RESOLVER E INVESTIGAR: POSSIBILIDADES PARA O ENSINO DE FUNÇÕES EXPONENCIAIS

SOLVING AND INVESTIGATING: POSSIBILITIES FOR THE TEACHING OF EXPONENTIAL FUNCTIONS

Dionei Cardozo

Universidade Regional de Blumenau / dionei.cardozo95@gmail.com

Janaína Poffo Possamai

Universidade Regional de Blumenau / Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática / janainap@furb.br

Resumo

Essa pesquisa faz parte da dissertação de mestrado intitulada “Do Átomo de Carbono às Grandes Populações: o Ensino de Funções Exponenciais sob a Perspectiva da Resolução de Problemas” do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática da Universidade Regional de Blumenau (FURB). O objetivo deste estudo é analisar uma prática de resolução de problemas na perspectiva de uma abordagem investigativa para o ensino de funções exponenciais em uma turma de primeiro ano de Ensino Médio. Para tanto, discute-se o histórico da resolução de problemas, bem como as diferenças e aproximações para o contexto da investigação matemática. Uma prática, envolvendo o plantio de uma semente de feijão e a busca de uma função correspondente, é descrita e analisada com o intuito de mostrar como um problema matemático pode ser estruturado com questionamentos que levem à um processo investigativo. Como resultados verifica-se que uma pratica pedagógica nesse contexto permite aos estudantes se sentirem parte do fazer matemática, explorando padrões, testando hipóteses, validando resultados e procurando novos caminhos, bem como aumentando a confiança em relação à matemática na medida em que expõem e discutem suas ideias com os colegas da turma e com a própria comunidade escolar.

Palavras-chave: Resolução de Problemas; Investigação Matemática; Função exponencial.

Abstract

This research is part of the master's dissertation entitled "From the Carbon Atom to the Great Populations: Teaching Exponential Functions under the Perspective of Problem Solving" of the Post-Graduate Program in Teaching Natural Sciences and Mathematics of the Regional University of Blumenau (FURB). The aim of this study is to analyze a problem-solving practice from the perspective of an investigative approach to the teaching of exponential functions in a first-year high school class. For that, the history of Problem Solving is discussed, as well as the differences and approximations to the context of Mathematical Research. A practice, involving the planting of a bean seed and the search for a corresponding function, is described and analyzed in order to show how a mathematical problem can be structured with questions that lead to an investigative process. As a result, a pedagogical practice in this context allows students to feel part of doing mathematics, exploring patterns, testing hypotheses, validating results and searching for new paths, as well as increasing confidence in mathematics as they expose and discuss their ideas with classmates and with the school community itself.

Keywords: Problem Solving; Mathematical Investigation; Exponential Function.

Introdução

Atualmente, diversas tendências de ensino da matemática tais como a Resolução de Problemas, a Modelagem Matemática, o *Making Sense* ou a Matemática Crítica, parecem compactuar com uma ideia que vem ganhando força nas pesquisas recentes da área: que uma das melhores formas de se aprender matemática é realmente fazendo matemática. Autores como Braumann (2002), Van de Walle (2009), Branco (2011) e Ponte, Brocardo e Oliveira (2016) apontam para a importância de se utilizar os processos decorrentes da resolução de atividades investigativas como caminhos para a aprendizagem de novos conteúdos matemáticos.

Nessa perspectiva, investigar nas aulas de matemática, pressupõe que o professor deixe de ser o principal agente responsável pela aprendizagem dos estudantes para se tornar um mediador. Esta, passa a acontecer a partir das experiências desenvolvidas pelos estudantes durante a abordagem de uma situação matemática que possibilite, por meio de um viés problematizador, a construção de novos conhecimentos. Para tanto, é preciso transcender a cultura de sala de aula, bastante presente em nosso sistema de ensino, que privilegia a utilização de fórmulas e algoritmos como a essência da aprendizagem matemática.

Apesar de essas atividades desempenharem um papel importante, elas não devem ser utilizadas como única finalidade das aulas de matemática. Braumann (2002) reconhece a importância que os teoremas e definições apresentam, contudo o autor faz um alerta que, tão importante como saber demonstrar ou utilizar um teorema, são os caminhos que levaram até sua formalização: “Como se chega lá? Qual o interesse que tem esse teorema? Que problema é que ele resolve? Que mecanismos intuitivos, associados por vezes a métodos de tentativa e erro, que razões estéticas até, nos levam a pensar que a proposição é verdadeira?” (p. 6).

A matemática é uma ciência de padrão e ordem e “descobrir e explorar esta regularidade ou ordem e então, dar sentido a esta ordem é do que realmente se trata o fazer matemática” (VAN DE WALLE, 2009, p. 32). E por sua vez, os algoritmos atuam, auxiliando a mecanização desses procedimentos, possibilitando o *fazer* matemática quando precedidos pela compreensão. Não faz sentido mecanizar um conteúdo que se quer foi compreendido. Infelizmente, essa perspectiva inadequada está bastante presente em nossas salas de aula.

> Embora importante, a utilidade não é a única razão para aprender com compreensão. Se queremos que os alunos saibam o que é matemática, como assunto, eles devem entender isso. Conhecer a matemática, *realmente conhecê-la*, significa compreendê-la. Quando memorizamos regras para mover símbolos no papel, podemos estar aprendendo algo, mas não estamos aprendendo matemática. Quando memorizamos nomes e datas, não estamos aprendendo história; quando memorizamos títulos de livros e autores, não estamos aprendendo literatura. Conhecer um assunto significa entrar e ver como as coisas funcionam, como as coisas estão relacionadas umas com as outras e por que elas funcionam como funcionam (HIEBERT et al., 1997, p. 18, grifo do autor, tradução nossa).

Tendo esses aspectos em vista, queremos com esse estudo apontar os benefícios das atividades de natureza investigativa para as aulas de matemática, além de diferenciá-las da prática de resolução de problemas que, apesar de compartilharem de alguns procedimentos, distinguem-se quanto a natureza dessas tarefas e dos objetivos utilizados. Por fim, de modo a discutir os apontamentos teóricos, são apresentados os resultados acerca da aplicação de uma atividade envolvendo o ensino de funções exponenciais a partir de uma prática experimental e que foi resolvida utilizando algumas premissas da investigação matemática. Deseja-se ao final, contribuir para a incorporação dessas práticas pelos professores em suas atuações profissionais.

Uma breve contextualização histórica

De acordo com Allevato e Vieira (2016), a Educação Matemática passou por diversos movimentos que foram influenciados diretamente pelas transformações sócio-político-econômicas que aconteceram em nível mundial. Paralelamente a essas reformas, passou a haver uma crescente procura dos jovens pela educação formal, principalmente em busca de formação profissional que os possibilitassem a assumir posições dentro do mercado de trabalho. Esse aspecto, aliado ao desenvolvimento de políticas públicas de incentivo à escolarização, possibilitou o acesso de praticamente todas as classes sociais ao ensino formal. “A relação intensa com a aprendizagem, a transmissão e a produção de conhecimentos não é mais reservada a uma elite, diz agora respeito à massa de pessoas em suas vidas cotidianas e seus trabalhos” (LÉVY, 1999, p. 173). Contudo, na visão de Allevato e Vieira (2016), tal realidade traz à escola novas dificuldades e desafios, visto que os estudantes passaram a apresentar perfis diferenciados daqueles com os quais a escola estava habituada a trabalhar.

No tocante ao ensino da matemática, é possível afirmar que este foi, ao longo dos tempos influenciados pelas demandas sociais de cada época. No que se refere ao início do século XX, período de grande industrialização, Onuchic (1999) afirma que o ensino de matemática era caracterizado pela repetição, no qual a memorização era considerada bastante importante. Nessa concepção de ensino, o professor era o agente principal da sala de aula que explicava todo o conteúdo e os estudantes recebiam essas informações, guiados por uma abordagem que incentivava a escrita, a memorização e a repetição. A avaliação, por sua vez, acontecia por meio de testes que verificavam se os estudantes conseguiam reproduzir corretamente aquilo que o professor havia transmitido.

