi).

O caminho aberto por Peacock foi trilhado pelo matemático alemão Hermann Hankel (1839-1873) em seu livro *Theorie der komplexen Zahlensysteme*[7] (1867) que, de forma mais clara e explícita, percebeu a necessidade de ampliação do conceito de número. Hankel, da mesma forma que Peacock, estabeleceu um Princípio da permanência das leis formais:

> Quando duas formas da arithmetica universalis expressas em símbolos gerais são iguais entre si, elas devem permanecer iguais entre si mesmo quando os símbolos deixam de designar simplesmente grandezas, e dessa forma também as operações podem obter qualquer outro conteúdo. (HANKEL, 1867, p. 11).

O passo essencial dado por Hankel é a introdução formal do conceito de número negativo. Em uma igualdade a + b = c, explica Hankel, a soma c é obtida de a e de b. Ele pergunta, então, o valor que x deve possuir para que x + b = c. Segundo ele, só deve existir um valor para x, o qual ele designa por x = c - b. É evidente que, se b > c, não existe

[7] Hermann Hankel (1839-1873) foi matemático e historiador da matemática da Alemanha. Publicou, em 1867, sua *Theorie der complexen Zahlensysteme insbesondere der gemeinen imaginären Zahlen und der Hamiltonschen quaternion nebst ihrer geometrischen Darstellung* (Teoria dos sistemas de números complexos, particularmente dos números imaginários ordinários e dos quarténios de Hamilton juntos de sua representação geométrica). Observemos que Hankel organizou a álgebra e a aritmética como subproduto de seu objetivo maior, que é o sistema de números complexos e a álgebra dos quatérnios.

em teia
Revista de Educação Matemática e Tecnológica Ibero-Americana
ISSN 2177-9309
Universidade Federal de Pernambuco
Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica
EDUMATEC

número na seqüência 1, 2, 3... que satisfaça a igualdade. "Nada nos impede, porém, de ver a diferença (c - b) como um símbolo que satisfaz a igualdade e que deve ser operado da mesma forma como se fosse um número da seqüência 1, 2, 3..." (HANKEL, 1867, p. 5).

Na realidade, Hankel postula a existência do número negativo pela condição de que ele, adicionado ao seu oposto positivo, iguala a zero. Basta tomar $c = 0$ nas duas igualdades anteriores. Em sua essência, o que Hankel fez é o que se encontra hoje nos textos de Álgebra da universidade: organizar formalmente a Álgebra elementar através de axiomas. As quatro operações elementares realizadas no conjunto $\Re$ dos números reais e todas as suas propriedades operatórias, incluindo a regra dos sinais, bem como a introdução do negativo, são ou explicitamente enunciadas nos axiomas ou facilmente dedutíveis deles. Esses axiomas podem, hoje, ser enunciados da forma abaixo:

No conjunto $\Re$ dos números reais existem duas operações, + (adição) e. (multiplicação), que satisfazem as seguintes propriedades:

A1: Para todo $x, y \in \Re$ vale $x + y = y + x$.

A2: Para todo $x, y, z \in \Re$ vale $x + (y + z) = (x + y) + z$.

A3: Existe um elemento em $\Re$ que é neutro na adição, isto é, chamando esse elemento de 0, vale $x + 0 = x$, para todo $x \in \Re$

A4: Para cada elemento $x \in \Re$ existe um elemento, representado por $-x$, tal que $x + (-x) = 0$.

M1: Para todo $x, y \in \Re$ vale $x \cdot y = y \cdot x$.

M2: Para todo $x, y, z \in \Re$ vale $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$.

M3: Existe um elemento em $\Re$ que é neutro na multiplicação, isto é, chamando esse elemento de 1, vale $x \cdot 1 = x$, para todo $x \in \Re$

M4: Para cada elemento $x \in \Re$, $x \neq 0$, existe um elemento, representado por x^{-1}, tal que $x \cdot x^{-1} = 1$.

D: Para todo $x, y, z \in \Re$ vale $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.

