ARTICULANDO AS REPRESENTAÇÕES ALGÉBRICAS E A GEOMÉTRICA DAS EQUAÇÕES QUADRÁTICAS A PARTIR DA NOÇÃO DE REGISTROS DE REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS DE DUVAL

José Edeson de Melo Siqueira[1]
Franck Bellemain[2]

Resumo

Os propósitos dessa pesquisa consistiram em fazer uma averiguação, na tentativa de compreender as razões das dificuldades de estudantes da 3ª ano do ensino médio em articular os registros algébricos e o gráfico da equação quadrática. Vista de maneira fragmentada, a conversão entre esses dois registros tem sido tratada como sendo trivial pelo ensino, todavia vários estudos têm demonstrado que isso não corresponde à realidade, uma vez que os alunos não compreendem bem essa conversão, mesmo estando na fase final do ensino médio. Desse modo, desenvolvemos nossa pesquisa centrada na *Teoria dos Registros de Representações Semióticas de Duval (2005).* A investigação das dificuldades levou-nos a classificá-las em quatro tipos. Além disso, percebemos a necessidade de elaborar novas atividades e realizarmos um trabalho mais especifico e aprofundado sobre a articulação álgebra-geometria no ensino da matemática.

Palavras-chave: Equações Quadráticas; Representações Semióticas; Articulação; Representações Algébricas; Representação Geométrica.

Abstract

The purpose of this research is focused on doing an academic evaluation in order to understand why a group of ten students from 12th Grade of High School have some difficulties in articulating the algebraic records and the quadratic equation chart. Despite seeing in a fragmented way, the conversion between these two records has been treated as ordinary. However, many studies have shown that it does not match the reality, since the students themselves do not understand well such conversion, even those who are in the last term of the year. Therefore, we have developed the research grounded on *Duval Semiotic Representation Theory (2005).* Checking into thoroughly the difficulties led us to dispose them into four kinds. Furthermore, we perceive the necessity to elaborate new activities and to carry through a work more I specify and deepened on the joint algebra-geometry in the education of the mathematics.

[1] Mestre em Ensino das Ciências - Universidade Federal Rural de Pernambuco; edeson.melo@ig.com.br.
[2] Doutor - EDUMATEC – Universidade Federal de Pernambuco;f.bellemain@gmail.com.

Keywords: Quadratic Equations; Semiotic Representation; Articulation; Algebraic Representation; Geometric Representation.

1. Introdução

A necessidade de articular vários sistemas de representação é importante em matemática, e, provavelmente, mais importante que em outras áreas do conhecimento (DUVAL, 2005). Porém, no contexto do ensino, em geral, esses registros são ensinados independentemente, e as articulações entre eles são consideradas como consequência natural do conhecimento dos registros. Se podemos admitir isso para um matemático, esse não é o caso de um aluno. Para o estudante, articular registros deve ser objeto de uma aprendizagem específica.

A mudança de registros de representações foi abordada por Duval (1988). Nessa pesquisa, Duval apresenta análises acerca da articulação entre a representação algébrica da equação da reta (y=ax+b) e sua representação geométrica. O autor destaca que a razão para profundas dificuldades em ler e interpretar as representações gráficas parece estar associada à falta de conhecimento das regras de correspondência semiótica entre os registros gráficos e sua escrita algébrica.

Com relação ao procedimento a ser adotado na articulação de gráfico e equações, Duval (1988) sugere uma descrição sistemática das variáveis visuais do gráfico que leve em consideração o procedimento de interpretação global das propriedades figurais, no qual o conjunto traçado/eixo forma uma figura que representa um objeto descrito por uma expressão algébrica. Isto possibilite identificar e articular (ou associar) as modificações realizadas no gráfico e na equação.

No caso das equações quadráticas, além das dificuldades de articular as representações algébricas e a representação gráfica, percebemos também que o enfoque dado a uma única forma algébrica, neste caso a desenvolvida ($y=ax^2+bx+c$), limita as possibilidades de compreensão do conceito de equação quadrática.

Desse modo, realizamos um trabalho abordando a articulação entre três representações algébricas e a representação gráfica da equação quadrática. Este estudo visava identificar e compreender as possíveis dificuldades emergidas dessas articulações e assim sugerir possíveis encaminhamentos para resolvê-las.

Vale ressaltar que, Duval (2005) chama a atenção para essas articulações como aquelas mais difíceis, mesmo para alunos do último ano do ensino médio. Ele caracteriza essas articulações como sendo conversões, que implicam mudanças de registro.

2. Três formas de escrita da equação quadrática, articuladas a uma representação geométrica

A unificação da geometria com a álgebra pela geometria analítica foi iniciada com os estudos realizados nos séculos XVI e XVII por François Viete (1540-1603), Pierre de Fermat (1601-1665) e René Descartes (1596-1650) que são considerados como os primeiros a aplicar a álgebra à geometria, premissa do estudo da geometria por meio de equações. Essencialmente, a geometria analítica traduz pontos, retas, cônicas e outras construções geométricas em representações algébricas, as quais, quando analisadas, podem revelar propriedades geométricas das figuras representadas.

Desse modo, as figuras geométricas passaram a ser representadas no plano cartesiano, onde cada ponto do plano é representado por um único par ordenado (x; y), sendo x e y, números reais, as coordenadas do ponto num sistema de eixos ordenados.

Assim, tornou-se possível definir uma curva, um lugar geométrico de pontos que gozam de uma mesma propriedade, por uma expressão algébrica que traduz essa propriedade numa relação algébrica entre as coordenadas (x; y) dos pontos que pertencem à curva. De fato, estamos interessados pelas equações de parábolas, mas especificamente aquelas que podem ser escrita com o y em função do x, ou seja, que possuem um eixo de simetria paralelo ao eixo das ordenadas (0y).

O gráfico de uma equação quadrática, dada por $y = ax^2 + bx + c$, $x \in R$, é o subconjunto $G \subset R^2$ formado pelos pontos $(x; ax^2 + bx + c)$, cuja abscissa é um número real arbitrário x e a ordenada é o valor que y assume para a coordenada x. Desse modo, G é uma parábola, que pode ser definida como o lugar geométrico dos pontos equidistantes de um ponto F (o foco) e de uma reta d (a diretriz) como podemos observar na figura 01.

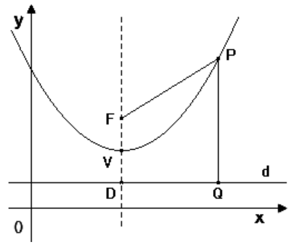

Figura 01 – Parábola

Neste caso, a parábola representará o gráfico de uma equação quadrática quando sua diretriz for uma reta paralela ao eixo das abscissas.

Existem várias representações algébricas para a equação quadrática, e cada uma delas tem sua funcionalidade, trazendo entre outras, informações que dizem respeito à sua representação gráfica. Daí a importância de se trabalhar, tanto as articulações entre as várias representações algébricas, como entre estas e a sua representação geométrica.