Posteriormente, em outra orientação, Onuchic (1999) destaca que uma nova corrente de ensino viria para substituir o ensino por repetição. Nessa nova abordagem, os estudantes deveriam aprender por compreensão, entendendo aquilo que faziam. Entretanto, na visão da autora, o professor continuava sendo aquele que falava e o estudante aquele que ouvia e repetia, sem participar ativamente da construção de seus conhecimentos. "O trabalho se resumia a um treinamento de técnicas operatórias que seriam utilizadas na resolução de problemas-padrão ou para aprender algum conteúdo novo" (ONUCHIC, 1999, p. 201). Foi durante esse período que, segundo a autora, começou-se a se falar a respeito de resolução de problemas, especialmente após a publicação do livro *How to Solve It* de George Polya em 1944.

Na sequência, novamente essa perspectiva de ensino perdeu seu lugar para um movimento que ganhava força em diversos países: o Movimento da Matemática Moderna. De acordo com Búrigo (1990), tal movimento aconteceu durante as décadas de 60 e 70 e teve suas origens pautadas pelo crescente desenvolvimento social e tecnológico daquele período e tinha como objetivo tornar os conteúdos matemáticos aprendidos no ensino secundário mais próximos daqueles que eram estudados no ensino superior. Onuchic (1999, p. 202) descreve que esse movimento prezava por "[...] uma matemática estruturada, apoiada em estruturas lógica, algébrica, topológica e de ordem e enfatizava a teoria dos conjuntos. [...] Entretanto, acentuava o ensino de símbolos e uma terminologia complexa que comprometia o aprendizado". Esses fatores, dentre outros, acarretaram novamente no insucesso desse movimento e muitos professores brasileiros, influenciados pelo desgaste da proposta nos países nos quais ela havia sido idealizada, passaram a criticá-lo (BÚRIGO, 1990).

Por fim, a partir do final da década de 70, novamente a resolução de problemas começa a ganhar espaço no âmbito da educação matemática. Segundo Onuchic (1999), após a publicação do documento "Uma Agenda para Ação" pelo Conselho Nacional de Professores de Matemática (NCTM), no qual apontava que o foco da matemática escolar daquela década deveria estar na resolução de problemas, ela passa a se constituir campo de estudo de diversos pesquisadores e professores de matemática, cujas pesquisas perduram até hoje. Em decorrência disso, Nunes (2014) afirma que a resolução de problemas, atualmente, se constitui uma parte integrante da aprendizagem matemática e por isso, sua utilização não deve ser apresentada como uma parte isolada do currículo. Tal perspectiva, talvez seja uma das principais diferenças acerca da concepção de resolução de problemas do período da matemática por compreensão para o atual.

Tais movimentos evidenciam como o ensino da matemática sempre foi influenciado pelas demandas da sociedade de cada período. Nesse sentido, no período de matemática por repetição, os exercícios rotineiros, por suas características mais diretas que consistem na aplicação de técnicas ou algoritmos para resolução, eram bastante incentivados, visto as demandas daquela época. Concernente ao período da matemática por compreensão, os problemas também passaram a receber destaque, tendo em vista o seu caráter problematizador, sem, contudo, se desvencilhar completamente dos exercícios. Já no período da matemática moderna, os problemas deixam de ser o foco para investir em álgebra e nas relações lógicas. Para por fim, a partir da década de 80, com o declínio do movimento anterior, a Resolução Problemas passa a se constituir campo de estudo da Educação Matemática.

Assim, surge a necessidade de nos perguntarmos, que matemática deve ser ensinada e de que forma esse processo deve acontecer de modo a contemplar os anseios sociais de nossa época, um mundo industrializado, permeado pelas tecnologias e que se modifica constantemente? Essas mudanças sociais, segundo Lévy (1999), são consequências da rapidez do surgimento e da renovação dos saberes, visto que, “pela primeira vez na história da humanidade, a maioria das competências adquiridas por uma pessoa no início de seu percurso profissional estarão obsoletas no fim de sua carreira” (LÉVY, 1999, p. 157).

Tendo em vista esse cenário, destaca-se a importância que o ensino da matemática acarreta para os estudantes no intuito de desenvolver competências e habilidades que lhes permitam atuar sobre o mundo em que vivem e se desenvolver profissionalmente.

> De fato, a evolução tecnológica, particularmente no que se refere às tecnologias digitais, ampliando o acesso à informação e modificando os modelos de gestão em todo o tipo de instituição - familiar, escolar, empresarial, etc - tem trazido a Matemática a patamares cada vez mais destacados e necessários ao desenvolvimento e à compreensão dos fatos sociais, e do Mundo (ALLEVATO; VIEIRA, 2016, p. 117).

Nesse contexto, uma alternativa para o ensino da matemática com o intuito de preparar os jovens para a sociedade atual, são as atividades que permitem aos estudantes atuarem criticamente sobre um determinado assunto: as investigações matemáticas. Para Ponte (2003, p. 10), em uma atividade de natureza investigativa: “O aluno é chamado a agir como um matemático, não só na formulação de questões e conjecturas e na realização de provas e refutações, mas também na apresentação dos seus resultados e na sua discussão e argumentação com os colegas e o professor”.

É coerente afirmar que atividades dessa natureza não são de fácil implementação e exigem mudanças na atuação do professor e até mesmo na maneira como os estudantes costumam ser organizar e agir em sala de aula. Contudo, é possível organizar situações que possibilitem, gradativamente, desenvolver um espírito investigativo às atividades matemáticas.

A resolução de problemas e as investigações matemáticas

Embora atividades envolvendo resolução de problemas ou que abordem investigações matemáticas possam parecer semelhantes, existem certas características que lhes diferenciam quanto a natureza e aos objetivos adotados para sua implementação. Contudo, não significa que uma atividade composta pela resolução de problemas não possa vir a ser trabalhada a partir de um escopo que englobem processos e abordagens usualmente utilizados em tarefas de natureza investigativa. Tudo depende da abordagem do professor e do foco de cada atividade.

Assim, faz-se necessário inicialmente, definir o que se compreende por problema e posteriormente a prática de resolução dessas atividades. Autores como Hiebert et al.

(1997), Echeverría e Pozo (1998), Dante (1999), Diniz (2001), Vila e Callejo (2006) já apresentaram diversos conceitos para o termo problema e todas elas, apesar de possuírem algumas diferenças, compactuam de algumas situações que parecem ser comuns a atividades dessa natureza: ao receber um problema, o estudante não deve conhecer um algoritmo ou técnica que lhe permita resolver imediatamente a atividade. Para tanto, ele precisará buscar, a partir de seus conhecimentos ou de pesquisas, um método de solução ou conceitos relevantes que lhe permita resolver o problema. Esse processo, pode se constituir individualmente ou acontecer a partir da troca de ideias e discussões dentro de grupos de aprendizagem.

Entretanto, a fim de orientar as discussões que levam em conta o termo problema dentro do contexto dessa pesquisa, optou-se por utilizar a definição proposta por Vila e Callejo (2006, p. 29):

> Reservaremos, pois, o termo problema para designar uma situação, proposta com finalidade educativa, que propõe uma questão matemática cujo método de solução não é imediatamente acessível ao aluno/resolvedor ou ao grupo de alunos que tenta resolvê-la, porque não dispõe de um algoritmo que relaciona os dados e a incógnita ou de um processo que identifique automaticamente os dados com a conclusão e, portanto, deverá buscar, investigar, estabelecer relações e envolver suas emoções para enfrentar uma situação nova.

Percebe-se, a partir desta definição, que o ato de resolver um problema também pode levar em consideração processos de natureza investigativa. Ademais, autores como Figueiredo e Groenwald (2017) apontam que, tanto a investigação quanto a experimentação são necessários, dentre outros aspectos, para que a resolução de problemas contribua para a produção de efetivos conhecimentos matemáticos. Contudo, como veremos a seguir, o processo denominado investigação matemática é mais abrangente e menos direto do que a resolução de problemas.

Para Ponte (2003), em contextos relacionados a aprendizagem, investigar não significa lidar com problemas de grande dificuldade. Em sua visão, significa apenas, trabalhar em questões que atraiam o interesse e que se apresentem inicialmente confusas, mas que possam ser esclarecidas e estudadas de modo organizado. Nesse sentido, Ponte, Brocardo e Oliveira (2016) acreditam que atividades investigativas ajudam a trazer para a sala de aula o espírito da atividade matemática genuína, na qual o estudante é chamado a agir como matemático, formulando questões e conjecturas, realizando provas e refutações e, também, discutindo e argumentando seus resultados com o professor e com a turma. É esse envolvimento ativo do estudante, que segundo os autores, se constitui como condição fundamental para a aprendizagem, pois ele aprende a partir da mobilização de seus recursos cognitivos e afetivos.

