NÚMEROS. Revista de didáctica de las matemáticas
Volumen 33, marzo de 1998, páginas 52-56

El rincón de la calculadora gráfica
A cargo de Francisco Puerta García

El dominio de definición de una función racional y sus asíntotas verticales

Amalia Sánchez Benito

Analicemos la siguiente frase: "*Una función racional no está definida para aquellos valores de la variable independiente que anulan el denominador. Por lo tanto, para esos valores de la variable independiente existen asíntotas verticales*".

Así, al menos, parecen entenderlo los alumnos cuando estudiamos el dominio de definición de una función y posteriormente estudiamos y calculamos sus asíntotas.

El estudio de las respuestas de varios alumnos de segundo de Bachillerato en una prueba escrita de límites, me llevó a la siguiente reflexión:

1. La mayoría del alumnado simplemente procede a igualar a cero el denominador de la función y hallar las raíces de la ecuación resultante, concluyendo que éstas son las asíntotas verticales de la función, sin utilizar para nada el cálculo de límites. La minoría que, sin embargo, procede al cálculo del límite de la función para aquellos valores que anulan el denominador, concluyen que no existen asíntotas verticales cuando encuentran una indeterminación $\frac{0}{0}$ porque según ellos no existe el límite; y curiosamente sí saben resolver este tipo de indeterminaciones y lo demuestran en otros problemas del mismo ejercicio.

2. Las asíntotas horizontales sí las calculan empleando la notación de límite y casi siempre correctamente.

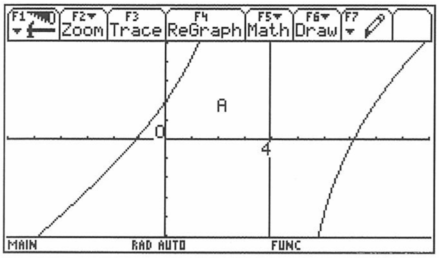
Esta sección ofrece a los lectores un foro en el que exponer ideas, consultar dudas y debatir planteamientos didácticos relacionados con el uso de la nueva generación de calculadoras gráficas avanzadas en la enseñanza de las matemáticas. Esperamos que participes enviando tus consultas o aportaciones a la dirección indicada al final.

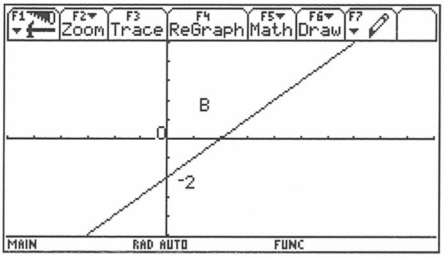
3. El punto 1 lleva como consecuencia el hecho de que la mayoría encuentra asíntotas verticales aún no existiendo.

¿Por qué esta diferencia de tratamiento entre unas y otras? A mi entender, se debe a dos causas fundamentales. La primera, la insistencia en el cálculo –sin apoyo gráfico– del dominio de funciones racionales, durante el cual casi siempre utilizamos ejemplos en los que así ocurre. Por otra parte el alumnado se siente más seguro utilizando «recetas» que le automaticen la resolución de problemas.

Este problema se puede resolver en parte utilizando en el aula una calculadora gráfica para que se acostumbren a 'ver' el comportamiento de las funciones racionales y pidiéndoles que realicen actividades que les susciten cuanto menos un conflicto cognitivo.

Por ejemplo[1], las siguientes gráficas





corresponden a las funciones cuya expresión analítica es la siguiente, aunque no necesariamente en el orden en que aparecen:

$$\text{a) } f(x)=\frac{x^2-6x+8}{x-4} \quad ; \quad \text{b) } f(x)=\frac{x^2-6x-8}{x-4}$$

Se pide:

1. ¿Qué gráfica corresponde a cada una de las funciones?

2. Describe las características de cada una de las funciones (dominio, recorrido, continuidad, asíntotas, simetrías, etc.)

---

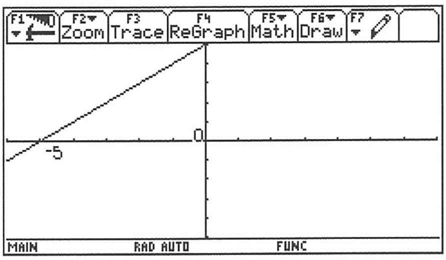
[1] Ilustramos este ejemplo con pantallas procedentes de una TI–92, pero puede utilizarse cualquier calculadora gráfica.