Segundo Bellemain (2004), a funcionalidade de uma expressão algébrica, no sentido de Chevallard (1989) é caracterizada pelos tratamentos ou deduções que essa expressão permite. Trata-se de informações que podem ser obtidas diretamente da expressão, sem precisar transformá-la. Esses tipos de expressões são chamadas de formas pelo fato de que os registros algébricos têm uma dimensão perceptiva, uma vez que uma das funções do simbolismo é facilitar o trabalho da percepção, isto é, identificar determinadas características (metapropriedades, informações) pela simples leitura, observação ou interpretação da expressão.

A partir da equação quadrática, podemos distinguir três formas padrões de escrita que são:

- *A Forma desenvolvida*: $y = ax^2 + bx + c$.
- *A Forma canônica*: colocando o coeficiente a em evidência e, em seguida, completando o quadrado, temos:

$$y = ax^2 + bx + c \Rightarrow y = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}\right].$$

- *A Forma fatorada*: se x' e x'' são as raízes reais e distintas da equação representada por $y = ax^2 + bx + c$, colocando a em evidência e substituindo a soma e o produto de x' e x'', obtemos $y = a(x - x')(x - x'')$.

De fato, encontramos mais diretamente as raízes de uma equação polinomial do 2º grau a partir de sua forma fatorada do que a partir da sua forma canônica ou desenvolvida. Por exemplo, a partir da forma $(x+2)(x-1) = 0$ podemos deduzir que -2 e 1 são soluções, dedução que não é possível com $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} = 0$ ou $x^2 + x - 2 = 0$, ambas equações equivalentes à primeira, mas que exigiriam cálculos para encontrar as soluções. No caso da forma desenvolvida da equação $x^2 + x - 2 = 0$, a conhecida fórmula de Bhaskara pode ser aplicada para encontrar as soluções. No entanto, essa aplicação depende do reconhecimento da forma desenvolvida e da identificação dos seus coeficientes.

A partir da representação gráfica de $y = 6x^2 - 9x + 3$ (Figura 02), podemos destacar algumas de suas propriedades e resolver alguns problemas. Essa representação algébrica nos leva a encontrar outras representações que nos fornecerão diretamente outros dados: a forma desenvolvida fornece diretamente as coordenadas do ponto de interseção da parábola com o eixo vertical; a forma canônica ($y = 6 \cdot \left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{3}{8}$) fornece as coordenadas do vértice da parábola; e a forma fatorada ($y = 6 \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot (x-1)$) fornece as coordenadas dos pontos de interseção da parábola com o eixo horizontal.

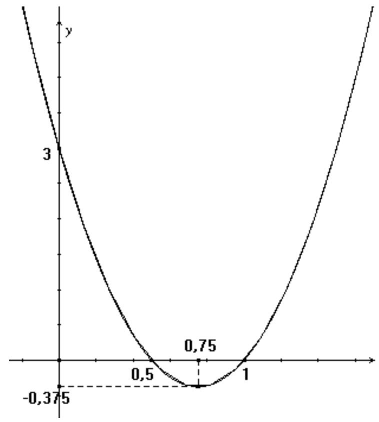

Figura 02 - Gráfico da equação $y = 6x^2 - 9x + 3$.

Vale salientar que a articulação entre uma representação gráfica e as três formas padrões (fatorada, desenvolvida e canônica) de escrita da equação correspondente se realiza pelas associações entre informações numéricas extraídas das equações na forma algébrica e informações geométricas observadas na representação gráfica. Desse ponto de vista, cada forma da equação quadrática fornece informações numéricas que dizem respeito a diferentes informações da sua representação geométrica, tais como: a interseção com o eixo das abscissas, com o eixo das ordenadas, as coordenadas do vértice, ou ainda, a orientação da curva.

Os diversos tratamentos possíveis (fatoração, desenvolvimento, etc) permitem o acesso às diversas escritas de uma mesma equação. Desse modo, os tratamentos têm como finalidade acessar as diversas informações específicas, tanto no que diz respeito às escritas algébricas, quanto à representação geométrica da equação quadrática.

3. Teoria dos registros de representações semióticas

Em nosso estudo, utilizamos a abordagem de Duval (2005) para compreender as dificuldades apresentadas por alunos da última série do ensino médio em articular representações algébricas e representação geométrica, no caso da equação quadrática.

Ao analisar em que consiste a compreensão matemática e as razões das dificuldades de entendimento de muitos estudantes, Duval (2005) mostra que os conceitos matemáticos e suas complexidades epistemológicas, muitas vezes evocados, não são suficientes para justificar essas dificuldades. Para ele, a complexidade e as dificuldades encontram-se no funcionamento cognitivo, que por sua vez, é responsável por possibilitar ao aluno, compreender, efetuar e controlar, a diversidade dos processos matemáticos que lhe são propostos em situação de ensino.

Com efeito, a atividade requerida pela matemática difere daquelas requeridas em outras áreas do conhecimento, e apresenta três características que evidenciam tal diferença, como ressalta Siqueira (2009):

- *A importância das representações semióticas:* o desenvolvimento dessas representações constituiu condição essencial para a evolução do pensamento matemático.
- *A variedade de representações semióticas*: as figuras geométricas, as escritas algébricas e formais, as representações gráficas, a língua natural, etc.
- *A mobilização simultânea de, no mínimo, dois registros de representação*: a mobilização e articulação dos registros de representação constitui uma condição de acesso à compreensão matemática (DUVAL, 2005).

Dado que em nosso trabalho buscamos analisar as *articulações entre representações algébricas e representação geométrica* da equação quadrática, entendemos tratar-se de transformações dos dois tipos: tratamento e conversões.

As transformações do tipo tratamento dizem respeito às passagens entre duas representações de um mesmo objeto que pertencem a um mesmo registro. Já as transformações do tipo conversões caracterizam as passagens entre duas representações de um mesmo objeto que pertencem a registros distintos.

Como exemplo de tratamento, podemos considerar as passagens entre as três formas de escrita - desenvolvida, fatorada e canônica - da equação quadrática, e como conversão, a passagem entre estas e a representação geométrica, e vice-versa. Neste caso, pode-se esboçar o gráfico considerando as características significativas das expressões algébricas (os valores e condições dos coeficientes), ou então, determinar as representações algébricas a partir das variáveis visuais da representação geométrica (concavidade, abertura, vértice, interseção com os eixos, etc.).

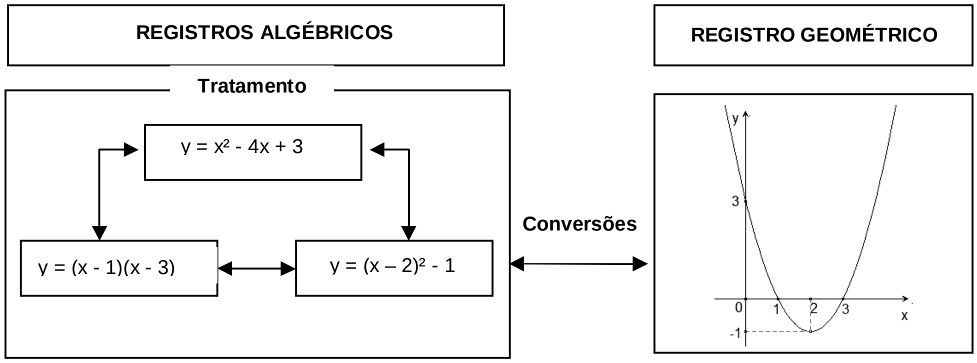

Figura 03 **-** Correspondência entre os registros algébricos e o gráfico.