As atividades que se constituem, genuinamente, como investigações matemáticas abordam algumas etapas que são descritas por Ponte (2003, p. 2):

> Numa investigação matemática, parte-se de uma questão muito geral ou de um conjunto de informações pouco estruturadas a partir das quais se procura formular uma questão mais precisa e sobre ela produzir diversas conjecturas. Depois, testam-se essas conjecturas, algumas das quais,

> perante contra-exemplos, poderão ser desde logo abandonadas. Outras, sem se revelarem inteiramente correctas, poderão ser aperfeiçoadas. Neste processo, por vezes formulam-se novas questões e abandonam-se, em parte ou no todo, as questões iniciais. As conjecturas que resistirem a vários testes vão ganhando credibilidade, estimulando a realização de uma prova que, se for conseguida, lhes conferirá validade matemática.

A partir desses processos é possível compreender que atividades dessa natureza necessitam de esforços coletivos, tanto do professor, como dos estudantes, no intuito de poderem ser implementadas em sala de aula. Evidentemente, executá-las significa tirar do professor o papel central na explicação dos conceitos e, em decorrência disso, as aulas passam a apresentar situações inesperadas. Nesse sentido, Ponte, Brocardo e Oliveira (2016) afirmam que, visto a variedade de caminhos de solução que os estudantes podem seguir, os avanços, recuos, divergências e o modo como a turma reage as intervenções do professor são elementos imprevisíveis numa aula de investigação e, por isso, segundo os autores, pode-se planejar o modo de começar uma investigação, mas nunca se sabe como ela irá terminar.

São algumas dessas peculiaridades que diferenciam as investigações matemáticas da resolução de problemas. Assim, uma primeira diferença bem visível está na natureza dessas atividades. De acordo com Brocardo (2001, p. 93): “Na resolução de problemas as questões estão formuladas à partida, enquanto nas investigações esse será o primeiro passo a desenvolver”. É por essa razão, que implementar a investigação matemática em sala de aula não é uma tarefa fácil ao professor, pois todo o andamento da aula não pode ser previamente planejado como acontece numa aula de explicação de conceitos ou realização de exercícios. Em atividades de natureza investigativa, os estudantes se deparam com uma situação e, a partir da sua manipulação e estudo, surgem questões para as quais não se conhecem previamente as respostas. É esse processo de pesquisa e validação que possibilita a aprendizagem dos novos conceitos.

Percebe-se a partir da definição proposta por Vila e Callejo (2006) que os problemas também necessitam de pesquisa, argumentação e validação de resultados. Contudo, a pergunta e o que se desejar solucionar costuma aparecer explicitamente no enunciado do problema, mas isso não significa que ele não possa ser solucionado a partir de um viés investigativo. Em outras palavras, tal diferença é conceitual, e o professor pode, mesmo a partir de um problema, incitar os aspectos característicos das atividades investigativas.

Outra diferença entre essas duas atividades também é elencada por Brocardo (2001, p. 93): “Num problema, procura-se atingir um ponto não imediatamente acessível, ao passo que numa investigação o objectivo é a própria exploração”. Assim, verifica-se que ao propor um problema, o professor deseja que os estudantes obtenham, ao final, a sua solução, podendo essa estar de acordo ou não com o que era esperado pelo professor. Entretanto, em tarefas investigativas, a solução final não é o objetivo, mas sim, todos os processos e caminhos utilizados durante a sua execução.

> Numa abordagem de resolução de problemas, cabe ao professor colocar o problema enquanto o aluno tem a tarefa de encontrar uma forma, um caminho que lhe permita chegar à solução. Numa abordagem pedagógica de investigação, o professor pode escolher a situação de partida ou

> aprovar a escolha do aluno mas é a este que cabe a formulação de questões, definindo assim os seus próprios problemas dentro da situação proposta. Deste modo, as relações de poder que se estabelecem ao nível da turma têm também características diferentes. A resolução de problemas permite ao aluno alguma criatividade na resolução de uma nova situação. No entanto, o professor pode ainda controlar tanto o conteúdo como o modo de ensinar (BROCARDO, 2001, p. 94).

Por fim, a diferenciação entre exercícios, problemas ou investigações matemáticas não pode ser realizada em termos absolutos, pois conforme descreve Ponte (2003), esses conceitos dependem também dos sujeitos a quem essas atividades são direcionadas. O autor aponta que uma mesma tarefa pode ser um problema difícil para um estudante que não consegue compreender claramente o que deve ser realizado e um exercício simples para outro, que já o resolveu diversas vezes. E, analogamente, o autor também afirma que uma tarefa pode ser o ponto de partida para uma investigação para um estudante e uma simples situação que evoca investigações e aprendizagens já realizadas para outro. Por isso, é necessário conhecer o público destinado, bem como as suas atuações perante os conhecimentos e conceitos envolvidos.

Para ilustrar essas diferenças, apresenta-se na Tabela 1, um comparativo do tipo de atividade matemática de acordo com os sujeitos envolvidos.

Tabela 1 – Comparativo entre tarefas matemáticas e os sujeitos envolvidos

Tarefas matemáticas	Exemplos	Sujeitos
Exercício	Resolva a equação $2x+23=-3+7x$	Alunos do 8º ano
Problema	Calcular a diagonal de um paralelepípedo retângulo do qual são conhecidos o comprimento, a largura e a altura (PÓLYA, 1945)[1].	Alunos do 8º ano
Investigação	Escreva em coluna os 20 primeiros múltiplos de 5. Repare nos algarismos das unidades e das dezenas. O que você observa? E o que acontece com os múltiplos de 4 e de 6? E com os múltiplos de outros números?	Alunos do 5º ano

Fonte: Ponte (2003).

A partir desses exemplos propostos por Ponte (2003) é possível verificar a real diferença entre essas três atividades matemáticas. Ao propor o exercício, possivelmente o professor já deve ter explicado previamente como se resolve equações de 1º grau e ao estudante, basta aplicar esse algoritmo aprendido para resolver a questão. Não há novos conhecimentos a serem desenvolvidos durante sua resolução.

No que se refere ao exemplo de problema, o que deve ser realizado está explicitamente escrito no enunciado (calcular a diagonal de um paralelepípedo), contudo, essa questão pode ser utilizada com diversas abordagens. O professor pode propô-la após a explicação do conceito de paralelepípedo ou diagonal, ou após a resolução de um

[1] Pólya, G. **How to solve it:** A new aspect of mathematical method. Princeton: Princeton University Press, 1945.

exemplo prévio, agora com o intuito de formalizar um algoritmo para cálculo de diagonais. Outra abordagem, seria o professor introduzir o conteúdo a partir deste problema e deixar os estudantes trabalharem na busca de uma solução. Como não foi fornecido valores numéricos, o professor pode sugerir que os estudantes construam um paralelepípedo com medidas reais e tentem resolver a questão a partir dele, ou ainda pode fornecer algumas ideias de conteúdos que possam auxiliá-los na resolução, como o Teorema de Pitágoras, por exemplo, deixando-o procurar por padrões. Desse modo, verifica-se que um mesmo problema pode ser trabalhado com um viés mais próximo de exercício ou de uma atividade investigativa, essa abordagem depende do encaminhamento do professor.

Por fim, quanto a investigação proposta por Ponte (2003), apesar de ela apresentar algumas questões norteadoras no enunciado, o estudante não tem um algoritmo ou técnica estabelecida para resolver a questão. Na verdade, as perguntas referem-se ao entendimento dos estudantes na identificação de padrões numéricos, com uma questão aberta ao final.

Essencialmente na questão caracterizada como problema, o conteúdo novo a ser aprendido está direcionado na proposta, mesmo utilizando caminhos de solução diferentes a questão problematizadora está fechada, enquanto que na situação investigativa o foco não é exatamente no conteúdo novo, nem o padrão que será formulado pelo estudante, mas sim a possibilidade de gerar novas questões de investigação, formuladas e estruturadas a partir do processo de busca da solução e na abordagem escolhida pelo estudante.

Tendo em vista esses aspectos, foi realizada uma pesquisa para verificar as abordagens investigativas dos estudantes de 1º ano do Ensino Médio diante de um problema envolvendo a determinação de uma função que represente o crescimento de uma muda de feijão.

