UM ESTUDO SOBRE AS *IMAGENS CONCEITUAIS* DE UNIVERSITÁRIOS RELATIVAS AO CONCEITO DE LIMITE DE FUNÇÃO

Maria Alice V. Feio Messias
alice.messias@gmail.com
João Cláudio Brandemberg
brand@ufpa.br

RESUMO

O objetivo deste trabalho foi apresentar os resultados de uma investigação acerca dos elementos que compõem a *Imagem Conceitual* de estudantes universitários relativos ao conceito de limite de função. Os sujeitos investigados, que cursavam o 3º e o 4º semestre de cursos de Licenciatura em Matemática em duas universidades públicas no estado do Pará (Brasil), responderam, individualmente, a um questionário contendo tarefas envolvendo aspectos conceituais de limite de função. As considerações de Tall e Vinner (1981) e Vinner (1991) sobre *Imagem Conceitual e Definição Conceitual* compuseram o quadro teórico deste trabalho que também buscou em outras pesquisas relacionadas à apreensão do conceito de limite de função, tais como Jordaan (2005), Juter (2006), Nair (2009), dentre outras, o suporte teórico necessário para o estudo realizado. Dentre os resultados obtidos na pesquisa, ressaltamos a dicotomia *estático/dinâmico* que permeia grande parte das dificuldades inerentes ao entendimento desse conceito e que se fez presente nos elementos que compõem a *Imagem Conceitual* dos sujeitos investigados em nossa pesquisa.

Palavras – chave: *Imagem Conceitual*, *Definição Conceitual*, Estudantes universitários, Limite de função, dicotomia *estático/dinâmico*.

ABSTRACT

The aim of this paper was to present the results of an investigation concerning to the elements that compose university students' *Concept Image* about the concept of limit of function. The subjects, who were enrolled in third and fourth semester of undergraduation in mathematics at two state universities in the Pará (Brazil), answered, individually, a questionnaire containing tasks involving conceptual aspects of limit of function. Considerations of Tall and Vinner (1981) and Vinner (1991) about *Concept Image* and *Concept definition* composed this paper's theoretical framework that also sought in other researches related to the apprehension of the limit of function's concept, such as Jordaan (2005), Juter (2006), Nair (2009), the theoretical support for this study. Among the results obtained in this research, we present the *static/dynamic* dichotomy that permeates great part of the difficulties inherent to this concept understanding and that was present in the elements that compose the subjects' *Concept Image* in this study.

Keywords: *Concept Image*, *Concept Definition*, University students, Limit of function, *static/dynamic* dichotomy.

Introdução

As dificuldades de aprendizagem em matemática se fazem presentes desde as séries iniciais e se estendem até o segmento superior de ensino. Neste último, percebemos que essas dificuldades se apresentam de maneira significativa em *Cálculo*, sobretudo no que se referem à apreensão dos conceitos envolvidos, tais como: função, limite, continuidade, derivada, integral, dentre outros. Em virtude de essas noções serem objeto de estudo de inúmeras áreas de conhecimento, verificamos – cada vez mais – o empenho de estudiosos em desenvolver pesquisas com o intuito de oportunizar/viabilizar uma melhor compreensão acerca dos entraves inerentes à aprendizagem desses tópicos.

Frente a essas constatações, direcionamos nossa pesquisa para o âmbito do *Cálculo* e optamos por investigar a problemática da apreensão do conceito de limite de função, dada sua importância para o entendimento de demais conceitos adjacentes. Para fundamentar nosso estudo, fez-se necessário o estabelecimento de um suporte teórico que nos auxiliasse no desenvolvimento de nossa pesquisa, cujo foco principal consistiu em investigar – mediante os instrumentos de coleta de dados – os elementos que compõem a *Imagem Conceitual* (TALL; VINNER, 1981; VINNER, 1991) de estudantes universitários acerca do conceito de limite de função. Nesse aspecto, evidenciamos que grande parte das dificuldades atreladas à aprendizagem de limite de função está voltada para a sua apreensão conceitual. Isso porque para muitos estudantes:

> (...) calcular o limite de uma função num ponto a, nos casos mais “interessantes”, resumir-se-á em descobrir uma maneira de “substituir o a em $f(x)$” sem que tal procedimento implique na emergência de irritantes quocientes com denominador nulo. Em outras palavras, a ideia de aplicar truques adequados de manipulação algébrica que permitirão “eliminar” tais inconveniências. A questão da existência do limite, ou mesmo do que ele significa, ficarão ainda nebulosas (...) (OLIMPIO, 2007, p. 44).

Percebemos ainda que os entraves relativos à apreensão do conceito de limite estão ligados, principalmente, à dificuldade em correlacionar as noções intuitiva e formal desse conceito (ZUCHI, 2005). Concordamos, nesse sentido, com Rodriguez (2009), cuja percepção contempla a ideia de que:

> O docente explica que uma função f tem limite L quando x tende a a se a distância entre as imagens da função e L pode ser arbitrariamente pequena, sendo os valores de x muito próximos de a Depois que se comunica oralmente esta frase, relativamente compreensível, escreve-se a definição com épsilon e delta (...) e poucos são os indivíduos que complementam o que fora escrito no quadro com as explicações dadas. (p. 97, tradução nossa)

Diante dessas considerações, voltamos nossa investigação para a questão da aprendizagem conceitual de limite de função e foi nesse âmbito que a teoria sobre *Imagem Conceitual* e *Definição Conceitual* (TALL; VINNER, 1981; VINNER, 1991) foi estabelecida como referencial teórico central de nossa pesquisa, cuja coleta de dados foi realizada mediante a aplicação de um questionário contendo questões sobre aspectos conceituais de limite de função para estudantes universitários do curso de licenciatura em matemática de duas universidades públicas no estado do Pará (Brasil).

Demais considerações acerca do referencial teórico, metodologia, instrumento de coleta de dados e resultados obtidos em nossa pesquisa encontram-se melhor explicitados nos tópicos subsequentes deste trabalho.

Pesquisa à luz do referencial teórico

O desenvolvimento dessa pesquisa encontra-se atrelado às noções de *Imagem Conceitual* e *Definição Conceitual* (TALL; VINNER, 1981; VINNER, 1991), sendo ambas fundamentais para o delineamento do estudo realizado. Atribuímos à *Imagem Conceitual* as associações não verbais efetivadas em nossa mente quando em contato com o nome de determinado conceito. Estão incluídas, nesse sentido, suas representações visuais, figuras mentais, impressões e experiências que podem ser traduzidas em formas verbais mediante essas associações (VINNER, 1991). Dessa maneira,

> Devemos utilizar o termo *imagem conceitual* para descrever a estrutura cognitiva total associada ao conceito, o que inclui todas as figuras mentais e propriedades e processos associados. É construída no decorrer dos anos por meio de experiências de todos os tipos, mudando sempre que o indivíduo encontra novos estímulos e maturidade (TALL; VINNER, 1981, p. 152, tradução nossa).

Evidenciamos, mediante a citação acima, que as experiências vivenciadas pelo indivíduo são de extrema importância para a formação de sua *Imagem Conceitual* sobre determinado conceito. Sobre essa noção, Juter (2006) aponta que:

> (...) abrange todas as representações de experiências ligadas a um conceito, no qual pode haver diversos conjuntos de representações construídas em contextos diferentes que possivelmente se fundem quando o indivíduo se torna mais matematicamente maduro (p. 17, tradução nossa).