Duval (2005) chama a atenção para o fato de se considerar simples e local, converter a representação de um objeto de um registro a outro, reduzindo muitas vezes a conversão a uma "codificação". Ele mostra (DUVAL, 1988) que a razão para profundas dificuldades em ler e interpretar gráficos de equações do 1º grau parece estar associada à falta de conhecimento das regras de correspondência semiótica entre as representações algébricas e as representações geométricas. Por exemplo, a passagem de uma expressão algébrica à sua representação geométrica - muito abordada no ensino - ocorre ponto a ponto. No entanto, na passagem da representação gráfica para a expressão algébrica, esta abordagem tem constituído um obstáculo. Segundo Duval (2005), "Tal visão é superficial e enganadora", visto que, a regra de codificação permite apenas uma leitura pontual das representações gráficas, em contraponto a uma apreensão global e qualitativa.

A conversão entre representação geométrica e representações algébricas supõe que se leve em conta as variáveis visuais próprias dos gráficos (concavidade, intersecção com os eixos, etc.) e os valores escalares das expressões algébricas (coeficientes positivos ou negativos, etc.).

É importante ressaltar, que é na passagem de um registro para outro que se pode observar a importância da forma de representação - pois mudar de registro não consiste apenas em mudar o modo de tratamento, mas também em explicar as propriedades ou os aspectos diferentes de um mesmo objeto.

Para investigar essas dificuldades, Duval (1988) sugere uma descrição sistemática das variáveis visuais levando em consideração o procedimento de interpretação global das propriedades figurais, em que o conjunto traçado/eixo forma uma figura que representa um objeto descrito por uma expressão algébrica. Vale ressaltar que esse procedimento possibilita identificar as modificações realizadas na figura e na expressão algébrica. Isso implica sair de um tratamento focado na associação "um ponto – um par de números" para a associação "variável visual da representação – unidade significativa da escrita algébrica". Neste caso, Duval (1988) associa, por exemplo, a inclinação da reta (gráfico da função afim y=ax+b), o traço ascendente ao sinal positivo do coeficiente de x, e o traço descendente ao sinal negativo.

Gostaríamos de ressaltar que Maia (2007) estudou a conversão entre a representação algébrica e geométrica da função quadrática, tomando por base os estudos de Duval (1988). Com base nesses trabalhos, foi possível elaborar um quadro para cada representação algébrica da equação quadrática, bem como suas correspondências com a representação geométrica.

Inicialmente, procuramos diferenciar as variáveis visuais da representação geométrica e as unidades simbólicas correspondentes, das três formas escolhidas da equação quadrática: desenvolvida $y = ax^2 + bx + c$, fatorada $y = a(x - x')(x - x'')$ e canônica $y = a(x - m)^2 + k$. Ao buscar promover essa articulação, tentamos tornar mais explícita a correspondência entre os coeficientes e variáveis visuais, ou seja, enquanto uma expressão algébrica explicita determinadas variáveis outras não, desse modo, uma complementará a outra.

Abordar a articulação entre os registros de representações algébricos e o geométrico nessa perspectiva, corresponde a um processo de descrição sistemática das variáveis visuais, considerando o procedimento de interpretação global das propriedades explicitadas no gráfico. Neste caso, o conjunto traçado/eixo forma um gráfico que representa o objeto descrito pelas expressões algébricas, possibilitando identificar as modificações realizadas na representação geométrica e nas representações algébricas, como defende Duval (1988).

4. Metodologia

Para compreender como os alunos articulavam as representações algébricas e a geométrica da equação quadrática, adotamos alguns procedimentos do método apresentado por Duval (2005). Utilizado desde seu trabalho (1988) sobre a complexidade cognitiva da articulação entre gráficos e equações, o método de Duval possibilita evidenciar variáveis cognitivas importantes, dentre as variações estruturais possíveis das representações de um mesmo objeto matemático.

Por tratar da articulação de representações distintas em relação ao mesmo objeto matemático, elaboramos uma atividade com questões que tratavam a conversão nos dois sentidos, ou seja, considerando ora a passagem do gráfico para as expressões algébricas, ora o contrário. Além disso, para posterior utilização da conversão como instrumento de análise, as situações atenderam as seguintes condições destacadas por Duval (2005):

5. *Todas as questões permitiam a conversão de uma representação para outra*: Para cada objeto dá-se a representação $R_{1,}$ em um registro de saída A e sua representação convertida R'_1 em um registro de chegada B, ou seja, a representação de saída e consequentemente de chegada depende do tipo de passagem que desejamos fazer. Por exemplo, se desejamos fazer a conversão das expressões algébricas para o gráfico, cada expressão algébrica implicará num registro de saída com representação R_1, e sua representação gráfica correspondente a um registro de chegada, com representação convertida de $R_{1,}$ denominada de $R'_{1.}$

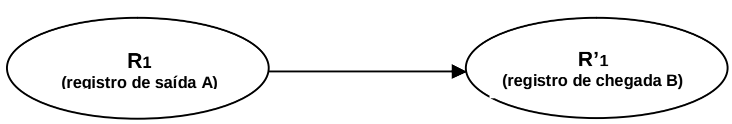

Figura 04 – Representação R_1 (saída) convertida na representação R'_1(chegada).

- *As questões possibilitavam associar as variações dos elementos de uma representação e as mudanças ocasionadas na outra*: Em cada situação, deve-se produzir todas as variações possíveis de R_1 ... R_n, no registro de saída A, que conservem nas diferentes representações, algum elemento ou característica, possibilitando assim, analisar as variações simultâneas de R'_1 no registro de chegada B. Isto é, as variações de R_1 no registro A correspondem à manipulação de uma ou de várias variáveis independentes, e as variações que ocorrem ao mesmo tempo no registro B correspondem a valores de uma variável dependente.

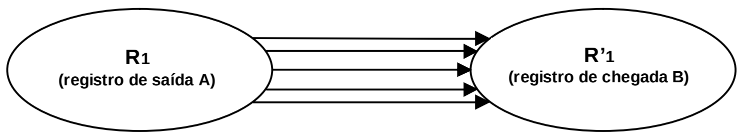

Figura 05 – Variações de R_1 com implicações em R'_1.

Neste caso, devemos realizar todas as alterações permitidas nas expressões algébricas a partir dos seus coeficientes, sendo estas o registro de saída, e acompanhar as mudanças ocasionadas no seu registro de chegada, a representação gráfica correspondente; ou então, se a representação gráfica corresponde ao registro de saída, devemos realizar todos os movimentos possíveis através das interseções com os eixos, do vértice e de outro ponto qualquer, e analisar as modificações ocasionadas no registro de chegada, que são suas expressões algébricas.