Metodologia da pesquisa

Esta pesquisa foi realizada com uma turma composta por 30 alunos de 1º ano do Ensino Médio de uma escola pública, durante o 2º semestre de 2017. Visto as características dessa atividade, ela foi realizada por etapas durante o período de um mês, sendo que a fase inicial, composta pela coleta de dados, aconteceu em paralelo com as demais aulas da disciplina. Após essa etapa, foram necessárias mais três aulas de 45 minutos cada para execução da atividade. De modo a propiciar ambientes colaborativos de aprendizagem a turma foi dividida em 8 equipes, incentivando a troca de ideias e a argumentação.

Quanto a natureza dessa pesquisa, ela classifica-se como qualitativa que, conforme aponta André (2013), essa abordagem se fundamenta sob uma perspectiva em que o conhecimento é construído a partir de um processo social dos sujeitos em suas interações cotidianas, transformando e sendo transformado pela realidade a sua volta. “Assim, o mundo do sujeito, os significados que atribui às suas experiências cotidianas, sua linguagem, suas produções culturais e suas formas de interações sociais constituem os núcleos centrais de preocupação dos pesquisadores” (ANDRÉ, 2013, p. 97).

É válido destacar que durante essa pesquisa o professor da turma assumiu o papel de professor/pesquisador. Na visão de Moreira (1988), o professor, talvez, seja o profissional que ocupa a melhor posição para observar, coletar dados e investigar situações referentes ao ensino e aprendizagem em sala de aula. Em concordância a essa perspectiva, Santos (2001, p. 16) descreve que a atuação do professor enquanto pesquisador acontece “[...] identificando problemas de ensino, construindo propostas de solução com base na literatura e em sua experiência, colocando em ação as alternativas planejadas, observando e analisando os resultados obtidos, corrigindo percursos que se mostram pouco satisfatórios”.

Como instrumentos para coletas de dados foram utilizados os registros escritos dos estudantes durante toda a execução da atividade, registros escritos e fotográficos em diário de campo, bem como a gravação de áudio provenientes do professor/pesquisador a partir de sua atuação e observação. Os resultados desse estudo são descritos e analisados a seguir.

Aplicação da atividade

Essa atividade consistia no plantio de sementes de feijão e o acompanhamento constante de seu crescimento com o intuito de determinar uma função matemática que se ajustasse aos valores obtidos (apenas no intervalo de crescimento da planta). Para determinação dessa função foi utilizado como apoio o software GeoGebra. Além disso, após essa etapa foram realizados alguns outros questionamentos que tinham como intuito propiciar uma problematização maior a respeito do problema.

De modo a poder ser aplicada, os estudantes receberam sementes de feijão e efetuaram seu plantio na horta existente na própria escola. Cada grupo ficou responsável por plantar uma semente de feijão e efetuar a medição de seu comprimento constantemente, bem como regá-la a fim de que não morresse. Para registrar a atividade, os estudantes deveriam preencher uma tabela com todos os valores verificados e, posteriormente, determinar a partir do conjunto de pontos, que tipo de função, dentre aquelas já estudadas, melhor se ajustava aos valores. Após o plantio das sementes, constatou-se que em menos de uma semana já apareceram sobre a terra os primeiros brotos. O intuito era que, após o aparecimento desses brotos, as equipes efetuassem medições do comprimento da muda, se não diariamente, mas ao menos a cada três dias. A seguir, tem-se a Figura que apresenta algumas etapas do crescimento da muda de feijão.

Figura 1 – Etapas do crescimento de uma muda de feijão
Fonte: Acervo do pesquisador.

Entretanto, ao final constatou-se que alguns grupos não seguiram plenamente essas orientações, visto que algumas equipes possuíam poucos valores coletados e em algumas outras, os valores não condiziam com a realidade evidenciando que houve problemas quanto a medição das mudas. Algumas das tabelas com os registros do crescimento do feijão estão representadas pela Figura 2.

Dia	Tamanho (cm)
01	2,5
03	5,6
05	7,3
07	7,8
09	12,5
11	18,0
13	24,0
15	28,4
17	29,6
19	34,8
21	39,9

Planilha – Crescimento do feijão.

Dia	Tamanho
1	5cm
2	6cm
6	9,8cm
7	11,5cm
8	12,5cm
10	14cm
11	16cm

Figura 2 – Tabelas com registro do crescimento de uma muda de feijão
Fonte: Acervo do pesquisador.

A etapa seguinte dessa atividade consistia na identificação de uma lei da função que se ajustasse com os valores obtidos. Inicialmente, os estudantes foram incentivados a analisarem o comportamento dos dados e verificarem se, dentre as funções já estudadas (afim, quadrática e exponencial), alguma delas possuía comportamento semelhante. Após verificarem que os valores não aumentavam sempre da mesma maneira, ficou evidente para eles que a função afim não se ajustava adequadamente aos valores. Na sequência foi analisada a função quadrática. Nesta função os estudantes sabiam que, como seu gráfico é representado por uma parábola, que sempre possui um período de crescimento e decrescimento, então esta função também foi descartada visto que sabiam que o comprimento do feijão continuava aumentando e seria improvável que ele passasse a diminuir drasticamente com o passar do tempo. Por fim, os estudantes concluíram que os valores obtidos se ajustavam com uma função exponencial. Desse modo, o professor/pesquisador incentivou-os a tentarem encontrar alguma lei da função que se ajustasse aos valores obtidos. Após algumas tentativas, nenhuma equipe conseguiu encontrar uma função satisfatória que fosse adequada aos dados. Assim, o professor/pesquisador novamente fez uma intervenção com toda a turma para apresentar um *software* matemático que permite a analisar uma função a partir de um conjunto de dados. Assim, optou-se por utilizar a função de Regressão Exponencial existente no aplicativo GeoGebra.

Como os estudantes já estavam familiarizados com o *GeoGebra,* visto a realização de outras atividades com esse mesmo *software,* a atividade aconteceu sem maiores problemas. Assim, os grupos tiveram que criar uma lista de valores que contivesse os dados referente ao crescimento do feijão e posteriormente determinar a lei da função a partir do comando *"RegressãoExponencial(lista1)"*. Essas etapas foram desenvolvidas mutuamente com o professor/pesquisador que exibia os procedimentos necessários a toda a turma com o auxílio de um projetor e as equipes seguiam os passos conforme estes eram exibidos. Posteriormente, eram exibidos na Janela de Visualização a curva obtida e na Janela de Álgebra a função referente a ela.

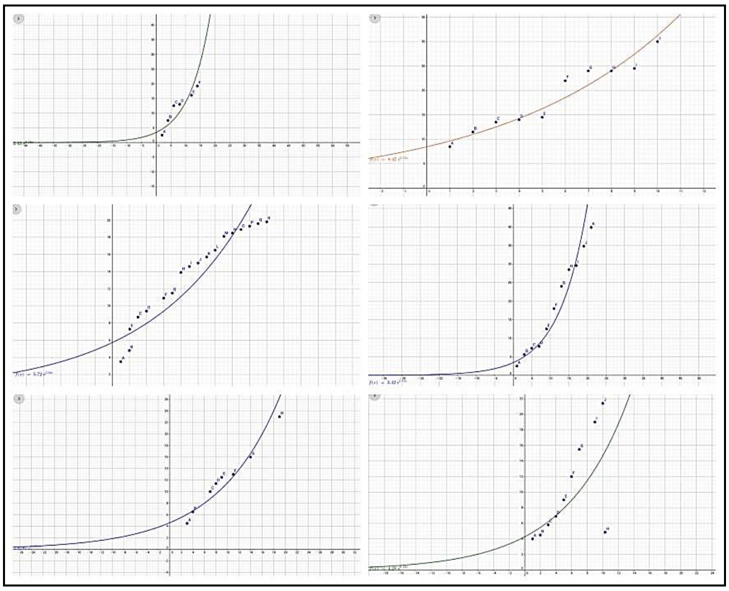
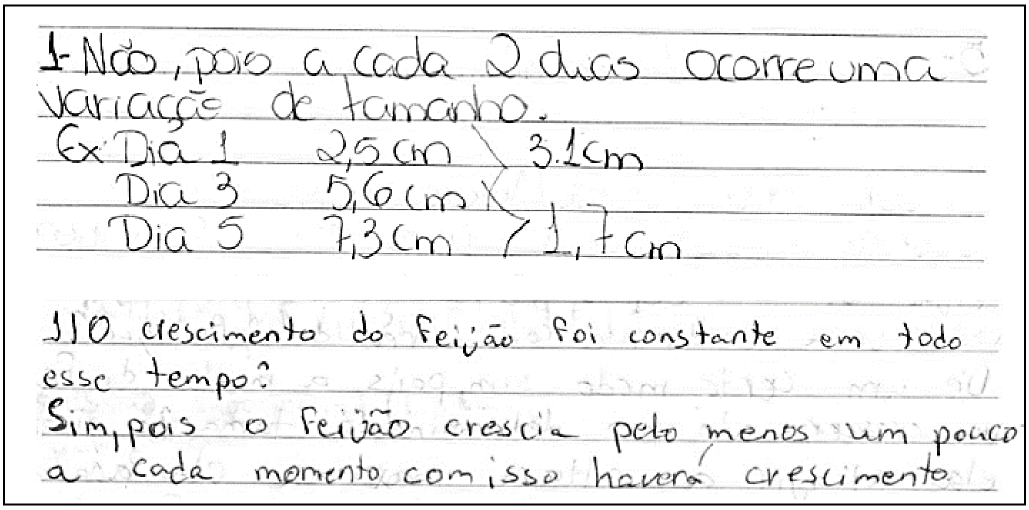


Figura 3 – Gráficos desenvolvidos pelos grupos, referente ao Crescimento da Muda de Feijão
Fonte: Acervo do pesquisador.