Em virtude da *imagem conceitual* de um conceito também ser construída a partir de experiências vividas pelo indivíduo, ela não é necessariamente coerente, podendo conter propriedades e/ou interpretações contraditórias. Ainda assim, a formação de uma *imagem conceitual* – por meio do exercício de múltiplas representações de um conceito – permitirá que o sujeito recupere suas impressões e experiências relacionadas a esse conceito e, quem sabe, garanta sua contextualização (BRANDEMBERG, 2010). Por conseguinte, assumimos que:

> (...) adquirir um conceito significa formar uma imagem conceitual para ele. Saber de cor uma definição de um conceito não garante seu entendimento. Entender, assim supomos, significa apresentar uma imagem conceitual. Determinado significado deve estar associado às palavras (VINNER, 1991, p. 69, tradução nossa).

A expressão *imagem conceitual evocada* é utilizada para designar a parte da *imagem conceitual* que é ativada em um momento particular. Dependendo da situação, inúmeras imagens aparentemente em conflito poderão ser evocadas.

No que concerne à *definição conceitual* – que consiste nas definições, memorizadas ou auto–construídas, dos indivíduos sobre um conceito – Tall e Vinner (1981) atribuem a essa noção toda forma em palavras utilizada para especificar um conceito. Sempre que a definição de um conceito é dada ou construída pelo indivíduo, esta sofrerá variações de tempo em tempo. Nesse aspecto, uma *definição conceitual pessoal* poderá diferir de uma *definição conceitual formal*. Cornu (1983) explicita de maneira coerente em que consiste a noção de *definição conceitual*:

> (...) consiste nas frases apreendidas mecanicamente, mais ou menos ligadas ao conceito; pode ser uma reconstrução, uma reformulação pessoal de uma definição matemática; é também o conjunto de palavras que empregamos para explicar o conceito. Essa fraseologia é própria ao indivíduo: ela não coincide sempre com a definição formal do conceito, ou seja, com a definição comumente admitida pela comunidade matemática (p. 66, tradução nossa).

Atrelamos às considerações de Tall e Vinner (1981) e Vinner (1991), a revisão de literatura que consistiu em levantar pesquisas que contemplassem a problemática da apreensão do conceito de limite de função, de maneira a nos auxiliar na delimitação de nossos objetivos para a pesquisa.

Revisão de Literatura

O estudo realizado por Tall e Vinner (1981) objetivou levantar aspectos concernentes à *Imagem Conceitual* de estudantes acerca de três noções: limite de uma sequência $\lim_{n\to\infty} S_n$, limite de uma função $\lim_{x\to a} f(x)$ e continuidade de uma função $f: D \to IR$. No que concerne ao conceito de limite de sequência, os autores propuseram aos estudantes do primeiro ano do curso de matemática um questionário, no qual deveriam, dentre outras situações, escrever uma definição para limites (caso soubessem de alguma), calcular o limite de algumas sequências, dentre elas, $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{9}{10}+\frac{9}{100}+\cdots+\frac{9}{10^n}\right)$, além de responder e justificar se $0.9999\ldots$ era igual ou menor que 1 . Em seus resultados, evidenciaram que a maioria dos sujeitos investigados respondeu que $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{9}{10}+\frac{9}{100}+\cdots+\frac{9}{10^n}\right)=2$, entretanto, afirmaram que $0.9999\ldots<1$, ao justificar que $0.9999\ldots<1$, os sujeitos investigados afirmaram "É apenas menor que um, pois a diferença entre ele e um é infinitamente pequena" (p. 157), os estudantes apresentavam em sua imagem conceitual a ideia de que $S_n \to S$ implica que S_n se aproxima de S , mas nunca o alcança de fato. Essa situação pode ser evidenciada na seguinte justificativa: "$S_n \to S$ significa que S_n chega perto de S quando n se torna maior, mas não alcança S até o infinito" (p. 158);

Tall e Vinner (1981) evidenciaram que os estudantes apresentam dificuldades com o uso dos quantificadores "todo" e "alguns" e com o entendimento das definições de limite e continuidade. Em se tratando do conceito de limite de função, os autores destacam:

> (...) assim como o limite de sequência, o limite de uma função é normalmente considerado um processo dinâmico, em que x se aproxima de a , provocando a aproximação de $f(x)$ em relação à c . Novamente os estudantes consideram $f(x) \neq c$ como parte da imagem conceitual (TALL; VINNER, 1981, p. 159, tradução nossa).

Em um questionário aplicado para estudantes do primeiro ano do curso de matemática, os autores solicitaram que os indivíduos explicassem o que significava a expressão $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}=3$ e escrevessem uma definição para $\lim_{x\to a} f(x)=c$, caso soubessem. Dentre as observações de Tall e Vinner (1981) sobre os resultados obtidos, destacamos que a maioria dos sujeitos investigados apresentou uma noção dinâmica sobre a definição de limite, por exemplo, "o valor que $f(x)$ se aproxima quando os valores de x chegam perto de a é c" (p. 160).

Além disso, os autores evidenciaram que a utilização de expressões como "se aproxima", "chega perto", "tende a" levam a ideia de que $f(x) \neq c$, sendo esse um fator de conflito potencial. Tall e Vinner (1981) concluem que:

> (...) a dificuldade em formar uma *imagem conceitual* apropriada e os efeitos coercivos de uma *imagem conceitual* inapropriada que apresenta conflitos em potencial, podem atingir seriamente o desenvolvimento de uma teoria formal na mente do indivíduo (p.167, tradução nossa).

O intuito da pesquisa realizado por Sierpinska (1985) foi verificar os obstáculos epistemológicos relativos à noção de limite, pois segundo a autora:

> (...) ao voltar-se para a manifestação de um comportamento determinado tanto na história quanto nos alunos de hoje, o sujeito se motiva em ver uma característica específica do desenvolvimento de determinado conceito e não somente delimita as condições de ensino, por exemplo, seus meios e métodos (p. 8, tradução nossa).

Para alcançar o objetivo traçado, a autora dividiu a pesquisa em duas etapas, sendo que na primeira voltou-se para a identificação da tangente como limite de uma secante variável e na segunda, propôs um problema que consiste em encontrar a equação da tangente na curva $y = \sin x$ no ponto $x = 0$; duas duplas participaram da investigação, sendo disponibilizada uma calculadora científica na 2ª etapa do estudo.

Mediante o estudo sobre o desenvolvimento histórico da noção de limite e a análise da experimentação realizada, a autora propôs uma lista de obstáculos relativos à noção de limite, dentre eles, destacamos:

- Horror ao infinito:

Fazem parte desse grupo os obstáculos do tipo algébrico que reside na dificuldade em transferir automaticamente os métodos da álgebra relacionados à manipulação de grandezas finitas e infinitas, bem como em transferir as propriedades dos termos de uma sequência convergente. Inclui-se também a associação da passagem do limite a um movimento físico, uma aproximação, enquanto a teoria formal estabelece a noção de limite de maneira estática;

- Recusa do status de operação matemática ao limite:

Inclui-se nesse grupo o obstáculo físico em que "A questão de saber se uma grandeza variável alcança ou não seu limite é um sintoma desse obstáculo, de uma interpretação literal de expressões ditas dinâmicas empregadas em relação à noção de limite. Do ponto de vista da definição de Weierstrass, por exemplo, não há senso nessa questão" (p. 48, tradução nossa).

- Obstáculos ligados ao conceito de função:

Incluem-se nesse obstáculo dois aspectos: a atenção exclusiva à vizinhança da relação da função e a não distinção entre as noções de limite e de função limitada (Existência de Ínfimo e Supremo);

- Obstáculo do símbolo

A autora observou que os estudantes evitavam a utilização de uma notação específica para resolver o que lhes fora proposto. Sierpinska (1985) aponta para a realização de outras pesquisas relacionada ao ensino e aprendizagem de análise e no que concerne à noção de limite aponta que "(...) uma das características do ensino clássico de limite é uma introdução rápida de teoremas relativamente com o objetivo de permitir o cálculo de limites mediante manipulações algébricas. Obtém-se, em geral, uma certa satisfação ao ensino, sem que seja assegurado a compreensão da funcionalidade dessa noção" (p. 13, tradução nossa).