4.1 Participantes

Participaram deste estudo 10 alunos da 3ª série do ensino médio de uma escola pública federal de ensino da cidade do Recife-PE. Na escolha da escola foi considerada a disposição dos alunos em colaborar, a existência de um laboratório de informática e a proposta pedagógica em sintonia com os documentos oficiais do Ministério da Educação.

4.2 Variáveis Visuais para construção da atividade

O ponto de partida para o estudo das articulações entre os registros de representações algébricos e o geométrico consiste na descrição sistemática das variáveis visuais. Neste caso, consideraremos o procedimento de interpretação global das propriedades explicitadas na representação gráfica, desse modo, o conjunto traçado/eixo forma um gráfico que representa o objeto descrito pelas expressões algébricas, possibilitando identificar as modificações realizadas na representação geométrica e nas representações algébricas.

Assim, com base no trabalho de Durval (1988) e Maia (2007), tratamos de destacar as variáveis visuais pertinentes ao estudo para cada uma das três representações algébricas correspondentes às equações quadráticas, que possuem um conjunto traçado/eixo comum, uma curva aberta denominada parábola.

Iniciamos destacando os aspectos comuns às três representações algébricas.

Variáveis Visuais	**Valores das variáveis visuais**
Concavidade da parábola	Voltada para cima Voltada para baixo
Curvatura da parábola	Maior curvatura Menor curvatura

Quadro 01 - Variáveis visuais e valores comuns às três formas algébricas.

As variáveis visuais concavidade e curvatura são ressaltadas por meio de um valor específico nas três formas algébricas da equação quadrática.

Agora, destacaremos as variáveis visuais e os valores específicos relacionados a cada uma das três representações algébricas, começando pela forma desenvolvida.

Variáveis Visuais	**Valores das variáveis visuais**
Interseção com o eixo das ordenadas	Ramo crescente Vértice Ramo decrescente
	Acima da origem Na origem Abaixo da origem

Quadro 02 - Variáveis visuais e valores da forma desenvolvida.

Os quadros anteriores revelam que existem quatro variáveis visuais pertinentes a equação quadrática na forma desenvolvida, as duas primeiras correspondem dois valores, e para a terceira e quarta correspondem três.

Variáveis Visuais	**Valores das variáveis visuais**
Interseção (interseções) com o eixo das abscissas	As duas à esquerda da origem. As duas à direita da origem. Uma á esquerda da origem e a outra à direita da origem. Uma à direita da origem e a outra na origem. Uma à esquerda da origem e a outra na origem. Uma só interseção na origem. Uma só interseção à esquerda da origem. Uma só interseção à direita da origem.

Quadro 03 - Variáveis visuais e valores da forma fatorada

Para este caso são destacadas três variáveis visuais: às duas primeiras (quadro 01) correspondem dois valores e à terceira, oito valores; neste caso, por tratar-se das raízes da equação - pode haver até duas - temos um maior número de possibilidades para sua localização no sistema de eixos.

Variáveis Visuais	Valores das variáveis visuais
Posição do vértice da parábola com relação ao eixo das abscissas	Acima do eixo. Na origem. Abaixo do eixo.
Posição do vértice da parábola com relação ao eixo das ordenadas	A esquerda do eixo. Na origem. À direita do eixo.

Quadro 04 - Variáveis visuais e valores da forma canônica. (Adaptado de MAIA 2007, p. 65)

Aqui temos quatro variáveis visuais, sendo que as duas primeiras (quadro 01) são comuns aos três casos, e também correspondem dois valores; já as duas últimas correspondem a três cada uma.

A seguir apresentaremos quatro quadros - o primeiro traz as propriedades comuns, e os demais, as específicas - das unidades simbólicas, para cada uma das representações algébricas, relacionadas às variáveis visuais correspondentes. Isso possibilitará perceber facilmente, que as mudanças ocorridas nas representações algébricas implicam em mudanças na representação geométrica e vice-versa.

Variáveis visuais	Valores	Unidades simbólicas correspondentes
Concavidade da parábola	Voltada para cima Voltada para baixo	Parâmetro a>0 (ausência do símbolo -) Parâmetro a<0 (presença do símbolo -)
Curvatura da parábola	Maior curvatura Menor curvatura	0<IaI<1 IaI =1 (elemento neutro da multiplicação, o parâmetro não está inscrito) IaI >1

Quadro 05 - Unidades simbólicas correspondentes às variáveis visuais, comuns às três formas.

No quadro anterior, destacamos a unidade simbólica (a) comum as três representações algébricas. Neste caso, associada às variáveis visuais Concavidade e curvatura.

Variáveis visuais	Valores	Unidades simbólicas correspondentes
Interseção com o eixo das ordenadas	Ramo crescente Vértice Ramo decrescente	b>0 b=0 (simetria axial em relação ao eixo das ordenadas) b<0
	Acima da origem Na origem Abaixo da origem	c>0 (o parâmetro corresponde a coordenada y do ponto de interseção) c=0 (o parâmetro não está inscrito) c<0 (o parâmetro corresponde a coordenada y do ponto de interseção)

Quadro 06 - Unidades simbólicas da forma desenvolvida correspondentes às variáveis visuais.

Como podemos observar, temos quatro variáveis visuais correspondentes ao estudo da representação algébrica desenvolvida $y=ax^2+bx+c$. Às duas primeiras (quadro 05) correspondem dois valores associados ao coeficiente *a* - cujas alterações acarretam mudanças na concavidade e na abertura da parábola - à terceira e à quarta correspondem três valores cada uma, que estão relacionadas aos coeficientes *b* – interfere na interseção do ramo crescente ou decrescente e do vértice com o eixo das ordenadas – e *c*, responsável por indicar onde o gráfico intercepta o eixo das ordenadas.

Variáveis visuais	Valores	Unidades simbólicas correspondentes
Interseção (interseções) com o eixo das abscissas	As duas à esquerda da origem As duas à direita da origem. Uma à esquerda da origem e a outra à direita da origem. Uma à direita da origem e a outra na origem. Uma à esquerda da origem e a outra na origem. Uma só interseção na origem. Uma só interseção à esquerda da origem. Uma só interseção à direita da origem.	x'<0, x''<0 e x'≠ x''. x'>0, x''>0 e x'≠ x''. x'>0 e x''<0 ou x'<0 e x''>0 e x'≠ x''. x'>0 e x''=0 (o parâmetro não está inscrito) ou x'=0 (o parâmetro não está inscrito) e x''>0. x'<0 e x''=0 (o parâmetro não está inscrito) ou x'=0 (o parâmetro não está inscrito) e x''<0. x'=x''=0. x'<0, x''<0 e x'=x''. x'>0, x''>0 e x'=x''.
	Não existe.	A representação algébrica fatorada não está definida.

Quadro 07 - Unidades simbólicas da forma fatorada correspondentes às variáveis visuais.