Observemos que essa estruturação sintetiza toda essa história envolvendo os

em teia
Revista de Educação Matemática e Tecnológica Ibero-Americana
ISSN 2177-9309

Universidade Federal de Pernambuco
Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica
EDUMATEC

números relativos e as suas regras operacionais. Esse *final de história* ensina-nos duas lições que são de extrema importância para a didática da matemática. Primeiro, nos mostra que a *limpeza*, a *clareza* e a *estética* das exposições matemáticas dos textos de hoje em dia — e que são perseguidas nas aulas pela grande maioria dos professores — ocultam, evitam ou dissimulam um grande número de idéias matemáticas que são de extrema importância para o aprendiz de matem matemática. Segundo, expõe de forma bem nítida o alcance e os limites do método axiomático. De fato, a escolha das proposições primitivas da fundamentação axiomática da aritmética dos números reais acima não é feita de forma arbitrária, como pode aparecer em uma primeira vista. A escolha é uma forma de sintetizar a história. Os axiomas registram uma opção para depurar o resultado de milênio e meio de dúvidas, incertezas, erros, hesitações, tentativas, etc. Isso vale em geral, pois, quando se deseja organizar uma ciência através do método axiomático, parte-se da herança histórica dessa ciência, para, através da análise lógica de seus conceitos, métodos, provas e, principalmente, das dificuldades históricas enfrentadas pelos cientistas, determinar os princípios, os seus axiomas, necessários para sua fundamentação e daí deduzir a ciência.

Observemos, nos axiomas acima, a simetria quase perfeita entre os axiomas para a adição e os axiomas para a multiplicação. De início, eles estabelecem a comutatividade e a associatividade para cada uma das duas operações. O axioma A3 postula a existência do 0 como elemento neutro. O mesmo faz M3, com relação ao número 1 na multiplicação. O axioma A4 é de especial importância para a questão do negativo. Reconhece-se a impossibilidade de deduzir o negativo. O axioma simplesmente postula o negativo, definindo-o, implicitamente, pela condição $x + (-x) = 0$. M4 é o correspondente de A4 na multiplicação. Observemos que o 0 não tem inverso multiplicativo, isto é, não existe divisão por zero. O axioma D é a distributividade da operação de $\cdot$ pela operação de $+$. Ele é necessário, porque, até então, as duas operações estavam completamente independentes uma da outra. Por fim, observemos que só existem duas operações e que não há mais necessidade de falar em *sinal de operação* e *sinal de número*. A subtração a - b, entre dois elementos quaisquer de □$\Re$□, é definida como a adição a + (-b) de a pelo inverso aditivo de

em teia
Revista de Educação Matemática e Tecnológica Ibero-Americana
ISSN 2177-9309

Universidade Federal de Pernambuco
Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica
EDUMATEC

b. Do mesmo modo, a divisão a/b, $b \neq 0$, é definida por $a \cdot b^{-1}$. Vejamos alguns resultados que podem ser deduzidos dos axiomas acima.

Teorema 1: O elemento neutro da adição, o número 0, é único.

Prova:

Suponha que existam em $\mathfrak{R}$ dois elementos neutros para a adição, 0 e 0*. Adicionando-os obtemos:

0 + 0* = 0 (porque 0* é elemento neutro) = 0* (porque 0 é elemento neutro). Obtemos, assim, que 0* = 0.

Teorema 2: O elemento simétrico de um elemento x ε $\mathfrak{R}$ é único.

Prova:

Sejam -x e (-x)* dois elementos de $\mathfrak{R}$ tais que x + (-x) = 0 e x + (-x)* = 0.

Temos, então, (-x)* = (-x)* + 0 = (-x)* + [x + (-x)] = [(-x)* + x] + (-x) = 0 + (-x) = -x, como desejávamos.

Teorema 3: Se x + x = x em $\mathfrak{R}$ então x é o elemento neutro de +, isto é, x = 0.

Prova:

Pelo Axioma A4, existe o elemento -x em $\mathfrak{R}$ Somando - x aos dois membros da igualdade dada, obtemos:

-x + (x + x) = -x + x	
(-x + x) + x= 0	Axiomas A2 e A3
0 + x = 0	Axioma A2
x = 0	Axioma A3

Teorema 4: Zero vezes qualquer número dá zero, isto é, $0 \cdot x = 0$, para todo x ε **$\mathfrak{R}$.**

Prova:

Partimos do primeiro membro da igualdade e aplicamos o axioma A3.

$0 \cdot x = (0 + 0) \cdot x$

Usando-se a distributividade, axioma D, obtemos:

emteia Revista de Educação Matemática e Tecnológica Ibero-Americana
ISSN 2177-9309
Universidade Federal de Pernambuco
Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica
EDUMATEC

$0 \cdot x = 0 \cdot x + 0 \cdot x$

Tendo já sido demonstrado que o elemento neutro 0 é o único elemento x em $\Re$ que satisfaz a propriedade x + x = x, conclui-se da igualdade anterior que $0 \cdot x = 0$.