Cottrill *et al* (1996) desenvolveram um estudo – baseado na teoria APOS[1] (*Action Process Object Schema)* de Dubinsky *et al* (1993) – cujo objetivo foi por em prática suas perspectivas teóricas, conhecimento matemático e análises acerca da aprendizagem de estudantes universitários no que concerne à noção de limite. Os dados obtidos na pesquisa foram coletados a partir da observação e das entrevistas realizadas com os estudantes que faziam parte de um curso experimental de cálculo, tendo como estratégia pedagógica a combinação de atividades computacionais, tarefas no ambiente lápis e papel e exercícios. As atividades propostas no decorrer da pesquisa se basearam

[1]Baseada na teoria de Piaget; caracteriza a formação de determinado conceito matemático mediante um estágio em que é considerado um processo para outro, no qual passa a adquirir o status de objeto por meio de quatro estágios: Ação, Processo, Objeto e Esquema.

em investigações computacionais de aproximação, investigações gráficas do conceito de limite, construções computacionais da aproximação de um valor ao limite, construções computacionais do conceito de limite e investigações com ε, δ . Dentre os dados obtidos na pesquisa, Cottrill *et al* (id.) destacam que para alguns estudantes o limite de uma função f em um ponto a é uma noção estática que não difere do valor da função f no ponto a , ou seja, $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

No que concerne à ideia de limites, alguns dos sujeitos investigados por Cottril *et al* (1996) apresentaram uma visão estática, na qual estabeleciam uma investigação da função em um único ponto e não em um grupo de valores. Além disso, alguns estudantes pensavam em limite como sendo uma aproximação dinâmica de x , entretanto, ao defini-lo atribuíam a noção de uma aproximação da função f de um único valor de x próximo de a ;

Em sua pesquisa, Jordaan (2005) identificou os erros conceituais apresentados por estudantes de engenharia elétrica da *Tshwane University of Technology* (África do Sul) sobre o conceito de limite de função, buscando – mediante o estudo desenvolvido – verificar como os sujeitos investigados entendiam a noção de limite, que tipo de erros eles apresentavam nesse aspecto e como eles relacionavam continuidade e descontinuidade de uma função em um ponto com a existência do limite naquele ponto. Sua pesquisa foi dividida em duas etapas, a saber:

1ª etapa: Aplicação de um questionário para 42 sujeitos, cujo foco era somente o conceito de limite. Ou seja, aspectos concernentes às manipulações algébricas utilizadas para calcular limites não foram considerados. Os objetivos estabelecidos para essa etapa foram os seguintes: determinar o entendimento dos estudantes sobre limites, continuidade e descontinuidade de função em um ponto, descobrir como os estudantes entendem a (não) existência do limite em um ponto de continuidade/descontinuidade e determinar como os estudantes lidam com um gráfico de função que apresenta descontinuidade em um ponto.

2ª etapa: Realização de uma entrevista com seis sujeitos investigados na primeira etapa da pesquisa. Os objetivos estabelecidos para essa etapa são semelhantes àqueles da primeira etapa, a saber: Avaliar a compreensão gráfica e simbólica sobre limites, determinar o entendimento dos estudantes sobre continuidade/descontinuidade de uma função em determinado ponto e como o mesmo influencia na compreensão sobre a (não) existência do limite neste ponto.

Mediante os resultados obtidos em sua pesquisa, a autora enunciou as seguintes observações (JORDAAN, 2005):

Quanto à natureza do conceito de limite:

- Os estudantes veem limite como sendo uma fronteira;
- Os estudantes veem limite como sendo inalcançável;
- Os estudantes veem limite como sendo uma aproximação;
- Os estudantes tem a impressão de que a função sempre apresentará limite em determinado ponto;
- Os estudantes visualizam limite como um processo dinâmico e não como um objeto estático.

Quanto à relação entre continuidade de funções e limites:

- Os estudantes acreditam que a função deve necessariamente estar definida em um ponto para que a mesma apresente limite naquele ponto. Uma função que não esteja definida em um ponto não apresenta limite;
- Os estudantes ponderam que quando uma função tem um limite, então deve ser contínua naquele ponto;

Outras considerações:

- Os estudantes acreditam que o limite é igual ao valor da função no ponto. Ou seja, $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Em seu trabalho, Juter (2006) apresentou a sinopse de uma pesquisa realizada com estudantes universitários na Suécia sobre o desenvolvimento conceitual de limite de função. Mediante a investigação realizada, a autora objetivou identificar como as percepções dos sujeitos investigados sobre limites se desenvolvem, se essas percepções podem estar relacionadas ao desenvolvimento histórico desse conceito, como os estudantes resolvem tarefas envolvendo limites, bem como evidenciar qual a relação entre as atitudes dos sujeitos investigados e seus respectivos desempenhos em atividades envolvendo limite de função. Para isso, a pesquisa foi constituída por dois estudos, conforme a seguir:

1º estudo: Participaram do estudo 43 estudantes universitários. Os sujeitos investigados preencheram três questionários, cujos principais objetivos foram:

- Obter informações sobre a educação prévia dos estudantes, suas atitudes e conhecimento sobre limites;
- Verificar como os estudantes interpretavam suas situações de aprendizagem;
- Verificar o quanto os estudantes poderiam explicar os cálculos efetuados, bem como o quanto separavam *funções* de *limite de funções* em suas imagens conceituais;
- Verificar se os sujeitos investigados poderiam explicar seus conhecimentos sobre limites em situações não–tradicionais.

2º estudo: Participaram do estudo 112 estudantes universitários. Os sujeitos investigados preencheram três questionários. Em seguida, foram selecionados 34 estudantes para participarem de duas entrevistas. O objetivo desse estudo foi descrever e analisar mais profundamente as situações de aprendizagens dos participantes da pesquisa.

Mediante os estudos realizados, a autora obteve resultados que a permitiu concluir que os estudantes conseguiram – em sua maioria – solucionar tarefas rotineiras, mas apresentaram dificuldades em solucionar tarefas não rotineiras; os sujeitos investigados apresentaram dificuldades em entender características específicas da noção de limite, tais como decidir se a função pode alcançar o valor do limite e/ou determinar o que os componentes da definição representam; os estudantes apresentaram dificuldade em calcular limites, como por exemplo, o $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$; os estudantes apresentaram confusões entre *limite de função* e valor da função no ponto; os sujeitos da pesquisa não conseguiram estabelecer/entender o significado dos quantificadores envolvidos na definição de limite; as *imagens conceituais* dos indivíduos acerca do conceito de limite se mostraram incoerentes com sua definição;

Por fim, Juter (2006) observou que a definição formal de limite de função não foi integrada às imagens conceituais dos estudantes e, portanto, não estava disponível como ferramenta durante a realização das tarefas matemáticas. Além disso, "muitas desconexões no desenvolvimento da aprendizagem foram detectadas no estudo, por exemplo, entre as percepções intuitiva e formal, procedimental e estática, finita e infinita (...)" (JUTER, 2006, p. 38, tradução nossa).

Nair (2009) realizou uma investigação acerca da *imagem conceitual* de estudantes de Cálculo relativas aos conceitos de função racional, assíntotas, limites e continuidade e as possíveis conexões entre esses conceitos. Dentre seus objetivos com a pesquisa, a autora almejou verificar que conexões entre os conceitos de assíntotas, continuidade e limite de funções racionais os sujeitos investigados apresentavam, bem como os efeitos do experimento de ensino realizado no decorrer da pesquisa na compreensão desses conceitos. A pesquisa constituiu-se de uma entrevista, realizada com 19 estudantes, um experimento de ensino conduzido pela autora e uma segunda entrevista, sendo essas etapas realizadas com sete estudantes. As intenções de Nair (2009) com as entrevistas foram, dentre outras, verificar que noção os sujeitos investigados apresentavam sobre limites, continuidade e assíntotas, bem como que conexões (caso existissem) os estudantes estabeleciam entre essas noções. Mediante as *imagens conceituais* identificadas nas entrevistas, a autora desenvolveu os planos de aula que foram usados nos episódios de ensino, cujo foco foi verificar *como* os esquemas conceituais dos estudantes mudavam no decorrer de interações matemáticas entre os estudantes e/ou a pesquisadora.