Para este caso, são destacadas três variáveis visuais pertinentes à representação algébrica fatorada *y=a(x-x')(x-x''):* às duas primeiras (quadro 05) correspondem dois valores ambos relacionados ao coeficiente *a* – articulado à concavidade e abertura da parábola - e à terceira oito valores associados a *x'* e *x''*, implicando na interseção (interseções) da parábola com o eixo das abscissas.

Variáveis visuais	Valores	Unidades simbólicas correspondentes
Posição do vértice da parábola com relação ao eixo das abscissas	Acima do eixo Na origem Abaixo do eixo	k>0 k=0 k<0
Posição do vértice da parábola com relação ao eixo das ordenadas	A esquerda do eixo Na origem À direita do eixo	m>0 m=0 m<0

Quadro 08 **-** Unidades simbólicas da forma canônica correspondentes às variáveis visuais (adaptado MAIA 2007, p. 65).

Aqui, são quatro variáveis visuais relacionadas à análise da representação algébrica canônica $y=a(x-m)^2+k$. Podemos perceber que as duas primeiras (quadro 05) são comuns aos três casos, uma vez que o coeficiente *a*, está presente em todas as representações algébricas abordadas neste trabalho e tendo as mesmas implicações, sobre a concavidade e abertura da parábola. Já as duas últimas correspondem a três valores cada uma, com a primeira correspondendo à posição do vértice da parábola com relação ao eixo das abscissas, tendo como unidade simbólica correspondente *k* (três condições). A segunda, diz respeito à posição do vértice da parábola com relação ao eixo das ordenadas que corresponde à unidade *m* (também três condições).

4.3 Atividade para coleta de dados

Elaboramos e aplicamos uma atividade para ser resolvida individualmente em um encontro. Contamos com a participação de 10 alunos, que trabalharam durante aproximadamente 2 horas na produção de soluções para as questões propostas. No início do encontro foi explicado aos alunos apenas que deveriam propor soluções aos problemas da atividade, que envolviam conversões entre as representações algébricas e a representação geométrica, da equação quadrática, e foram organizadas contemplando situações onde se partiam de uma representação para se chegar à outra.

Tais questões foram organizadas em três grupos de articulações, como descrito abaixo:

- Cinco problemas apresentavam as mesmas características, ou seja, articulavam a passagem da representação geométrica para as representações algébricas.
- Quatro questões abordavam apenas conversões da representação geométrica, para suas respectivas representações algébricas.

- Apenas uma questão tratou de explorar a passagem das expressões algébricas para a representação gráfica.

O fato de 09 das 10 questões explorarem as conversões da representação gráfica para as expressões algébricas atende às necessidades já apontadas em estudos anteriores, como Duval (1988) e Maia (2007), tendo em vista sua pouca abordagem nos livros didáticos e por consistir na principal dificuldade dos alunos ao realizarem a passagem da forma geométrica para as formas algébricas.

Para cada uma das questões foram consideradas as soluções esperadas, todas focadas numa abordagem global qualitativa, considerando as unidades simbólicas correspondentes às variáveis visuais. Em seguida, essas questões foram organizadas em três grupos de acordo com a passagem entre as formas, e suas resoluções comparadas com os procedimentos adotados pelos estudantes, para entender como concebiam e realizavam as conversões entre as expressões gráficas e suas representações algébricas.

5. Análise dos resultados

Para a análise foram considerados os dados coletados a partir dos protocolos (registros material) dos alunos, e através das anotações realizadas durante e ao final dos encontros.

Uma vez organizadas as informações, seguimos para categorização e análise dos dados, objetivando discriminar, dentre as variações estruturais possíveis das representações em dado registro, aqueles que são cognitivamente importantes no registro de partida, ou seja, os que provocam uma modificação da representação concomitante no registro de chegada, porque isso implica um novo objeto denotado.

A seguir, apresentaremos a análise dos registros segundo os tipos de questões.

5.1 Passagem das expressões algébricas para a representação gráfica

Tratamento das representações algébricas e a conversão destas para a representação geométrica: embora as coordenadas do vértice estivessem explicitadas na forma canônica, foram utilizadas as relações envolvendo x_v (coordenada x do vértice) e y_v (coordenada y do vértice) a partir da forma desenvolvida. Isso nos leva a perceber que possivelmente os alunos não reconhecem as unidades simbólicas correspondentes, ou seja, a finalidade de cada uma das representações algébricas com relação a sua representação gráfica. Mesmo sendo o tipo de atividade mais contemplada nos livros didáticos, foi possível perceber que existem algumas dificuldades, especialmente se a forma algébrica não for a desenvolvida (forma padrão). Como exemplo, podemos observar na figura a seguir:

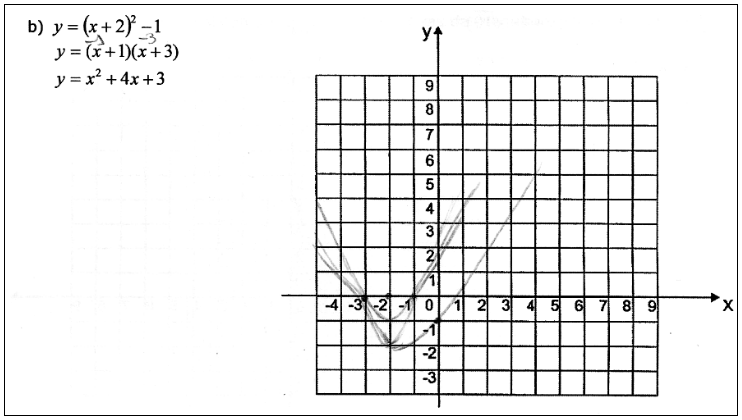

Figura 06 – Solução do aluno C para o item (d) questão 04.

Neste caso, o aluno (C) esboçou um gráfico para cada expressão algébrica da equação quadrática, muito embora todas representassem uma única curva.

5.2 Passagem da representação gráfica para as expressões algébricas

Tratamento das representações algébricas (o foco está sempre na forma desenvolvida) e utilização do processo "ponto a ponto" - procedimento utilizado para construção de gráficos, no qual os pontos são obtidos por substituição na expressão algébrica e, então, localizados em um sistema cartesiano para que se possa traçar a curva ligando estes pontos, ou então, fazendo a operação inversa.*:* para encontrar as equações correspondentes ao gráfico, que explicitava as coordenadas dos pontos de interseção com o eixo das abscissas, os estudantes partem da relação soma (x'+x''= -b/a) e produto (x'.x''= c/a) das raízes da equação (pontos explicitados no gráfico) para primeiro encontrar a forma desenvolvida e só depois a fatorada, como se esta não pudesse ser obtida diretamente do gráfico. Já a forma canônica - não conseguem escrevê-la - parece não ter relação alguma com a representação gráfica.