Como pôde ser constatado a partir da análise da Figura 3, todas as equipes obtiveram gráficos que se ajustaram aos pontos obtidos, contudo em alguns deles foi perceptível visualizar a existência de um certo desvio entre os valores e a curva, em especial destaca-se o último gráfico no qual é possível visualizar que a posição de um dos pontos não segue o padrão dos demais e que pode acabar influenciando na maior distância existente entre a curva em relação aos demais pontos. Ao se analisar a tabela com as medições efetuadas por essa equipe foi possível constatar que uma das medições não condiz com o restante dos dados. Ao ser questionada, a equipe não soube responder a razão daquela diferença, alegando que a causa mais provável foi erro na hora da escrita. A próxima etapa apresentava perguntas que tinham como proposta investigar a situação.

A primeira pergunta referente a esses registros questionava aos estudantes se "O crescimento do feijão foi constante em todo o período?". A maioria das equipes respondeu que o crescimento não era constante, o que vem ao encontro da situação real, visto que há momentos em que a variação do crescimento foi maior do que em outros períodos. Contudo, uma equipe afirmou que "sim, pois o feijão crescia um pouco a cada momento", o que confirma que não houve um entendimento correto quanto ao significado do termo crescimento constante, na qual o grupo interpretou que desde que o feijão aumente o seu tamanho o seu crescimento é constante, sem importar-se com as variações. Essa resposta não estava incorreta quando se analisa a escrita da pergunta, já que a mesma podia possibilitar essa interpretação. Deste modo, a pergunta foi posteriormente reescrita (corrigindo percursos para posteriores aplicações), de modo a fazer o estudante compreender que o padrão de crescimento não é constante e que há períodos em que o feijão cresce mais rápido do que em outros momentos. A nova pergunta ficou assim escrita: “A variação no tamanho da muda de feijão, dia após dia, foi sempre igual?” Assim, os estudantes são levados a compreender que por mais que haja crescimento da muda, a sua variação não é constante. A seguir, tem-se na Figura 4 as respostas distintas dadas por duas equipes a essa pergunta.



1- Não, pois a cada 2 dias ocorre uma variação de tamanho.
Ex: Dia 1 2,5 cm 3.1cm
Dia 3 5,6 cm
Dia 5 7,3 cm 1,7 cm

11 O crescimento do feijão foi constante em todo esse tempo?
Sim, pois o feijão crescia pelo menos um pouco a cada momento com isso haverá crescimento.

Figura 4 – Respostas de duas equipes quanto a verificação se o crescimento do feijão foi constante
Fonte: Acervo do pesquisador.

Ao se analisar as duas respostas, constatou-se a diferença de interpretação obtida pelas equipes e demonstrou que a pergunta poderia ter sido melhor elaborada.

A pergunta seguinte consistia em identificar qual tipo de função estudada poderia representar essa situação. Todas as equipes responderam corretamente que era a função exponencial. Contudo, não se pôde afirmar com plena certeza que essas respostas foram elaboradas com base na análise dos dados do crescimento do feijão visto que essa pergunta foi realizada após a construção do gráfico da função exponencial. Ou seja, percebeu-se um erro de procedimento que para ser corrigido. Sugere-se que, inicialmente os estudantes plotem o gráfico e analisem a função que melhor se ajustaria a disposição dos pontos. Somente após essa reflexão é que o ajuste com regressão exponencial deve ser proposto.

A terceira pergunta questionava os estudantes sobre a existência de algum símbolo presente na lei da função que fosse desconhecido para eles, visto que a lei da função apresentada pelo GeoGebra seguia o modelo $f(x) = a \cdot e^{b \cdot t}$, em que as constantes *a* e *b* foram calculadas automaticamente pelo aplicativo. Essa pergunta tinha como propósito fazê-los pesquisar sobre a importância do número e para a matemática e, em especial, para as funções exponenciais. As equipes puderam utilizar tanto o livro didático como pesquisar na internet com o auxílio dos tablets ou smartphones. A maioria das equipes responderam esta pergunta aprofundando-se na história desse número e na utilização dele como base dos logaritmos naturais utilizada por Leonhard Euler. Uma das respostas pode ser lida na Figura 5.

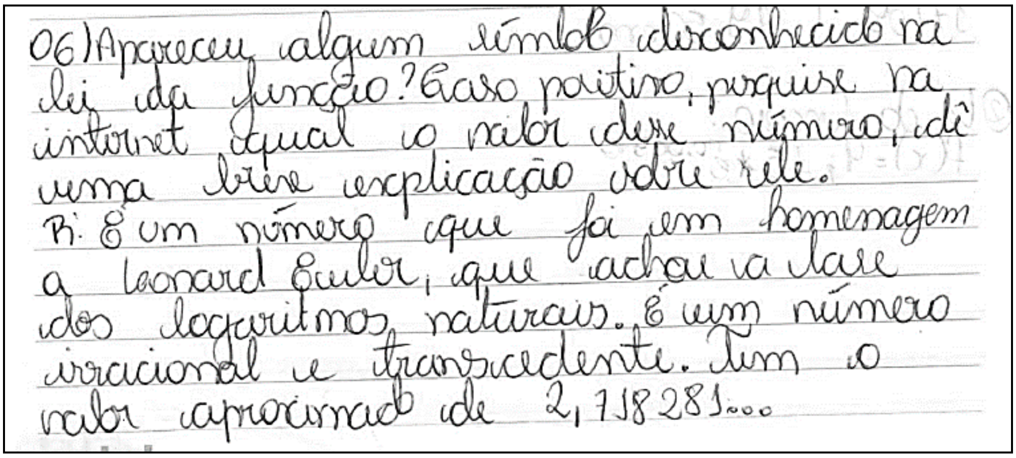

06) Apareceu algum símbolo desconhecido na lei da função? Caso positivo, pesquise na internet qual o valor desse número, dê uma breve explicação sobre ele.
R: É um número que foi em homenagem a Leonard Euler, que achou a base dos logaritmos naturais. É um número irracional e transcedente. Tem o valor aproximado de 2,718281...

Figura 5 – Resposta referente a presença de um símbolo desconhecido na lei da função
Fonte: Acervo do pesquisador.

Contudo, uma das equipes não interpretou de maneira adequada esta pergunta quando responderam que não havia nenhum símbolo desconhecido. Contudo, ao interpretar a explicação fornecida pela equipe percebe-se que a mesma escreveu essa resposta com base nos registros efetuados por eles e não na lei da função que apresentava o símbolo e conforme destaca-se na

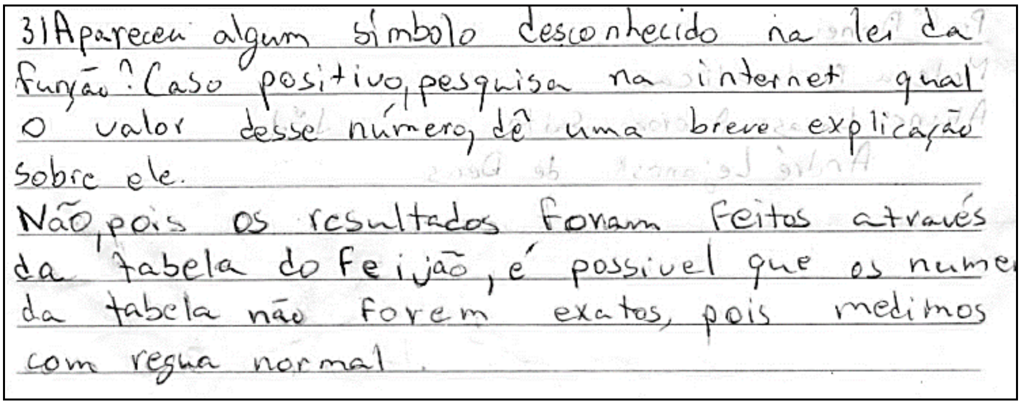

3) Apareceu algum símbolo desconhecido na lei da função? Caso positivo, pesquisa na internet qual o valor desse número, dê uma breve explicação sobre ele.
Não, pois os resultados foram feitos através da tabela do feijão, é possivel que os nume da tabela não forem exatos, pois medimos com regua normal.