Teorema 5: O simétrico do simétrico de x é x, isto é, -(-x) = x.

Prova:

Dado x ε $\Re$ temos x + (-x) = 0. Pela comutatividade, temos (-x) + x = 0, isto é, x é o elemento simétrico de -x (único pelo Teorema 2). Logo, -(-x) = x.

Teorema 6: a) “Menos vezes mais dá menos”, isto é, $(-x) \cdot y = - x \cdot y$. e b) Mais vezes menos dá menos, isto é, $x \cdot (-y) = - x \cdot y$.

Prova:

a) $x \cdot y + (-x) \cdot y = [x + (-x)] \cdot y = 0 \cdot y = 0$. O que mostra que $- x \cdot y = (-x) \cdot y$ (Pelo axioma A4).

Analogamente, mostra-se que $- x \cdot y = x \cdot (-y)$.

Teorema 7: “Menos vezes menos dá mais”, isto é, $(-x) \cdot (-y) = x \cdot y$.

Prova:

$(-x) \cdot (-y) = - [x \cdot (-y)] = - (-x \cdot y) = x \cdot y$

Os teoremas 1, 2 e 3 não se impõem de forma dramática na escola secundária. São resultados acerca da unicidade do elemento neutro da adição, o 0, da unicidade do inverso aditivo, e apenas o 0, na adição, tem a propriedade formal de atender a igualdade x + x = x. O Teorema 4 surge, na didática da escola secundária, de maneira forte. Como justificar didaticamente para os alunos que “zero vezes qualquer número dá zero”? Os teoremas 5 e 7 apontam para o núcleo problemático, na escola secundária, da identificação entre sinal de número e sinal de operação. Conceitualmente, afirmar que o “simétrico do simétrico de um número é igual a ele mesmo” é uma coisa bem diferente de afirmar que “menos vezes menos dá mais”. Formalmente, o problema nem surge, mas ele se impõe com toda a força na didática da escola secundária. Relacionar o inverso aditivo, o simétrico de um número, com a operação de subtração poderia, a meu ver, ser mais bem explorado em direção de

emteia Revista de Educação Matemática e Tecnológica Ibero-Americana
ISSN 2177-9309
Universidade Federal de Pernambuco
Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica
EDUMATEC

uma didática adequada para o problema da introdução das regras dos sinais na multiplicação.

Esses teoremas demonstrados, junto com os axiomas utilizados em suas demonstrações, respondem matematicamente à questão acerca da impossibilidade da divisão por zero, provam as regras dos sinais e provam que "zero vezes qualquer número dá zero", que foram algumas das questões que acompanharam os matemáticos em suas tentativas de organizar a aritmética dos inteiros. Mas essa solução formal, por exemplo, a prova de que *menos vezes menos dá mais* (Teorema 7 acima) (Cf. NACHBIN, 1974, p. 89 ff.), não é uma solução didática. Lembremos apenas que ela é uma prova feita nos cursos universitários de álgebra. Demonstrar para o aluno da 6ª série, demonstrar no sentido mais forte da expressão, qual seja, o do convencimento epistêmico, que *menos vezes menos dá mais*, permanece um problema aberto para a didática da matemática e ainda um desafio para os pesquisadores em educação matemática e para os autores de livros didáticos. Não obstante, é importante que o professor de matemática perceba que a solução estrutural axiomática não se ganha pelas soluções didáticas, que são em sua grande parte soluções epistêmicas, das diversas questões envolvidas. Não que se imponha a solução estrutural como horizonte a alcançar na escola secundária, nem tampouco que isso tenha de se descartar *a priori*, mas que se compreenda que ela pode oferecer aos pesquisadores os limites e as possibilidades das soluções epistêmicas e os consequentes norteamentos em sala de aula.

Referências bibliográficas

CANTOR, Moritz (Ed.). *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*. New York, Stuttgart: B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, 1908.

CARNOT, Lazare. *Géométrie de position*. Paris: Duprat, 1803.