Os procedimentos desenvolvidos pelos alunos nessas situações revelam - além das dificuldades em realizarem a conversão da representação gráfica para as representações algébricas - o desconhecimento da possibilidade de *tratamento* entre as expressões algébricas. Acrescenta-se a isso o fato de que o foco é sempre encontrar primeiro a forma desenvolvida, como se esta fosse a única representação algébrica do gráfico, para, em seguida, completar as demais a partir de alguma fatoração. Possivelmente a grande atração pela forma desenvolvida deva-se ao fato de ser a mais abordada nos livros didáticos, que exploram pouco a forma fatorada e quase nunca a canônica.

Existência de uma só interseção do gráfico com o eixo das abscissas – raízes reais duplas – ou quando o gráfico não interceptava o eixo das abscissas – não existem raízes reais: De todos os alunos participantes da atividade, apenas um (denominado G), demonstrou conhecimento acerca da forma canônica.

Numa questão que exigia fazer a passagem da representação geométrica para as representações algébricas, o estudante utilizou o seguinte procedimento: primeiro encontrava a forma canônica, em seguida, utilizando as coordenadas do vértice, realizava o desenvolvimento do quadrado da diferença para encontrar a forma desenvolvida. Mas, a estratégia utilizada nos itens b e c não serviu no item d, pois havia raízes duplas e o aluno não conseguiu identifica as coordenadas do vértice. Com respeito aos demais alunos, houve dificuldades em responder os itens c (não havia raízes reais) e d (raízes duplas).

Exigência de dinamismo na conversão da forma geométrica para as formas algébricas: As questões 08 e 09 exigiam que fossem encontradas as expressões algébricas de uma representação gráfica, neste caso, o gráfico estava transladado a partir de outro com representação algébrica na forma canônica explicitada. Chamou-nos a atenção o fato de 50% dos alunos não ter respondido estas questões.

Muito embora houvesse três questões envolvendo tanto *a passagem da representação gráfica para as expressões algébricas como das representações algébricas para a geométrica*, observamos que os procedimentos dos alunos foram semelhantes aos das situações que envolviam apenas a conversão da forma geométrica para formas algébricas, como veremos adiante:

Utilização do processo "ponto a ponto": analisando os registros da questão que solicitava ao aluno identificar quais das expressões algébricas apresentadas (eram

06) correspondiam à representação gráfica dada, como na figura 24, constatamos que a maioria dos alunos buscou substituir os pontos destacados na representação gráfica em cada uma das expressões algébricas, para ver quais os satisfaziam. Neste caso percebemos uma possível influência dos livros didáticos, segundo estudos já mencionados.

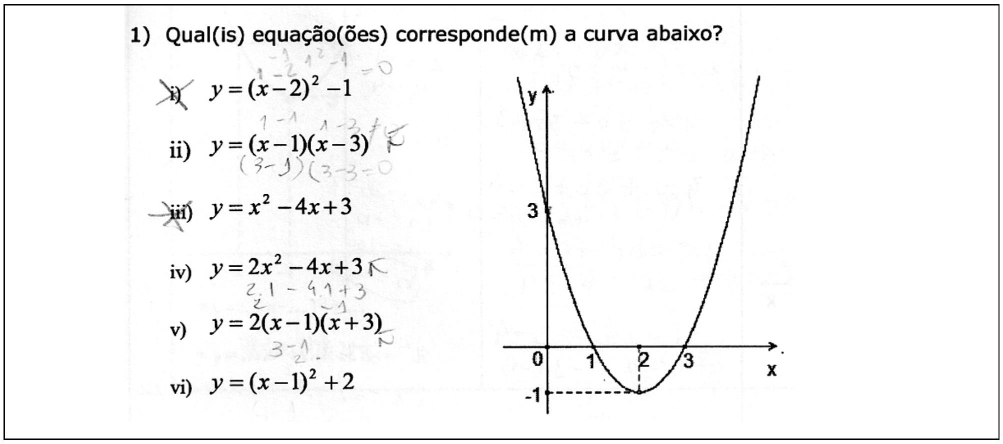

Figura 07 – Estratégia do aluno C para resolver a questão 01.

Como podemos observar, o aluno C substitui as coordenadas x, dos pontos de interseção do gráfico com o eixo das abscissas, nas expressões algébricas, na tentativa de identificar quais delas satisfaziam os pontos de coordenadas (3; 0), nos itens ii e v, e (1; 0) para os itens i, ii e iv.

Tratamento das formas algébricas (o foco está sempre na forma desenvolvida): novamente, nota-se que os alunos tendem a reconhecer apenas a forma algébrica desenvolvida como sendo a expressão algébrica da representação geométrica, cujo gráfico é a parábola, não fazendo nenhuma articulação entre esta e as outras duas (canônica e fatorada).

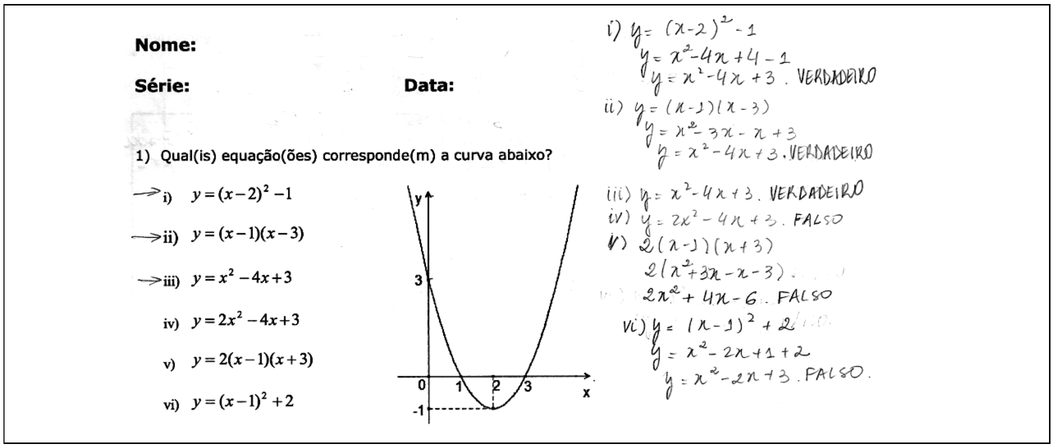

Figura 08 – Solução do aluno A para a questão 01.

Neste caso, após encontrar a forma desenvolvida da função quadrática, o aluno A desenvolve as demais expressões algébricas para ver quais delas eram equivalentes a y=x²-4x+3.

O gráfico não interceptava o eixo das abscissas – não existem raízes reais: o interessante é que os alunos (D e F) não souberam calcular as coordenadas do vértice do item c, pois nesse caso não havia interseção com o eixo das abscissas, ou seja, não tinha como calcular as médias entre as raízes, pois estas não eram reais. No entanto, quando $x \notin R$ (não real), eles não conseguiram calcular as coordenadas do vértice, como pode ser observado na questão 6. Isso seria facilmente resolvido caso soubessem articular a representação algébrica ou forma canônica a representação geométrica.