Figura 6.

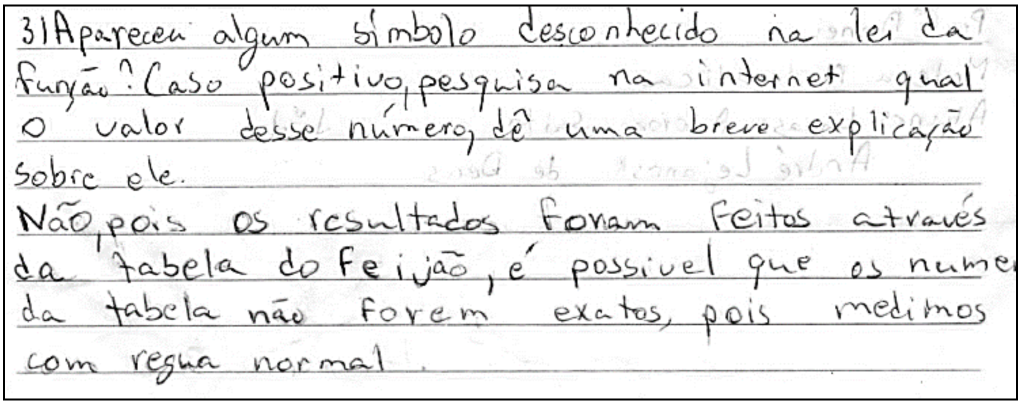

3) Apareceu algum símbolo desconhecido na lei da função? Caso positivo, pesquisa na internet qual o valor desse número, dê uma breve explicação sobre ele.
Não, pois os resultados foram feitos através da tabela do feijão, é possivel que os nume da tabela não forem exatos, pois medimos com regua normal.

Figura 6 – Resposta referente a presença de um símbolo desconhecido na lei da função (incorreta)
Fonte: Acervo do pesquisador.

A pergunta seguinte buscava fazer as equipes se questionarem a razão pela qual as plantas não continuam a crescer constantemente, ficando restritas a um determinado comprimento após certo período de crescimento. Todas as equipes justificaram este fato a partir das condições naturais do ambiente da planta, além de sua própria capacidade de crescimento. Algumas respostas referentes a esta pergunta foram unidas na Figura .

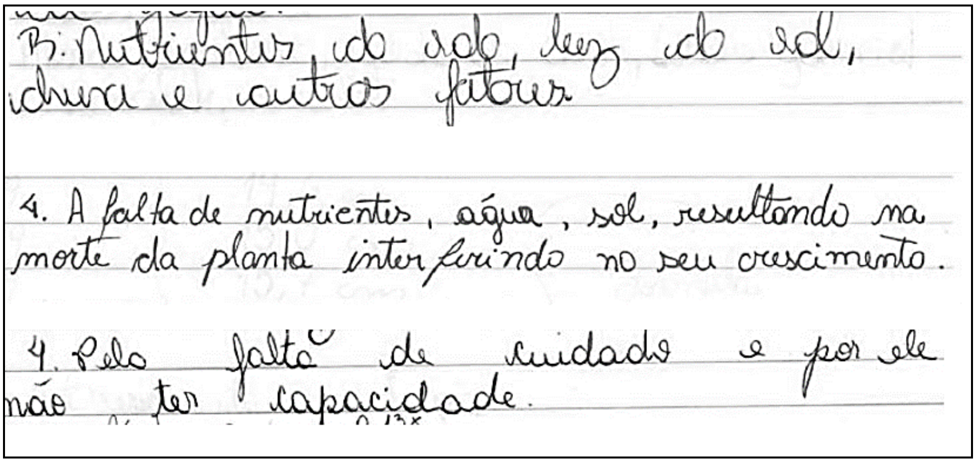
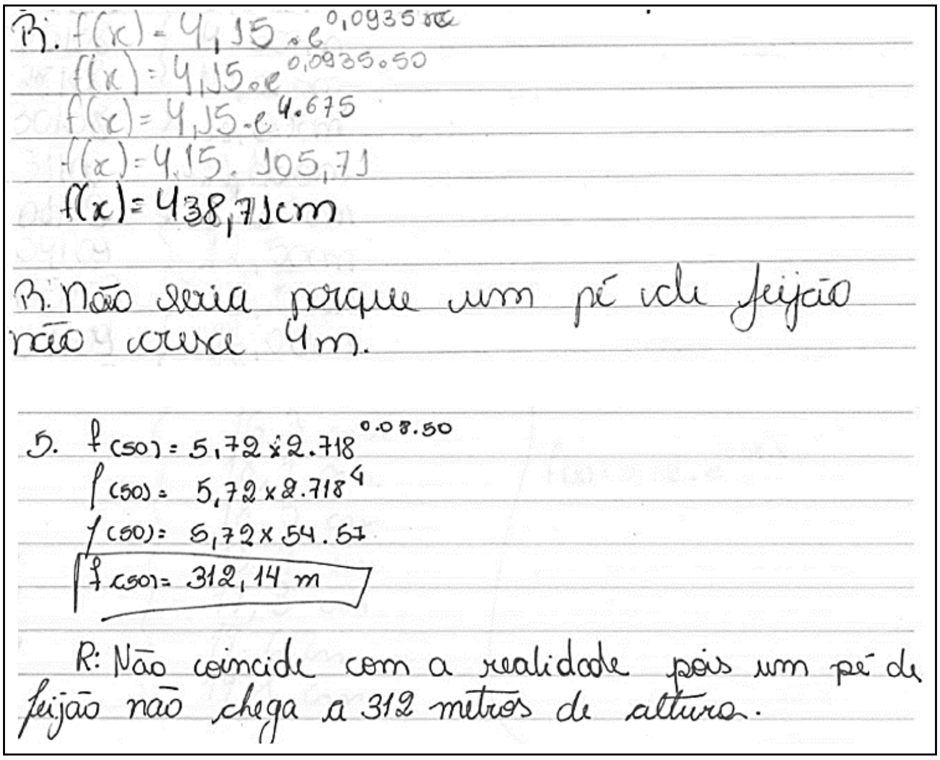


Figura 7 – Respostas referente as causas que impedem o crescimento constante de uma planta
Fonte: Acervo do pesquisador.

Nesse contexto, percebeu-se que a maioria das equipes justificaram suas respostas citando a ausência de nutrientes e a existência de fatores climáticos como sol, chuva, frio, etc. Durante a discussão referente a esta resposta, o professor/pesquisador perguntou aos estudantes se caso houvesse uma abundância de nutrientes, bem como um clima favorável, a planta continuaria a crescer. Muitos estudantes afirmaram que sim, e na sequência foi questionado o porquê de haver plantas que mesmo diante de boas condições não crescem significativamente, como por exemplo morangos ou outros vegetais. Alguns estudantes citaram que o organismo da planta apresenta fatores internos que não lhe permitem atingir grandes tamanhos. Essas discussões também serviram como parâmetro para justificar a resposta da última pergunta da atividade. Reitera-se nesse momento a possibilidade de integração dessas discussões com a Biologia, possibilitando um conhecimento mais integrado e menos compartimentado por componente curricular.

Conforme citado, esta pergunta serviu como parâmetro para discussões referente a última pergunta que questionava as equipes quanto a eficácia da lei da função encontrada para determinar a altura da planta para um período de 50 dias após o início do crescimento, levando-os a verificarem se o valor calculado condiz com a realidade. Algumas respostas foram agrupadas na Figura 8.