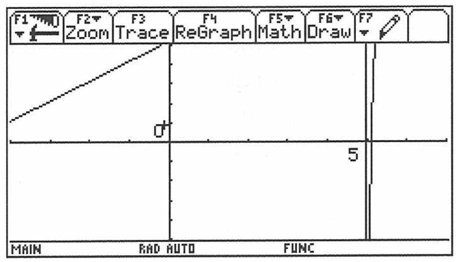
3. ¿Por qué existe esa diferencia tan grande en el comportamiento de las funciones cuando sus correspondientes expresiones analíticas son tan parecidas?

4. Realiza los mismos ejercicios para las siguientes funciones:

$$\text{a) } f(x) = \frac{x^2 - 25}{x - 5} \quad , \qquad \text{b) } f(x) = \frac{x^2 - 26}{x - 5}$$

cuyas gráficas son las siguientes:





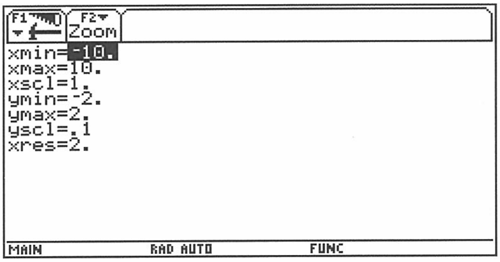
5. A la vista de los resultados obtenidos ¿Crees que es cierto que los valores que anulan el denominador de una función racional corresponden a asíntotas verticales? Explica brevemente tus conclusiones.

Hoja de actividades: Relación entre el dominio de una función y sus asíntotas verticales

1. Representa en tu calculadora, sucesivamente, las siguientes funciones:

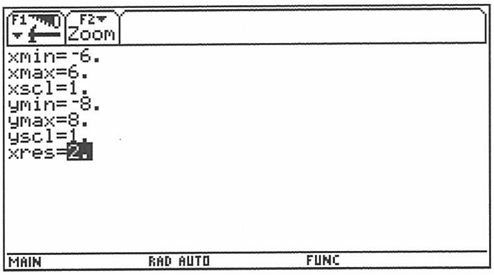
$$\text{a) } f(x) = \frac{x+5}{x^2 - 25} \quad , \quad \text{b) } g(x) = \frac{x+4}{x^2 - 25} \quad , \quad \text{c) } h(x) = \frac{x-5}{x^2 - 25}$$

Puedes usar los siguientes valores de ventana



Compara las gráficas y describe las diferencias y semejanzas entre ellas. Justifica la posible causa de las mismas.

2. Representa ahora la función $j(x)=\dfrac{x^2-25}{x-5}$. Modifica, si lo estimas necesario, la presentación en pantalla. Por ejemplo:



El resultado obtenido en la pantalla, ¿coincide con el que esperabas?. En caso afirmativo, justifica tu respuesta. En todo caso, intenta responder a las siguientes cuestiones:

	cierto	falso
1. Las funciones f,g, h, j, son racionales		
2. Los puntos en los que se anula el denominador de una función racional, no pertenecen a su dominio		
3. Una función racional tiene asíntotas verticales en los puntos en que se anula su denominador		
4. Las asíntotas verticales de una función racional están siempre en los puntos que no pertenecen a su dominio y viceversa		
5. Se puede afirmar que “una función racional tiene asíntotas verticales en los puntos que anulan el denominador cuando la expresión de la función es una fracción irreducible”		
6. $y=\dfrac{x^2-25}{x-5}$ es una recta		

3. Dibuja en el papel, teniendo en cuenta las conclusiones anteriores, un estudio comparativo entre las siguientes funciones:

$$f(x) = \frac{x+}{x^2-49} \quad ; \quad g(x)\frac{x-7}{x^2-49} \quad ; \quad h(x) = \frac{x-6}{x^2-49} \quad ;$$

$$j(x) = \frac{x^2-49}{x-7} \quad ; \quad m(x) = \frac{x^2-49}{x-7}$$

Representa ahora dichas funciones con tu calculadora y compara con los resultados previstos.

Describe brevemente las diferencias (si las hay) y similitudes entre los resultados previstos y los obtenidos en pantalla.
Analiza brevemente las posibles causas de error.

La profesora Amalia Sánchez Benito desempeña su labor en el Instituto "Pérez Galdós" de Las Palmas de Gran Canaria. Además de en las aplicaciones de las nuevas tecnologías, está interesada en las relaciones entre Lenguaje y Matemáticas.

Francisco Puerta García
Instituto "Isabel de España"
Tomás Morales, 39
35003 Las Palmas de G. C.
fpgg@correo.rcanaria.es