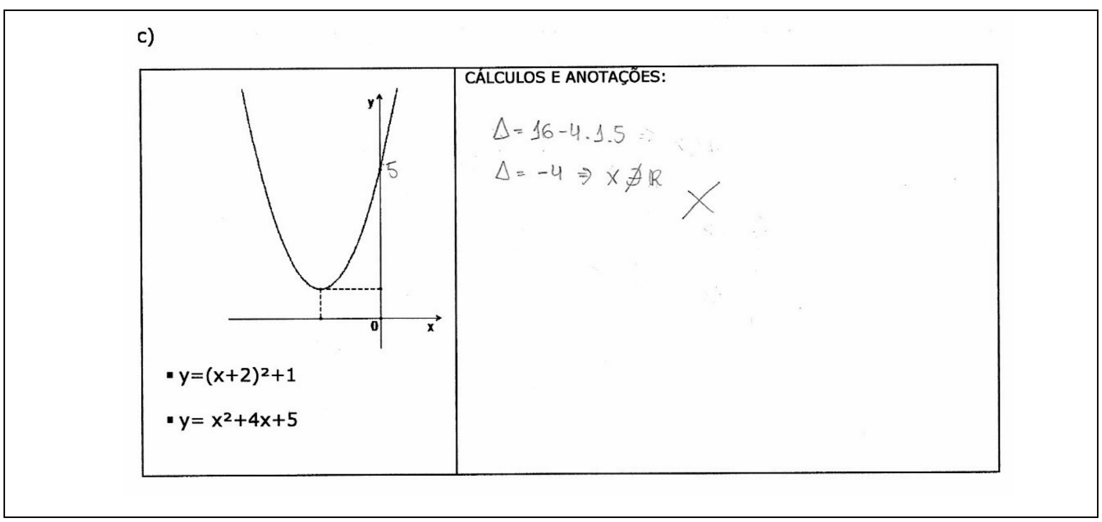

Figura 09 – Solução proposta pelo aluno F para o item (c) da questão 03.

Como mostra a figura anterior, o aluno F não apresentou dificuldades para encontrar as coordenadas do vértice no item (a), visto que, a coordenada x do vértice foi calculada a partir da média aritmética das raízes da equação quadrática na forma desenvolvida, e a coordenada y do vértice, a partir do x do vértice. Porém, esse procedimento está limitado às situações onde há interseção do gráfico com o eixo das abscissas. No item (c), como o gráfico não intercepta o eixo das abscissas, o aluno não consegue encontrar as coordenadas do vértice.

Exigência de dinamismo na conversão da forma geométrica para as formas algébricas: A questão 07 exigia que fossem encontradas ora as representações algébricas de uma representação gráfica, cuja curva havia sido transladada a partir de outra, com uma expressão algébrica - que atendia as três formas - conhecidas, ora o procedimento inverso. Vale salientar que cinco alunos não responderam esta questão e dois escreveram a equação errada, sem nenhuma justificativa.

6. Considerações

A análise desses procedimentos revelou as mesmas dificuldades que os alunos já haviam demonstrado quando resolveram os problemas das duas categorias que envolviam a passagem da representação geométrica para as representações algébricas; o que proporcionou os mesmos diagnósticos e as mesmas sugestões de encaminhamentos para os referidos casos.

Sendo assim, podemos associar os quatro tipos de dificuldades a dois grupos de questões relacionados às conversões da representação geométrica para a representação algébrica:

- Quanto às questões que envolviam a passagem da representação gráfica para as expressões algébricas:

A) Não conseguem realizar a passagem, por usarem comumente o procedimento “ponto a ponto”, ou seja, a passagem se dá a partir de valores particulares tomados um a um (Duval chama o “ponto a ponto”).

B) Não conseguiram resolver quando o gráfico possui um (raízes duplas) ou nenhum (não havia raízes reais) ponto de interseção com o eixo das abscissas.

- Com respeito às questões que envolviam a conversão entre as representações algébricas e a representação geométrica:

C) Não propuseram nenhuma resposta às situações que envolviam certo dinamismo com translações – partindo de um gráfico cuja representação algébrica era explicitada, para obter as expressões algébricas das outras representações gráficas originadas da primeira.

D) Realizar *tratamento* entre as representações algébricas - esta dificuldade está atrelada ao fato dos alunos reconhecerem praticamente a forma desenvolvida, limitando a possibilidade de realizarem correspondência entre as variáveis visuais e as unidades simbólicas, uma vez que as outras formas algébricas são ignoradas.

Chamaram atenção os casos correspondentes aos itens B e C, nos quais os estudantes não propuseram soluções, pois como iremos analisar as dificuldades se nada foi registrado! Também foram comprometidas as resoluções das questões associadas ao item D, visto que a conversão, quando realizada, ocorria entre o gráfico e a forma desenvolvida, sendo preciso identificar como se dá a passagem da representação geométrica para as representações algébricas fatorada e canônica.

A analise dos registros dos alunos implicou na necessidade de encaminhamentos para cada uma das dificuldades destacadas anteriormente, que deverão nortear a elaboração de novos estudos.

A seguir apresentamos um quadro com os tipos de dificuldades e seus respectivos desdobramentos:

Tipos de dificuldades	Encaminhamentos
A, D e C	Propor problemas que requeiram dos alunos a articulação da representação gráfica com as expressões algébricas, exigindo que a atenção esteja centrada sobre um conjunto de propriedades e não sobre os valores particulares tomados um a um. De acordo com Duval (1988), uma apresentação explícita e sistemática das variáveis visuais significativas não só centra a atenção sobre a correspondência entre representação gráfica e a escrita algébrica, mas ela permite encontrar diretamente a expressão algébrica a partir de propriedades geométricas. Isso de certo modo exige um tratamento dinâmico dessas articulações, pois mudanças no gráfico implicam alterações nas equações, e vice-versa.
B e C	Parece interessante explorar situações em que o aluno possa ser questionado a cerca dos procedimentos escolhidos, e que possam descrever algum procedimento diante de questões que envolvem raízes duplas – uma só interseção do gráfico com o eixo das abscissas – e raízes não reais - o gráfico não intercepta o eixo das abscissas. Acreditamos que um aplicativo que proporcione a manipulação e o tratamento dinâmico na articulação de equações e gráficos possa colaborar nesse sentido.
C	Mais uma vez sentimos a necessidade de um aplicativo que seja capaz de representar o gráfico e suas respectivas equações, de modo que, alterando a posição de alguns pontos destacados no gráfico – relacionados as variáveis visuais, como: os pontos de interseções com os eixos e o vértice – possam ser obtidas modificações nas suas representações algébricas também explicitadas na interface do software. Da mesma maneira, quando forem modificados os coeficientes das equações em qualquer uma de suas formas - unidades simbólicas correspondentes – poderemos acompanhar as alterações no gráfico e nas demais formas algébricas. Possivelmente um ambiente computacional que proporcione explorar as articulações com dinamismo, ajude os alunos ao menos a emitirem alguma reposta às questões propostas nessa perspectiva.
C e D	Sugerimos a elaboração de questões que exigissem a exploração das três expressões algébricas com a mesma representação gráfica, de maneira que pudessem proporcionar ao estudante perceber a correspondência entre as unidades simbólicas das formas algébricas e os valores visuais da forma geométrica. Acreditamos que uma ferramenta computacional que possibilite um tratamento dinâmico de gráficos e equações contribua efetivamente para evidenciar tal dificuldade.