R. $f(x) = 4,15 . e^{0,0935 x}$
$f(x) = 4,15 . e^{0,0935 . 50}$
$f(x) = 4,15 . e^{4.675}$
$f(x) = 4,15 . 105,71$
$f(x) = 438,71 cm$

R. Não seria porque um pé de feijão não cresce 4m.

5. $f(50) = 5,72 x 2.718^{0.08.50}$
$f(50) = 5,72 x 2.718^{4}$
$f(50) = 5,72 x 54.57$
$\boxed{f(50) = 312,14\ m}$

R: Não coincide com a realidade pois um pé de feijão não chega a 312 metros de altura.

Figura 8 – Respostas referente a eficácia da lei da função para o cálculo do comprimento do pé de feijão 50 dias após o início do crescimento
Fonte: Acervo do pesquisador.

Após análise das respostas, verificou-se que todas as equipes utilizaram como método de resolução a substituição do valor referente a 50 dias na lei função. Todos os grupos efetuaram os cálculos de maneira adequada, o que comprovou que os estudantes compreenderam os procedimentos relacionados a função exponencial, bem como efetuar cálculos a partir destas funções. Dentre as respostas, constatou-se que algumas equipes tiveram pequenos equívocos quanto ao manuseio de unidades de medidas conforme pode ser visto na segunda resposta da Figura , na qual a equipe atribuiu como unidade o metro, mas os valores utilizados para determinar a lei da função foram dados em centímetros, logo todas as respostas provenientes desta função seguem este padrão. Contudo, muitas equipes atribuíram a unidade de medida adequada às suas respostas, o que evidenciou que as dificuldades referentes as unidades de medidas foram constatadas em apenas poucas equipes.

Além disso, todas as equipes afirmaram que as respostas provenientes da função não condiziam com a realidade pois afirmaram desconhecer pés de feijão com comprimentos tão elevados. Entretanto, não souberam justificar de maneira adequada a razão dessa diferença, ou quando responderam, utilizaram como justificativa, novamente, os elementos naturais. No momento de discussão das respostas com todas as equipes, o professor/pesquisador fez alguns questionamentos que buscavam um aprofundamento desta questão, com perguntas do tipo: *"Se vocês substituírem um valor de tempo, como por exemplo 10 dias na função vocês vão ver que a resposta está de acordo com a realidade, contudo, ao substituir valores muito grandes, como por exemplo 50 dias, essa resposta, não faz sentido. Alguém tem alguma ideia do porquê de isso acontecer?"*. Muitos estudantes buscaram encontrar hipóteses, onde alguns afirmaram que a função encontrada estava incorreta ou que a mesma não fosse confiável. Outros afirmaram que a função leva em consideração um ambiente perfeito no qual as plantas sempre continuam a crescer. Ao final, dentre todas as discussões, o consenso foi de que a função exponencial é adequada apenas para um período do crescimento do feijão e que a mesma não é ajustada para previsão de períodos muito longos.

Deste modo, o professor/pesquisador fez alguns comentários que tinham como intuito fazê-los compreender que as funções, em sua grande maioria, ao representar modelos matemáticos se adequam apenas em períodos restritos e não podem ser consideradas totalmente eficazes ou generalizadas para qualquer situação. No caso do crescimento de uma planta, durante os estágios iniciais, seu comprimento aumenta a uma taxa que pode ser considerada exponencial, contudo, ao atingir a sua altura máxima, seu comprimento se mantém constante. A função exponencial tem como sua principal característica o acréscimo ou decréscimo de valores muito grandes em curtos intervalos de tempo, logo não pode ser utilizada após o momento que a planta deixou de crescer. Uma possível função que se ajustasse a todo o período de vida de uma planta poderia ser a função logística cuja curva inicialmente se assemelha com uma função exponencial, contudo, após determinado momento, estabiliza-se mantendo sempre a mesma imagem para qualquer valor do domínio. Tal diferença pode ser vista na Figura 9.

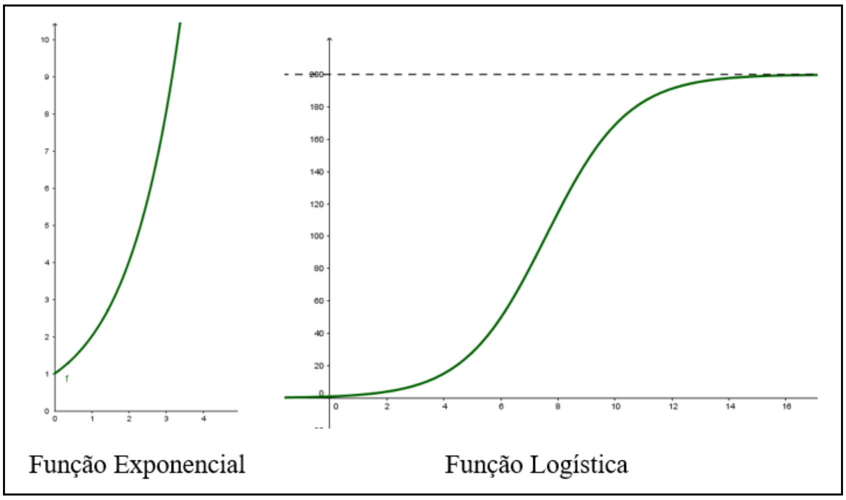


Figura 9 – Comparação entre Função Exponencial × Função Logística
Fonte: Acervo do pesquisador.

Todas essas diferenças foram discutidas em conjunto com os grupos e posteriormente aprofundadas com a apresentação de um vídeo[2] desenvolvido com o intuito de concluir essas e outras questões referente a crescimento exponencial.

Para concluir desta atividade, foi proposto a turma a construção de um mural que tinha como objetivo expor os resultados dos experimentos das equipes para todos os estudantes da escola. Essa sugestão foi prontamente aceita e eles logo passaram a planejar a melhor forma de expor esses resultados. Inicialmente, em conjunto com toda a turma, foi escolhida uma das funções construídas pelas equipes para exposição, como critério utilizou-se aquela que mais se ajustava com os valores medidos. Em seguida, alguns estudantes ficaram responsáveis pela escrita dos textos que explicariam os procedimentos utilizados, bem como os resultados obtidos. Outros estudantes, ficaram responsáveis por desenhar os gráficos, fazer as medições, cortar os papéis, dentre outras

[2] Disponível em https://youtu.be/JEk9fBOtLnk.

atividades, de modo cada que cada um pudesse, a sua maneira, contribuir para a construção do mural. O resultado pode ser visto na Figura 10.

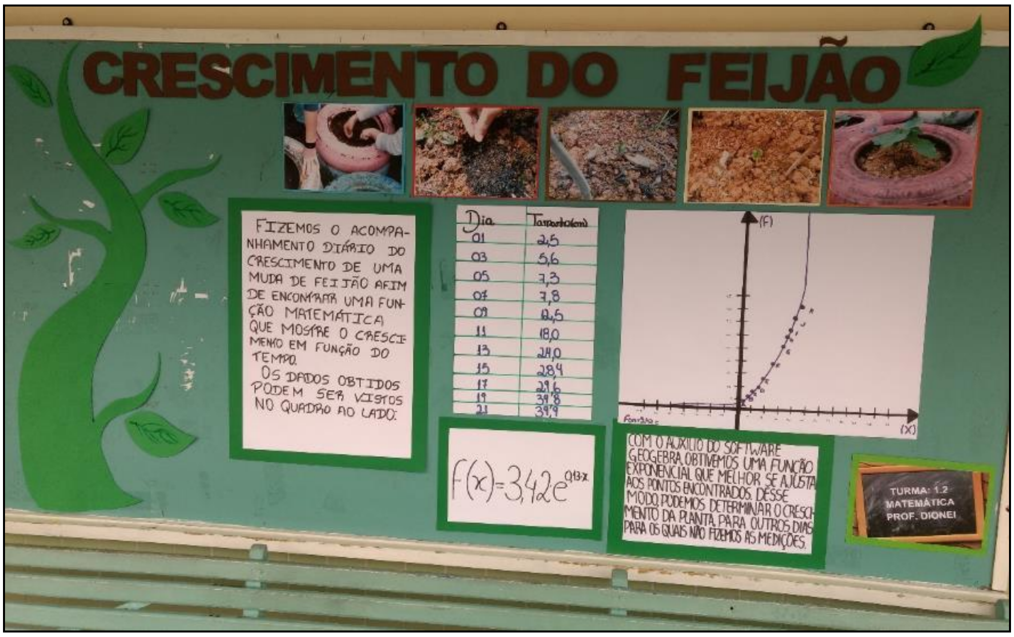


Figura 10 – Mural desenvolvido pelos estudantes para divulgação da atividade do crescimento do feijão
Fonte: Acervo do pesquisador.