Dentre os resultados obtidos, Nair (2009) observou dificuldades relacionadas à utilização da terminologia correta, interpretação de limites a partir do gráfico da função, cálculo de limites e a relação entre limites com o comportamento de assíntotas de funções. Nesse aspecto a autora evidenciou que os sujeitos investigados acreditavam que o limite não existe em determinado ponto se a função não for contínua naquele ponto, ou seja, para que o limite exista, $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$. Além disso, observou dificuldades relacionadas ao cálculo de limites infinitos e limites no infinito, à indeterminações (associadas à não existência do limite), ao conceito de limite de função, sendo esse último, proveniente dos estudantes "simplesmente focarem no *processo*, o processo de encontrar limites utilizando procedimentos de substituição direta e simplificação (...)" (NAIR, 2009, p.114, tradução nossa);

Delineando a pesquisa

O presente estudo foi desenvolvido visando responder ao seguinte questionamento:

- Quais elementos compõem a *Imagem Conceitual* de estudantes universitários do curso de licenciatura em matemática acerca do conceito de limite de função?

Para responder a questão norteadora de nossa pesquisa, foram levantadas as seguintes hipóteses:

[H1] Existem dificuldades de apreensão do conceito de limite de função;

[H2] As *Imagens Conceituais Evocadas* por estudantes acerca do conceito de limite de função não são coerentemente relacionadas com a sua definição conceitual, levando os sujeitos a apresentarem uma *definição conceitual pessoal* diferente da *definição conceitual formal*;

A partir da definição da questão norteadora da pesquisa, bem como da delimitação das hipóteses, estabelecemos como objetivo investigar os elementos que compõem a *Imagem Conceitual* (TALL; VINNER, 1981; VINNER, 1991) de estudantes universitários do curso de licenciatura em matemática – inferidos mediante a evocação de aspectos relacionados ao conceito de limite de função – durante a resolução de tarefas que envolvam tal conceito.

O estudo realizado foi constituído de duas etapas. Na primeira etapa, 25 estudantes do curso de licenciatura em matemática – que já haviam cursado a disciplina *Cálculo I* – de duas universidades públicas do estado do Pará responderam, individualmente e por escrito, a um questionário que continha tarefas envolvendo o conceito de limite de função. A segunda etapa consistiu na realização de entrevistas individuais com alguns dos sujeitos investigados na primeira etapa da pesquisa. Nosso intuito com essas duas fases de investigação foi verificar e analisar mais profundamente as *Imagens Conceituais Evocadas* pelos estudantes ao resolverem tarefas cognitivas sobre o objeto de estudo em questão. O presente artigo contempla a análise dos resultados da 1ª etapa de nossa investigação.

O instrumento de coleta de dados na 1ª etapa

O questionário proposto aos estudantes na primeira etapa da pesquisa continha sete questões relacionadas ao conceito de limite de função. Apresentamos neste trabalho os resultados concernentes às questões 1, 2, 5 e 7 do questionário, em virtude dessas questões nos permitirem, de imediato, as evocações dos sujeitos investigados quanto ao conceito de limite de função, bem como sua relação com a percepção *estático/dinâmico* e a noção de (des)continuidade de funções. Os objetivos de cada uma dessas questões encontram-se a seguir:

1ª questão. O número $1,999999\ldots$ é menor ou igual a 2? Justifique sua resposta.

A dualidade *estático/dinâmico* permeia todo o processo de compreensão do conceito de limite e encontra-se presente, sobretudo, na dificuldade dos estudantes em afirmar se uma função pode alcançar o valor do limite (*noção de estático)* ou se o mesmo jamais pode ser alcançado, independente da constante aproximação em relação ao valor do limite (*noção de dinâmico)*.

Objetivamos, portanto, com a primeira questão verificar se as *Imagens Conceituais* dos sujeitos investigados evocariam uma noção dinâmica do número apresentado, ou seja, $1,999999\ldots < 2$ ou estática, em que $1,999999\ldots = 2$. Essa questão foi baseada na investigação realizada por Tall e Vinner (1981). Nessa pesquisa, os autores solicitaram que os estudantes calculassem $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{9}{10}+\frac{9}{100}+\cdots+\frac{9}{10^n}\right)$, bem como respondessem se $0,999999\ldots < 1$ ou $0,999999\ldots = 1$, justificando a resposta.

Tall e Vinner (1981) observaram que diferentes partes das *Imagens Conceituais* do conceito de limite foram *evocadas*. Isso porque, para a maioria dos estudantes, o $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{9}{10}+\frac{9}{100}+\cdots+\frac{9}{10^n}\right)=2$, em contrapartida, $0,999999\ldots < 1$, haja vista que, segundo alguns dos sujeitos investigados, *"(...) a diferença entre esse número e 1 é infinitamente pequena"* ou *"(...) até no infinito o número, apesar de estar perto de 1, ainda assim não é tecnicamente 1"* (TALL; VINNER, 1981, p. 158, tradução nossa).

Acreditamos que os resultados obtidos em nossa investigação seriam semelhantes aos de Tall e Vinner (1981), pois a situação exemplificada anteriormente pode ser estendida às dificuldades inerentes ao processo de apreensão do conceito de limite de função, em virtude dos conflitos acerca da possibilidade da função alcançar ou não o valor do limite também fazer parte da realidade de muitos sujeitos.

A fim de complementar nossas observações acerca das *Imagens Conceituais evocadas* pelos indivíduos de nossa pesquisa, propusemos a 2ª questão do questionário, conforme a seguir.

2ª Questão. Calcule $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x}$ e explique o que isso significa.

O objetivo da 2ª questão é verificar – mediante as justificativas dos sujeitos investigados – as associações efetivadas em suas *Imagens Conceituais* relacionadas ao conceito de limite de função. Nossa expectativa, nesse sentido, reside nas concepções apresentadas pelos estudantes sobre o fato da função alcançar ou não o valor do limite.

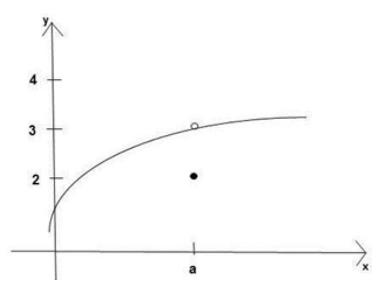
Baseamo-nos em resultados obtidos em pesquisas anteriores para elaborar essa questão, pois acreditamos que essa dualidade entre as noções estático/dinâmico do conceito de limite são *fatores conflitantes em potencial* (VINNER, 1991). Supomos, nesse sentido, que:

- Os estudantes atribuem à definição de limite uma noção de dinamismo que reside na percepção de que "o valor que $f(x)$ se aproxima quando os valores de x chegam perto de a é c " (TALL; VINNER, 1981, p. 160, tradução nossa);
- *"O limite é alcançado?"*. Tal questionamento caracteriza um obstáculo epistemológico presente no processo de apreensão do conceito de limite (CORNU, 1983);

- Muitos estudantes apresentam dificuldades em entender características específicas da noção de limite, tais como decidir se a função pode alcançar o valor do limite (JUTER, 2006);
- Os estudantes visualizam limite como um processo dinâmico e não como um objeto estático (TALL&VINNER, 1981; JORDAAN, 2005).