Quadro 09 - Encaminhamentos para os tipos de atitudes procedimentais.

Tomando por base as evidências da pesquisa realizada, percebemos a necessidade de elaborar novas questões que viessem contemplar os quatro tipos de dificuldades destacadas no quadro acima, aliadas a um software que oferecesse um tratamento dinâmico a representação geométrica e as representações algébricas, visto ter sido essa a dificuldade mais enfatizada no material analisado.

A seguir apresentaremos um exemplo de como pode se dá a articulação entre equações e gráfico utilizando o aplicativo *Formas*. As considerações são obtidas a partir de uma série de movimentos do gráfico e da manipulação das equações, de acordo com as exigências das situações postas ao aluno.

Inicialmente vamos abordar o caso no qual estão definidas as três formas algébricas.

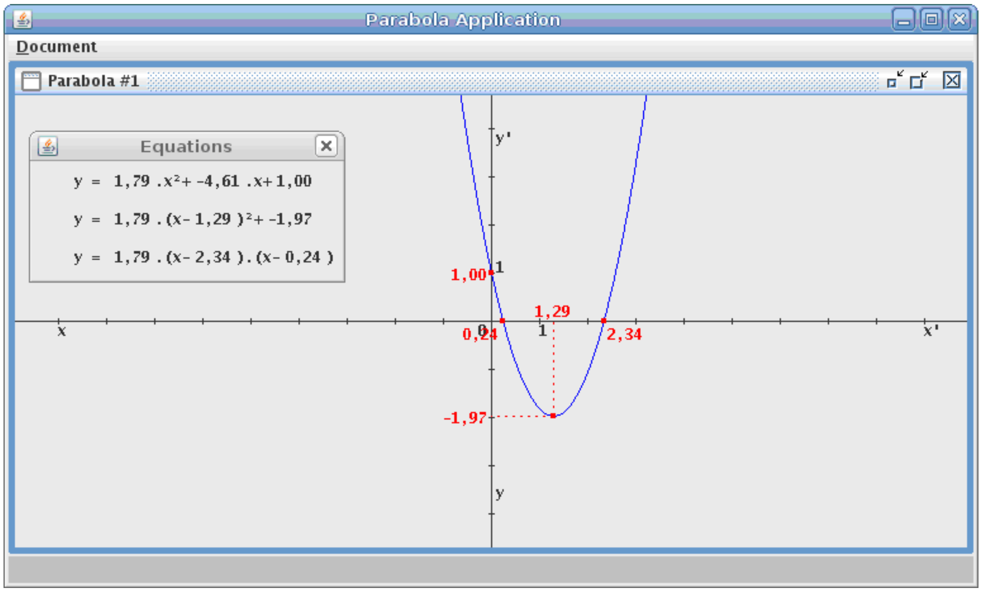

Figura 10 - Interface do aplicativo *Formas*: Gráfico cujas interseções com os eixos são distintas.

Observando o gráfico acima, podemos destacar as implicações das unidades simbólicas (das equações) correspondentes às variáveis visuais (do gráfico):

- O coeficiente ***a*** comum as três (a=1,79).
- A interseção com o eixo das ordenadas explicitado no gráfico e representado na forma desenvolvida (c=1).
- As unidades simbólicas correspondentes x'=2,34 e x''=0,24, as variáveis visuais (interseções com o eixo das abscissas), explicitadas na forma algébrica fatorada.
- Também são destacadas as coordenadas do vértice na forma canônica, V (m, k) em que m=1,29 e k=-1,97, podendo ser verificada também no gráfico.

Diante dos fatos relacionados à maneira como se dá a conversão entre representações algébricas e representação geométrica, nos níveis de ensino, sua abordagem não reflete o processo histórico que levou a unificação entre a álgebra e a geometria. Vista de maneira fragmentada, a conversão entre essas duas representações tem sido tratada como sendo trivial. Todavia vários estudos como Duval (1988), Kieran (1992), Oliveira (1997), Schwarz (1995), Simões (1995), Santos (2002) e Maia (2007), têm demonstrado que isso não corresponde à realidade, uma vez que os alunos não compreendem bem essa conversão, mesmo estando na fase final do ensino médio.

Outro aspecto que gostaríamos de destacar diz respeito à importância da articulação entre álgebra e geometria na evolução dos conhecimentos matemáticos, sendo construída progressivamente, inclusive dando origem a novas áreas de estudo da matemática como, a geometria-algébrica e a álgebra-geométrica. Atualmente, no ensino de matemática, essa articulação é considerada como sendo algo natural, segundo as abordagens dos livros didáticos e os professores. Mas, como observamos nessa e em outras pesquisas, não é para os alunos, visto que a articulação é trabalhada em casos bem específicos, partindo-se do cálculo das coordenadas pelo procedimento ponto a ponto para traçar o gráfico. Consideramos que nossa ideia de trabalhar com as formas e com as metapropriedades das formas algébricas e propriedades geométricas associadas, é um caminho para trabalhar efetivamente a articulação entre álgebra e geometria.

Desse modo, ressaltamos a necessidade de um trabalho mais especifico e aprofundado sobre a articulação álgebra-geometria no ensino da matemática, talvez como as formas (algébricas e geométricas) aparecem nos trabalhos de Descartes e outros matemáticos que desenvolveram as geometrias algébricas e analíticas e a álgebra-geométrica.

Referências Bibliográficas

BELLEMAIN, F. Reconhecimento de formas algébricas no ensino. *Anais do II HTEM*. Rio de Janeiro: IME-UERJ, 2004.

CHEVALLARD, Y. Le passage de l'arithmétique a l'algebre dans l'enseignement des mathématiques au collège. *Journal Pour Les Enseignants de Mathematique et de Sciences Physiques du Premier Cycle de L'enseignement Secondaire*, Deuxième partie, Petit x, n°19. Grenoble:Edité par I'I.R.E.M.,1989, p. 43 – 72.

DUVAL, R., Graphiques et Equations: L'articulation de deux registres, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives.* 1º IREM de Strasbourg, 1988. p 235-253.

DUVAL, R., Registros de Representações Semióticas e o Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática. In: Machado, S. D. A. (Org.), *Aprendizagem em*

Matemática Registros de Representações Semióticas. Campinas - SP; Papirus, 2005, p. 7-33.

FRANÇA, M. V. D. *Conceitos fundamentais de álgebra linear: uma abordagem integrando geometria dinâmica*. 2007. 140 f. Dissertação (Mestrado) – Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, PUC-SP, São Paulo, 2007.

MAIA, D. *Função Quadrática: Um Estudo Didático de uma Abordagem Computacional.* 2007. 141 f Dissertação (Mestrado) – Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, PUC-SP, São Paulo, 2007.