Ao final, os estudantes também tiveram a oportunidade de apresentar esse trabalho na *I Feira Regional de Ciência e Tecnologia* desenvolvida pela Gerência Regional de Educação. A turma foi representada por dois estudantes que ficaram responsáveis por apresentar, a partir de um banner, todas as etapas realizadas e os resultados obtidos.

Esses processos de discussão e apresentação da solução obtida constituem uma etapa importante de valorização as ideias dos estudantes, propiciando um senso de competência matemática, de que eles podem dar sentido à matemática.

Conclusões ou Considerações Finais

A aplicação dessa atividade propiciou aos estudantes a oportunidade de utilizarem a matemática para a determinação de uma função que relacionasse o comprimento do pé de feijão com tempo, bem como permitiu também que tivessem uma posição investigativa diante do problema, a partir da abordagem utilizada pelo professor e dos questionamentos propostos na atividade.

Um ponto positivo percebido logo no início da atividade foi que os estudantes apresentaram um maior interesse em resolver o problema do que geralmente acontece com outras atividades que consiste apenas na resolução de situações ou exercícios. Uma possível razão para esse maior envolvimento foi que os estudantes ficaram responsáveis por toda a manipulação da situação, desde a obtenção dos dados, validação final da função encontrada até a discussão e exposição da solução. Essa abordagem vem ao encontro do que foi proposto por Ponte, Brocardo e Oliveira (2016) quando afirmam que atividades de natureza investigativa permitem ao estudante desenvolver o espírito da atividade matemática genuína, atuando verdadeiramente como matemático diante da situação. Além disso, a situação serviu para evidenciar a aplicabilidade das funções para outras áreas, exteriores a própria matemática, como a biologia, por exemplo.

Apesar de problemas e investigações apresentarem algumas diferenças quanto a sua implementação em sala de aula, é evidente que ambas possibilitam ao estudante a oportunidade de assumir um papel protagonista de sua própria aprendizagem propiciando um pensamento reflexivo sobre as ideias envolvidas, que conforme aponta Van de Walle (2009) acontece quando os estudantes estão ativamente procurando relações, analisando padrões, verificando a eficácia de seus métodos, justificando seus resultados ou até mesmo quando avaliam os raciocínios dos colegas. Contudo, essa abordagem investigativa só acontecerá se o professor oferecer a oportunidade de sua turma trabalhar dessa forma, o que resulta numa mudança de suas próprias práticas pedagógicas.

Referências

ALLEVATO, N.; VIEIRA, G. Do ensino através da resolução de problemas abertos às investigações matemáticas: possibilidades para a aprendizagem. **Quadrante**, Lisboa, v. 25, n. 1, p.113-131, 2016.

ANDRÉ, M. O que é um estudo de caso qualitativo em educação? **Revista da FAEEBA – Educação e Contemporaneidade**, Salvador, v. 22, n. 40, p.95-103, dez. 2013. Disponível em: <https://www.revistas.uneb.br/index.php/faeeba/article/view/753/526>. Acesso em: 26 fev. 2018.

BRANCO, M. G. P. **Tarefas de exploração e investigação no ensino e na aprendizagem da Geometria: Uma experiência com alunos do 10º ano de escolaridade.** 2011. 306 f. Dissertação (Mestrado em Ciências da Educação) - Universidade do Minho, Braga, 2011. Disponível em: <http://repositorium.sdum.uminho.pt/bitstream/1822/18600/1/Maria%20Gorete%20Pires%20Branco.pdf>. Acesso em: 05 jul. 2018.

BRAUMANN, C. A. Divagações sobre investigação matemática e o seu papel na aprendizagem da Matemática. In: PONTE, J. P. et al (Org.). **Actividades de investigação na aprendizagem da matemática e na formação dos professores.** Lisboa: Secção de Educação Matemática da Spce, 2002. p. 5-24. Disponível em: <http://spiem.pt/DOCS/ATAS_ENCONTROS/2002/2002_02_CABraumann.pdf>. Acesso em: 15 jul. 2018.

BROCARDO, J. **As investigações na aula de matemática:** Um projecto curricular no 8º ano. 2001. 621 f. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade de Lisboa, Lisboa, 2001. Disponível em: <http://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/3101/1/ulsd041324_Joana_Brocardo.pdf>. Acesso em: 10 jul. 2018.

BÚRIGO, E. Z. Matemática Moderna: progresso e democracia na visão de educadores brasileiros nos anos 60. In: **Teoria & Educação**. v.2. Porto Alegre: Pannonica, 1990.

DANTE, L. R. **Didática da Resolução de Problemas de Matemática**. 12. ed. São Paulo: Ática, 1999.

DINIZ, M. I. de S. V. Resolução de Problemas e Comunicação. In: SMOLE, K. C. S.; DINIZ, M. I. de S. V. (Org.). **Ler, escrever e resolver problemas:** Habilidades básicas para aprender matemática. Porto Alegre: Artmed Editora, 2001. p. 87-97.

ECHEVERRÍA, M. del P. P.; POZO, J. I. Aprender a Resolver Problemas e Resolver Problemas para Aprender. In: POZO, J. J. (Org.). **A solução de problemas:** Aprender a resolver, resolver para aprender. Porto Alegre: Artmed, 1998. p. 13-42.

FIGUEIREDO, F. F.; GROENWALD, C. L. O. Produzindo problemas abertos utilizando tecnologias digitais no processo de formação inicial de professores de matemática. **Rencima**: Revista de Ensino de Ciências e Matemática, São Paulo, v. 8, n. 2, p.95-114, dez. 2017. Disponível em: <http://revistapos.cruzeirodosul.edu.br/index.php/rencima/article/view/1220/885>. Acesso em: 28 jul. 2018.

HIEBERT, J. et al. **Making Sense:** Teaching and Learning Mathematics with Understanding. Portsmouth: Heinemann, 1997. 184 p.

LÉVY, P. **Cibercultura.** São Paulo: Editora 34, 1999. 264 p.

MOREIRA, M. A. O Professor-pesquisador como Instrumento de Melhoria do Ensino de Ciências. **Em Aberto**, Brasília, v. 7, n. 40, p.43-54, dez. 1988. Disponível em: < http://emaberto.inep.gov.br/index.php/emaberto/article/view/1722/1693 >. Acesso em: 26 jul. 2018.

NUNES, C. B. Resolução de problemas: uma proposta didática na formação de professores. **Rencima**: Revista de Ensino de Ciências e Matemática, São Paulo, v. 5, n. 2, p.1-17, 2014. Disponível em: <http://revistapos.cruzeirodosul.edu.br/index.php/rencima/article/view/849/719>. Acesso em: 02 ago. 2018.

ONUCHIC, L. de la R. Ensino-Aprendizagem de Matemática Através da Resolução de Problemas. In: BICUDO, Maria Aparecida Viggiani (Org.). **Pesquisa em Educação Matemática: Concepções e Perspectivas.** São Paulo: Editora Unesp, 1999. p. 199-218.

PONTE, J. P. da. Investigação sobre investigações matemáticas em Portugal. **Investigar em Educação**, Lisboa, v. 2, p.1-75, 2003. Disponível em: <http://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/4071/1/03-Ponte%20%28Rev-SPCE%29.pdf>. Acesso em: 10 jul. 2018.

PONTE, J. P. da; BROCARDO, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações matemáticas na sala de aula referencia.** 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2016.

SANTOS, L. L. C. P. Dilemas e Perspectivas na Relação entre Ensino e Pesquisa. In: ANDRÉ, Marli (Org.). **O Papel da Pesquisa na Formação e na Prática dos Professores.** 8. ed. Campinas: Papirus, 2001. p. 11-25.

VAN DE WALLE, J. A. **Matemática no Ensino Fundamental:** Formação de Professores e Aplicações em Sala de Aula. 6. ed. Porto Alegre: Artmed, 2009.

VILA, A.; CALLEJO, M. L. **Matemática para aprender a pensar:** O papel das crenças na resolução de problemas. Porto Alegre: Artmed, 2006. 212 p.