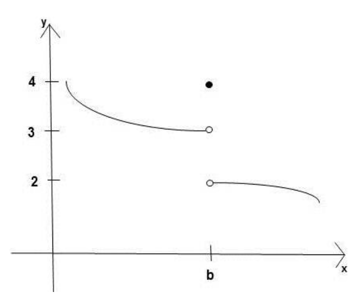
Além disso, optamos pela função $f(x) = \frac{1}{x}$, na tentativa de verificar se os estudantes responderiam que $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$ e afirmariam na primeira questão que $1{,}999999\ldots < 2$, levando-nos à interpretação de que diferentes partes das *Imagens Conceituais* do conceito de limite foram *evocadas* ao resolverem essas questões. Isso porque evoca o ponto de vista dinâmico (em que existe uma constante aproximação a determinado ponto, sem no entanto, alcançá-lo), bem como o ponto de vista estático (em que determinado ponto é, de fato, alcançado). Essas concepções são semelhantes àquelas elucidadas por Tall e Vinner (1981), conforme mencionamos anteriormente.

5ª Questão. Observe os gráficos abaixo e responda:



a.1) O limite dessa função existe?

a.2) Justifique sua resposta



b.1) O limite dessa função existe?

b.2) Justifique sua resposta

A elaboração dessa questão norteou-se, sobretudo, nas considerações de Juter (2006) sobre as *Imagens Conceituais Evocadas* de estudantes em relação ao comportamento da função próximo e no próprio valor do limite. Objetivamos, nesse sentido, verificar como os estudantes interpretariam a (não) existência do limite em funções descontínuas, bem como a importância de relacionar os limites laterais, a fim de observar a unicidade do limite. Para a resolução dessa questão, destacamos para os alunos que gostaríamos que eles verificassem se $\lim_{x \to a} f(x)$ e $\lim_{x \to b} f(x)$ existiam, já que no questionário não havia essa informação. Acreditamos que, assim como elucidado em pesquisas anteriores, nossos resultados estariam voltados para alguns aspectos, tais como:

- A existência do limite de uma função f em um ponto a está, necessariamente, atrelada ao valor da função no ponto. Ou seja, os estudantes observam que obrigatoriamente $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ (COTTRILL *et al, 1996)*;
- Calcular o limite de uma função significa apenas realizar uma investigação à direita e à esquerda de um ponto qualquer (BARTO, 2004);
- Uma função que não esteja definida em um ponto não apresenta limite quando a função tende àquele ponto (JORDAAN, 2005);
- O $\lim_{x \to a} f(x)$ deve ser necessariamente igual a $f(a)$. Caso contrário, o limite não existirá (NAIR, 2009). Ou seja, semelhante às considerações de Leibniz no séc. XVII é comum que os sujeitos acreditem que a existência do limite depende da continuidade da função no ponto e não o contrário;

7ª Questão. Escreva uma definição para $\lim_{x \to a} f(x) = c$.

Finalmente, solicitamos que os estudantes escrevessem uma definição para limite de função. Objetivamos identificar elementos que compõem a *Imagem Conceitual* dos sujeitos investigados em nossa pesquisa, bem como sua *Definição Conceitual Pessoal* sobre limite de função e relação desta com a *Definição Conceitual Formal*.

Essa questão foi baseada, sobretudo, nos estudos realizados por Tall e Vinner (1981), mas também nas considerações de Cornu (1981), Sierpinska (1985), Cottrill *et* al (1993), Zuchi (2005), Jordaan (2005), Juter (2006), Nair (2009) que foram unânimes em destacar que as *Imagens Conceituais* dos estudantes no que se refere ao conceito de limite permeiam a ideia de aproximação, dinamismo, na qual a função jamais poderá alcançar seu limite.

Em virtude das questões anteriores despertarem nos estudantes diferentes possibilidades de evocações quanto ao conceito de limite de função, acreditamos os mesmos estabeleceriam comparações com suas *Imagens Conceituais* que, por sua vez, seriam mais claramente explicitadas no momento em que os sujeitos apresentassem uma *Definição Conceitual Pessoal p*ara limite de função e, mesmo se os estudantes escrevessem na íntegra a *Definição Conceitual Formal* de limite de função, suas *Imagens Conceituais Evocadas* nas questões anteriores nos permitiria verificar seu entendimento acerca da definição.

Análise dos resultados: Um diálogo com o referencial teórico

A análise dos resultados obtidos na primeira etapa de nossa pesquisa foi realizada mediante a observação das anotações dos 25 sujeitos investigados. Foi nossa intenção realizar um levantamento acerca das *Imagens Conceituais Evocadas* pelos estudantes ao resolverem tarefas cognitivas relacionadas ao conceito de limite de função.

No que concerne à primeira questão, evidenciamos que a maioria dos sujeitos investigados apresentou uma noção dinâmica acerca do número $1{,}999999\ldots$, ou seja, para grande parte dos estudantes, por mais próximo que $1{,}999999\ldots$ esteja de 2, jamais o alcançará. Nesse sentido, nossos resultados encontram-se em conformidade com aqueles obtidos por Tall e Vinner (1981). As respostas dos sujeitos investigados em nosso estudo são, inclusive, semelhantes àquelas elucidadas por Tall e Vinner (id.), conforme evidenciamos nas respostas do sujeito S13 de nossa investigação e de um dos sujeitos investigados por esses autores:

- *"(...) até no infinito o número, apesar de estar perto de 1, ainda assim não é tecnicamente 1"* (TALL; VINNER, 1981, p. 158, tradução nossa).

- *“É menor porque após* $1{,}9999\ldots$ *existem infinitos até que se chegue em 2”* (resposta do sujeito S13).

Verificamos, junto às respostas dos estudantes, que a noção dinâmica que permeou suas *Imagens Conceituais* está voltada para a ideia de *tender para* um determinado valor sem, entretanto, alcançá-lo, conforme destacamos na resposta do sujeito S11:

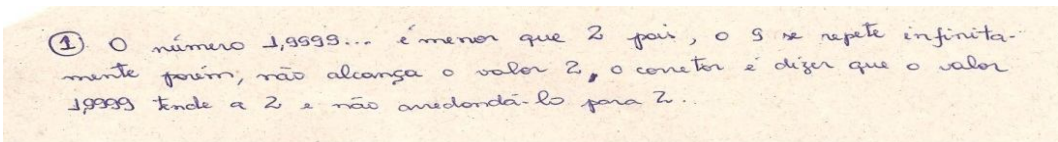


Figura 1: Resposta de S11 à questão 1.

A resposta do sujeito S14, apresentada a seguir, exemplifica claramente que o dinamismo presente nas *Imagens Conceituais Evocadas* pelos estudantes pode ser estendido, inconscientemente, ao processo de apreensão do conceito de limite de função e, mas especificadamente, aos conflitos acerca da possibilidade da função alcançar ou não o valor do limite, fato que leva os estudantes a cometerem erros conceituais, tais como o do sujeito S14 que evocou o gráfico de uma função identidade $f(x) = x$ para justificar sua resposta ($1{,}999999\ldots < 2$). Sendo que, ao afirmar que “$1{,}999999\ldots$ *pode se aproximar o máximo possível do ponto* 2 *, mas nunca poderá tocá-lo”*, o estudante, além de claramente apresentar confusões conceituais na tentativa de se explicar, desconsiderou o domínio da função que ele mesmo mobilizou.