EULER, Leonhard. *Vollständige Anleitung zur Algebra.* Erster Teil, Berlin: 1770. (Ausgabe 1802).

emteia Revista de Educação Matemática e Tecnológica Ibero-Americana
ISSN 2177-9309
Universidade Federal de Pernambuco
Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica
EDUMATEC

FÖRSTEMANN, Wilhelm August. *Über den Gegensatz Positiver und Negativer Größen.* Wiesbaden: LTR-Verlag, 1981. [1817].

FREGE, Gottlob. *Os fundamentos da aritmética.* Uma investigação lógico-matemática sobre o conceito de número. Tradução e introdução de Luiz Henrique Lopes dos Santos. São Paulo: Abril Cultural, 1980. (Coleção os pensadores).

FREND, William. *The principles of algebra*. London: 1796.

GAUSS, Carl Friedrich. Fragen zur Metaphysik der Mathematik. *Werke*, X/1, 396-397, 1809.

GAUSS, Carl Friedrich. Theoria residorum biquadraticorum, commentatio secunda In: *Göttingische gelehrte Anzeigen,* Gauß, Werke 2, 1831.

GLAESER, Georges. Epistemologia dos números relativos. *Boletim do Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática — Gepem*, n. 17, 1985.

GLAESER, Georges. Epistemologie des nombres relatifs. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, v. 2, n.3, p. 303-346, 1981.

HANKEL, Hermann, *Théorie der complexen Zahlensysteme insbesondere der gemeinen imaginären Zahlen und der Hamilstonschen Quaternion nebst ihrer geometrischen Darstellung.* Leipzig: Leopold Voss, 1867.

JAHNKE, Hans Niels. Zahlen und Größen - Historische und Didaktische Bemerkungen. *Mathematische Semesterberichte*, n. 28, p. 202-229, 1981.

KLÜGEL, G. S. Über die Lehre von den entgegengesetzten Größen. *Archiv der Reinen und Angewandte Mathematik*, v. 1, n. 3, 5, p. 308-319/470-481, 1795.

NACHBIN, Leopoldo: *Introdução à álgebra*. São Paulo: McGraw-Hill do Brasil, 1974.

NAGEL, Ernest. Impossible numbers: a chapter in the history of modern logic. In: NAGEL, Ernest. *Teleology revisited and other essays in the philosophy and history of science*, New York: Columbia University Press, 1979a.

em teia Revista de Educação Matemática e Tecnológica Ibero-Americana
ISSN 2177-9309
Universidade Federal de Pernambuco
Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica
EDUMATEC

NAGEL, Ernest. The formation of modern conceptions of formal logic in the development of geometry. In: NAGEL, Ernest. *Teleology revisited and other essays in the philosophy and history of science*, New York: Columbia University Press, 1979b.

NETO, Fernando Raul. *Géométrie de position* - Eine Studie zum Werk von Lazare Carnot (1753-1823). Tese (Doutorado) — IDM-Universität Bielefeld, Alemanha, 1992.

NETO, Fernando Raul. Sobre a oposição entre grandezas positivas e negativas (1817) de Wilhelm August Förstemann (1791-1836). In: SEMINÁRIO NACIONAL DE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA (SNHM), 1., 1995, Recife. *Anais*... Recife: UFRPE, 1995. v. 1, p. 175-187.

PEACOCK, George. *A treatise on algebra, arithmetical algebra*. New York: Scripta Mathematica, 1842 (Reprint 1940). v. 1.

PEACOCK, George. *A treatise on algebra, on symbolical algebra, and its applications to the geometry of position*. New York: Scripta Mathematica, 1845 (Reprint 1940). v. 2.

SCHUBRING, Gert. Epistemologische Debatten über den Status negativer Zahlen und die Darstellung negativer Zahlen in deutschen und französichen Lehrbüchern 1795 - 1845. *Mathematische Semesterberichte*, xxxv, Heft 2, p. 183-196. 1988.

SCHUBRING, Gert. Ruptures dans le statut mathématique des nombres negatifs. *Petit x* 12, p. 5-32, 1986.

SCHUBRING, Gert. Ruturas no estatuto matemático dos números negativos. *Boletim do Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática (Gepem)*, n. 37, 2000.

SCHUBRING, Gert. Ruturas no estatuto matemático dos números negativos. *Boletim do Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática (Gepem)*, n. 38, 2001.

SCHUBRING, Gert. Um outro caso de obstáculos epistemológicos: o princípio de permanência. Parte I. *Bolema*, Rio Claro, ano 20, n. 28, p. 1-20, 2007.