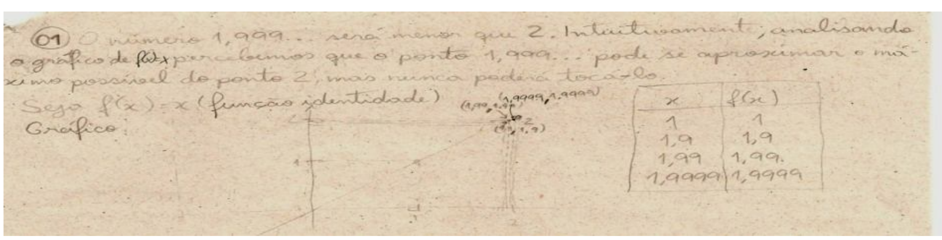


Figura 2: Resposta de S14 à questão 1.

Observamos na resposta do sujeito S18 (“*igual a 2, pois o número* $1{,}999999\ldots$ *tem uma diferença insignificante para com o número 2*”) a ideia de aproximação entre as duas quantidades de maneira que a diferença entre ambas seja tão pequena ou infinitamente pequena que poderá ser desconsiderada. Nesse sentido, podemos atrelar a justificativa do sujeito S18 à ideia de limite levantada por Newton, na qual *“<u>Quantidades</u>, e razões de quantidade, os quais em qualquer tempo finito convergem* *continuamente à igualdade, e antes do fim daquele tempo* *__se aproximam cada vez mais uma da outra__* *que, finalmente,* *__se tornam iguais__*” (BOYER, 1959, p. 197, tradução nossa, grifo nosso).

As respostas dos sujeitos S02 e S20 diferiram de todas as outras obtidas na 1ª questão. Esses estudantes apresentaram claramente a noção estática acerca do número $1{,}999999\ldots$.,, ou seja, $1{,}999999\ldots = 2$. Acreditamos que essa interpretação poderá ser estendida às imagens conceituais desses dois sujeitos no que concerne ao conceito de limite de função.

Ao contrário de Tall e Vinner (1981), observamos ainda em nossa pesquisa que dois sujeitos afirmaram que $1{,}999999\ldots$ é tanto menor quanto igual a 2. Nesse caso, a justificativa do sujeito S05, destacado a seguir, evoca a dicotomia *estático/dinâmico* por meio da ideia de *proceito* (TALL; GRAY, 1993), na qual ele assume tanto um processo dinâmico de aproximação entre $1{,}999999\ldots$ e 2 (*processo)* quanto a presença de uma noção estática, na qual $1{,}999999\ldots = 2$ (*conceito)*.

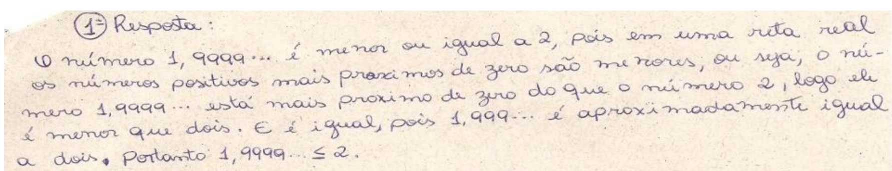

1ª Resposta:
O número 1,9999... é menor ou igual a 2, pois em uma reta real
os números positivos mais próximos de zero são menores, ou seja, o nú-
mero 1,9999... está mais próximo de zero do que o número 2, logo ele
é menor que dois. E é igual, pois 1,999... é aproximadamente igual
a dois. Portanto 1,9999... ≤ 2.

Figura 3: Resposta de S11 à questão 1.

Em se tratando dos resultados obtidos na 2ª questão do instrumento de coleta de dados, identificamos de imediato, dificuldades concernentes ao cálculo do $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$, no qual evidenciamos *Imagens Conceituais evocadas*, cujas características se pautam na:

- Dificuldade em transportar automaticamente os métodos da álgebra relacionados à manipulação de grandezas finitas e infinitas. Essa situação assemelha-se ao obstáculo intitulado por Sierpinska (1985) de *horror ao infinito*; [Seria interessante explicitar esse obstáculo na fundamentação, até para o melhor entendimento por parte do leitor.]

- Dificuldade em calcular limites em que $x \to \infty$, conforme destacado por Nair (2009) que evidenciou, em sua pesquisa, problemas relacionados ao cálculo de limites infinitos e no infinito.
- Associações de $\frac{1}{\infty}$ à ideia de indeterminação, bem como a evocação da não existência do limite em virtude dessa "indeterminação", conforme elucidado por Nair (2009).

Verificamos – dentre os sujeitos que calcularam o $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x}$ corretamente – a evocação do gráfico da função para explicar o que o cálculo desse limite significava. Nesse sentido, destacamos a resposta do sujeito S25 que mobilizou a noção dinâmica para explicar o resultado obtido, conforme identificamos em sua justificativa: "*quando suas abscissas tendem ao infinito, suas imagens tendem a zero*". Ou seja, assim como Tall e Vinner (1981), Jordaan (2005) e Nair (2009), observamos que a ideia de que o valor que $\mathbf{f(x)}$ se aproxima quando os valores de $\mathbf{x}$ chegam perto de a é igual a $\mathbf{L}$ faz parte de suas *imagens conceituais* (ver figura a seguir).

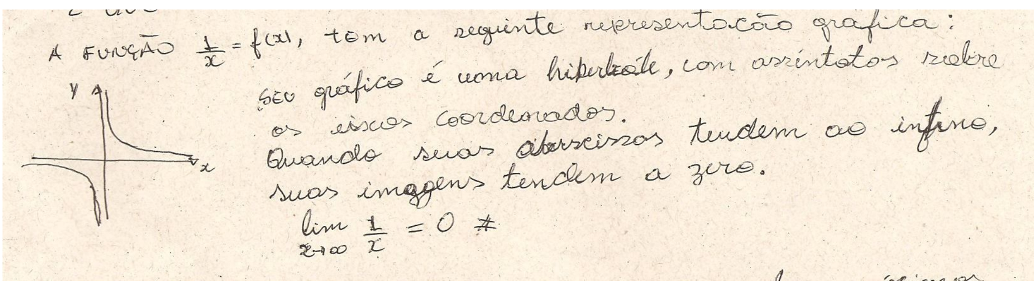


Figura 4: Resposta do sujeito S25 à questão 2.

O sujeito S12 foi o único sujeito investigado que calculou o limite solicitado, explicando-o mediante a definição formal de limite de função. Entretanto, ao escrever "$x > \delta \to |f(x) - L| < \varepsilon$" não atentou para o fato de que pela definição, $\forall \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0$, tal que $|x - a| < \delta \to |f(x) - L| < \varepsilon$ (ver exemplificação a seguir).

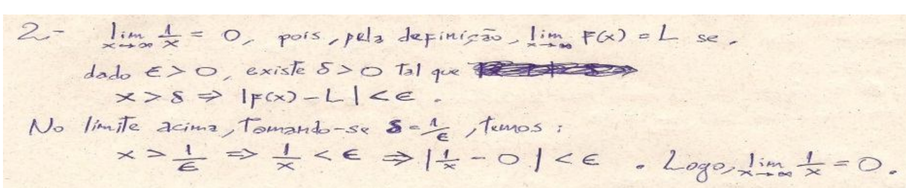


Figura 5: Resposta de S12 à questão 2.

A maioria dos estudantes não utilizou a definição com ε e δ, o que se encontra em acordo com as considerações de Vinner (1991), no sentido de ser "(...) difícil treinar o sistema cognitivo a agir contra sua natureza e forçá-lo a consultar definições tanto quando forma sua imagem conceitual quanto quando trabalha com uma tarefa cognitiva" (VINNER, 1991, p. 72, tradução nossa).

A expressão *"(...) tão próximo de zero tanto quanto se queira (...)"* (resposta do sujeito S16) também reflete a ideia de aproximação e dinamismo que se fez presente nas *imagens conceituais* dos sujeitos, cujas respostas assemelham-se, sobretudo, aos resultados obtidos por Tall e Vinner (1981).

Em se tratando da 5ª questão, observamos que alguns dos sujeitos investigados apresentaram dificuldade em interpretar os gráficos, isso porque 7 dos 25 estudantes que participaram da primeira etapa da pesquisa não responderam a questão. A investigação à direita e à esquerda do ponto dado fez parte da resolução de grande parte dos estudantes que atribuíram à (não) existência do limite o fato de seus limites laterais existirem e serem iguais. Nesse sentido, nossos resultados não estão em conformidade com os de Barto (2004), cujos sujeitos investigados consideravam somente as investigações à direita e à esquerda do ponto satisfatórias para a existência do limite, descartando a sua unicidade. De qualquer maneira, ainda assim observamos nas respostas dos sujeitos a evocação de uma ideia de limite de função como sendo uma aproximação contínua em relação a um ponto sem, no entanto, atingir esse ponto (TALL; VINNER, 1981).

Evidenciamos em nossos resultados que – semelhante aos estudos de Cottrill *et al* (1996), Jordaan (2005) e Nair (2009) – os sujeitos investigados condicionam a existência do limite de uma função à continuidade dessa função em todos os pontos, pois para *"uma função satisfazer o conceito de limite...precisa ser contínua em todo o seu domínio"* (resposta do sujeito S15). Nesse sentido, observamos que as *imagens conceituais* evocadas pelos sujeitos investigados são semelhante às de Leibniz no séc. XVII, cuja percepção acerca da existência do limite dependia da continuidade da função naquele ponto e não o contrário.

Verificamos que alguns sujeitos evocaram em suas *imagens conceituais* a relação de continuidade com a (não) existência de saltos no gráfico da função (TALL; VINNER, 1981; BARTO, 2004), conforme elucidamos, a seguir, na resposta do sujeito S20.

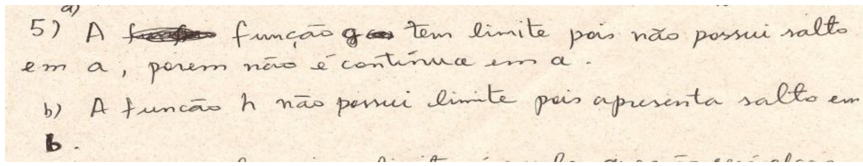

5) a) A ~~[illegible]~~ função ~~g~~ tem limite pois não possui salto em a, porem não é contínua em a.
b) A função h não possui limite pois apresenta salto em b.

Figura 6: Resposta de S20 à questão 5.

Somente a resposta do sujeito S09 demonstrou-se de acordo com as considerações de Barto (2004) no que concerne a não preocupação com a unicidade do limite, mas somente com as investigações à direita e à esquerda do ponto dado. Além disso, observamos que esse estudante apresenta dificuldades no que se refere ao conceito de função (ver exemplificação a seguir), pois para ele, os saltos no gráfico implicam a existência de duas funções diferentes. O sujeito, ao contrário da maioria dos participantes de nossa pesquisa, não evocou o a ideia de continuidade para responder a questão, conforme destacamos a seguir.

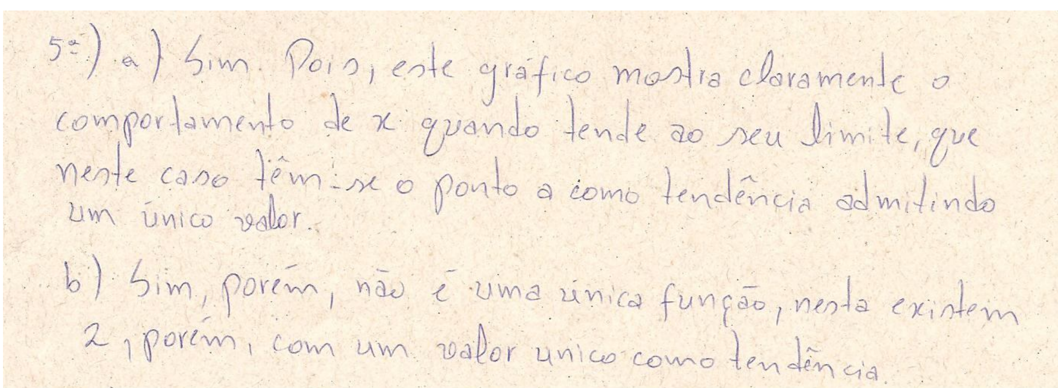

5º) a) Sim. Pois, este gráfico mostra claramente o comportamento de x quando tende ao seu limite, que neste caso têm-se o ponto a como tendência admitindo um único valor.
b) Sim, porém, não é uma única função, nesta existem 2, porém, com um valor unico como tendência.

Figura 7: Resposta de S09 à questão 5.

No que concerne à 7ª questão, observamos que alguns estudantes apresentaram dificuldade em evocar uma definição para limite de função. Isso porque, 9 sujeitos não responderam a questão, o que nos impossibilitou de investigar suas percepções acerca desse conceito. Em relação aos estudantes que responderam a questão, verificamos que expressões que refletem uma noção dinâmica acerca do conceito de limite de função se fizeram presente na *definição conceitual pessoal* de alguns indivíduos, tais como o sujeito S11 (*“f(x) é uma função na qual existe um valor que ao ser substituído no x* *tenderá a alcança-lo, porém nunca chegará a alcançá-lo...”)*. Essa definição difere, é claro, da *definição conceitual* formal, na qual não é admitida essa interpretação dinâmica.

Nossos resultados se encontram em conformidade com aqueles obtidos por Tall e Vinner (1981), Cornu (1983), Sierpinska (1985), Cottrill *et* al (1996), Zuchi (2005), Jordaan (2005), Juter (2006) e Nair (2009). Ou seja, as *Imagens Conceituais* dos estudantes admitem o conceito de limite mediante a ideia de aproximação, dinamismo, na qual a função jamais poderá alcançar seu limite. Observamos ainda que o sujeito S22 evocou a ideia de continuidade para definir limite, pois ao afirmar que *“O limite de uma função quando tende a um determinado número será igual ao valor da função quando aplicar o limite nessa função”*, ele mobilizou a noção de que $f(a) = \lim_{x \to a} f(x)$ (COTTRILL *et al*, 1996; JORDAAN, 2005; NAIR, 2009).

Alguns sujeitos investigados evocaram elementos da definição formal de limite de função para expressar sua *definição conceitual pessoal*, tais como os sujeitos S20 e S12, cujas respostas destacamos a seguir:

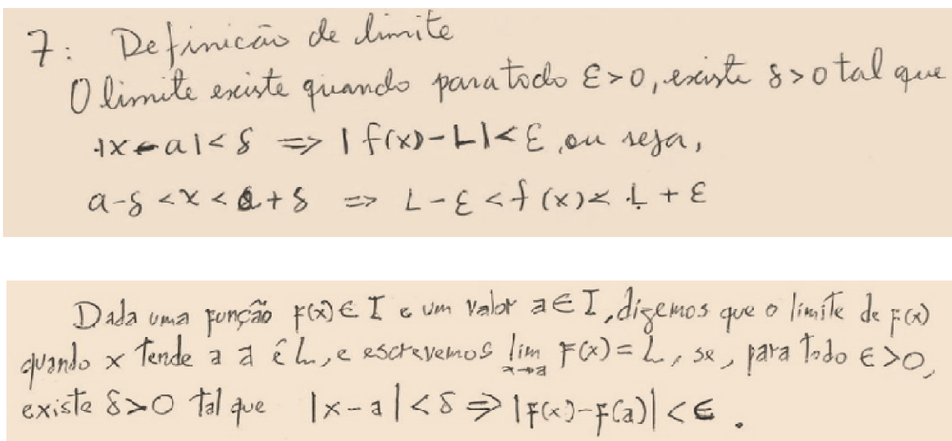


Figura 8: Respostas de S20 e S12 à questão 7.

Nesse sentido, ressaltamos que a definição S12 (“... .$\forall \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0$ *tal que* $|x - a| < \delta \rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$ ....”) mostra que o estudante também evocou a ideia de que $f(a) = \lim_{x \to a} f(x)$. Ou seja, o limite de uma função existe em determinado ponto se a função estiver definida naquele ponto, logo, a função deve ser contínua (COTTRILL *et al*, 1996; JORDAAN, 2005; NAIR, 2009).

Evidenciamos, diante das respostas dos sujeitos acerca da relação *existência do limite x continuidade de função*, que os mesmos apresentam uma definição conceitual pessoal de limite de função que difere da definição formal, ou seja, a *imagem conceitual* desses sujeitos está atrelada à prática respaldada pelos exercícios, na qual o cálculo de limite de funções elementares quando x tende a p resulta no valor da função em p (RODRIGUEZ, 2009).

Considerações finais

Propusemo-nos com esta pesquisa investigar os elementos que compõem a *imagem conceitual* de estudantes universitários de licenciatura em matemática no que concerne ao conceito de limite de função. Realizamos, *à priori*, a revisão de literatura que subsidiou a delimitação de nossas hipóteses, questões norteadoras e objetivos para a pesquisa. Destacamos, nesse sentido, os estudos de Tall e Vinner (1981) e Vinner (1991) sobre *Imagem Conceitual* e *Definição Conceitual* que foram estabelecidos como o principal referencial teórico de nossa pesquisa.

O questionário elaborado e aplicado na primeira etapa da coleta de dados foi elaborado a partir de nossas interpretações acerca dos resultados obtidos em pesquisas anteriores, tais como, Tall e Vinner (1981), Cornu (1981), Vinner (1991), Cottrill *et al* (1996), Jordaan (2005), Juter (2006), dentre outras. A análise dos dados obtidos na 1ª etapa norteou-se, consequentemente, nas considerações desses autores no que se refere às *imagens conceituais* relativas ao conceito de limite de função.

Dentre as *imagens conceituais* evocadas pelos estudantes durante a resolução das questões 1, 2, 5 e 7 do instrumento de coleta de dados aplicado na 1ª etapa de nossa pesquisa, destacamos:

- Noção dinâmica; ideia de aproximação em relação a determinado valor, sem alcançá-lo;
- *Tendência a se aproximar de algo* (CORNU, 1983);
- Noção de infinitamente pequeno;

- Ideia de estar tão próximo de algo, de maneira a alcançá-lo;
- Dicotomia *estático/dinâmica*;
- *A ideia de proceito* (TALL; GRAY, 1993).
- Não é possível calcular limites que tendem para o infinito;
- Indeterminações implicam na não existência do limite;
- Expressões do tipo *"tender para"* e *"se aproxima de"* implicam na ideia de que a função se aproxima do limite à medida que x se aproxima de a, ou seja, $f(x)$ deve ser necessariamente, diferente de L. (TALL; VINNER, 1981).
- Para o limite de uma função existir, seus limites laterais devem ser iguais;
  O conceito de limite de função encontra-se relacionado com uma investigação nas proximidades de determinado ponto, de maneira que a função se aproxime de L sem, no entanto, alcançar esse limite. Ou seja, $f(x) \neq L$ (TALL; VINNER, 1981; CORNU, 1983; SIERPINSKA, 1885; COTTRILL *et* al, 1996; ZUCHI, 2005; JORDAAN, 2005; JUTER, 2006; NAIR, 2009).
- Para que o limite de uma função exista, a função deve estar definida no ponto, ou seja, $f(a) = \lim_{x \to a} f(x)$ o que implica que deve ser contínua nesse ponto (COTTRILL *et al*, 1996; JORDAAN, 2005; NAIR, 2009);
- O limite de uma função existe se não houver saltos no gráfico da função;

Os resultados obtidos na 1ª etapa da pesquisa subsidiaram na elaboração dos protocolos de entrevista a serem utilizados na segunda etapa de nossa investigação, cujos resultados nos permitirão analisar mais profundamente os elementos que compõem a *imagem conceitual* dos sujeitos investigados acerca do conceito de limite de função, de maneira a viabilizar a validação de nossas hipóteses de pesquisa, bem como o alcance de nossos objetivos.

Por fim, acreditamos que os resultados de nossa pesquisa poderão subsidiar pesquisas futuras nesse âmbito, haja vista que as *imagens conceituais evocadas* pelos estudantes dessa pesquisa acerca do conceito de limite de função servirão de base para a elaboração de propostas para viabilizar a aprendizagem desse conceito, de maneira a evitar os possíveis conflitos relacionados a essas evocações.

Referências

BARTO, M. C. *Um olhar sobre as ideias matemáticas em um curso de cálculo: a produção de significados para continuidade*. Dissertação de mestrado (educação matemática). PUC (SP), 2004.

BOYER, C. *The history of calculus ant its conceptual development*. New York: Dover publications, 1959.

BRANDEMBERG, J.C. *Uma análise histórico-epistemológica do conceito de grupo.* São Paulo: Editora livraria da física, 2010.

CORNU, B. *Apprentissage de la notion de limite – conceptions et obstacles*. Tese de doutorado (matemática). Université Scientifique et Medicale de Grenoble, 1983.

_________. Limits. *In: Advanced Mathematical Thinking (ed. David Tall)*. Kluwer publications, 1991.

COTRILL *et al*. Understanding the limit concept: beginning with a coordinate process schema. *In: Journal of mathematical behavior*, vol. 15, 1996, p. 167 – 192.

GRAY, E.M; TALL, D. Success and failure in mathematics: The flexible meaning of symbols as process and concept. *In: Mathematics teaching*, n. 142, p. 6 – 10, 1993.

JORDAAN, T. *Misconceptions of the limit concept in a mathematics course for engineering students*. Dissertação de mestrado (educação matemática). University of South Africa, 2005.

JUTER, K. *Limits of functions: University students' concept development*. Tese de doutorado (educação matemática). Lulea University of Technology, 2006.

NAIR, G.S. *College students' concept image of asymptotes, limits and continuity of rational functions.* Tese de doutorado (filosofia). Ohio State University, 2010.

OLIMPIO, A. Primeiro ano num curso de matemática: a definição de função e a dualidade local/global em conceitos de cálculo. *In: Boletim de Educação Matemática.* Rio Claro (SP), Ano 20, n.28, pp. 39 a 67, 2007.

RODRÍGUEZ, Mabel. Consideraciones didácticas para la enseñanza del límite funcional. *In: Memorias Del 10º Simposio de Educación Matemática*. Chivilcoy – Buenos Aires – Argentina, p. 92 – 98, 2009.

SIERPINSKA, A. Obstacles epistemologiques relatifs a la notion de limite. *In: Recherches en didactique des mathématique*, vol. 6, n.1, p. 6 – 67, 1985.

TALL, D. Concept image and concept definition. *In: Senior Secondary Mathematics Education*, p. 37 – 41, 1988.

_________. The psychology of advanced mathematical thinking. *In: Advanced Mathematical Thinking (ed. David Tall)*. Kluwer publications, 1991.

_________. The transition to advanced mathematical thinking: functions, limits, infinity and proof. *In: Handook of research on mathematics teaching and learning*, p. 495 – 511, 1992.

TALL, D; VINNER, S. Concept image and concept definition with particular reference to limits and continuity. *In: Educational Studies in Mathematics,* n. 12, p. 151 – 169, 1981.

VINNER, S. The role of definitions in teaching and learning. *In: Advanced Mathematical Thinking* (Ed. David Tall). Kluwer publications, 1991.

ZUCHI, I. *A abordagem do conceito de limite via sequência didática: do ambiente lápis e papel ao ambiente computacional.* Tese de doutorado (engenharia de produção). UFSC, 2005.