REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DE FUNÇÕES: UMA ANÁLISE DAS PRINCIPAIS DIFICULDADES DE ALUNOS DO ENSINO MÉDIO

GRAPHIC REPRESENTATION OF FUNCTIONS: AN ANALYSIS OF THE MAIN DIFFICULTIES OF HIGH SCHOOL STUDENTS

Andresa Maria Justulin

Universidade Tecnológica Federal do Paraná/Departamento da Matemática/Campus Cornélio Procópio, ajustulin@utfpr.edu.br

Fernando Francisco Pereira

Universidade Tecnológica Federal do Paraná, fernandoutfcp@gmail.com

Amanda da Silva Ferreira

Universidade Tecnológica Federal do Paraná, amandaferreirasiq@gmail.com

Resumo

Neste artigo são abordados os resultados de uma pesquisa mais ampla que buscou compreender quais as dificuldades de estudantes do Ensino Médio acerca do conteúdo de Função. Os sujeitos da pesquisa foram alunos de 3º Ano do Ensino Médio, de uma escola da rede estadual, do Paraná. Foi utilizada como instrumento de coleta de dados uma prova com questões que abordavam o conteúdo de Função, seus conceitos, suas representações e aplicações. Neste trabalho, são exploradas as questões relacionadas às representações gráficas de funções. São apresentados, também, resultados referentes às dificuldades dos alunos acerca do conceito de Função, visto que se constatou que a maior parte delas ocorre devido à falta de compreensão dos conceitos matemáticos relacionados. Sobre a representação gráfica de funções, os alunos apresentaram dificuldades desde a representação correta dos pontos no plano cartesiano, na identificação do domínio para traçar o gráfico, até a compreensão da Função Constante.

Palavras-chave: Ensino Médio, Funções, Representação Gráfica, Compreensões, Dificuldades.

Abstract

In this article the results of a broader research that aims to understand the difficulties of high school students about the content of Function are discussed. The subjects of the research were students of the 3rd year of High School of a state school of Paraná. It was used as instrument of data collection a test with questions that approached the content of Function, its concepts, its representations and applications. In this work, the questions related to graphical representations of functions are explored. Results related to the students' difficulties regarding the concept of Function are also presented, as it was found that most of them occur due to the lack of understanding of the related mathematical concepts. On the graphical representation of functions, the students presented difficulties from the correct representation of the points in the Cartesian plane, in the identification of the domain to draw the graph, until the understanding of the Constant Function.

Keywords: High School, Functions, Graphic Representation, Understanding, Difficulties.

Introdução

O ensino de Matemática tem enfrentado grandes desafios desde o início do século XXI. Se, por um lado, os índices de desempenho dos estudantes brasileiros estão cada vez mais insatisfatórios, por outro, a Matemática, cada vez mais, é valorizada dentro de uma sociedade altamente tecnológica. Dessa maneira, surge a necessidade de formar sujeitos capazes de resolver problemas, de tomar decisões, de fazer inferências, de criar, de aperfeiçoar conhecimentos e valores (BRASIL, 1998, p. 40).

Não obstante o seu caráter formativo, a Matemática apresenta seu caráter instrumental, de modo a conciliar a aquisição de atitudes à compreensão do mundo. Por meio de um conjunto de técnicas e estratégias que devem ser desenvolvidas e adaptadas para serem aplicadas a outras áreas do conhecimento, bem como a problemas reais presentes no cotidiano, a Matemática se torna uma linguagem universal que permite interpretar e modelar situações reais.

Um dos ramos da Matemática, fundamental nesse processo de interpretação e modelação da realidade, é a Álgebra. Ela possui caráter de linguagem, com seus códigos, compreendidos como o emprego de números e letras, e suas regras, que se entende como o uso das propriedades das operações. Além do mais, ela se mostra presente na vivência do dia a dia, através da variedade de gráficos que se apresentam nos noticiários e jornais, e ainda se faz um excelente instrumento para cálculos de natureza financeira (BRASIL, 2000, p.120-121). Os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998) estabelecem que o ensino de Álgebra tenha início a partir da generalização de padrões aritméticos, passando pelo estudo da variação de grandezas, que possibilita a exploração da noção de função nos 3º e 4º ciclos (6º ao 9º ano), e que a abordagem formal do conceito de Funções ocorra no Ensino Médio. De acordo com Brasil (2000, 2002) é devido a seu caráter integrador que o conteúdo de Função desempenha um papel importante para descrever e estudar, através da leitura, interpretação e construção de gráficos, o comportamento de fenômenos de diversas áreas.

Em relação ao ensino de Funções, Ponte (1990), Oliveira (1997) e Botta (2010), afirmam que se tem valorizado fortemente o formalismo e o rigor matemático e que a Álgebra não chega a ser usada de forma significativa, havendo dificuldade em relacionar Matemática e realidade. Toda linguagem excessivamente formal que cerca esse tema deve ser relativizada e, em parte, deixada de lado, juntamente com os estudos sobre funções injetoras, sobrejetoras, compostas e modulares (BRASIL, 2002, p. 121).

O próprio conceito de função também parece ser outro ponto, no ensino de Álgebra, em que os alunos apresentam dificuldades. De acordo com Markovits, Eylon e Bruckherimer (1994); Oliveira (1997); Ponte, Branco e Matos (2009); Meneghetti e Redling (2012), a maior parte dessas dificuldades ocorre devido à falta de compreensão dos alunos acerca dos conceitos matemáticos relacionados ao conteúdo estudado. Outras dificuldades estão no registro da representação gráfica, na mudança de um registro para o outro, na compreensão do domínio e contradomínio, na construção de uma tabela de valores numéricos e na notação matemática.

Ainda, os alunos apresentam problemas ao lidar com as expressões algébricas e suas representações gráficas, sendo que o ensino de funções deveria atender a necessidade de articular suas representações, seja numérica, gráfica ou algebricamente. Ao construir tabelas, calcular valores numéricos, desenvolver um sentido do quantitativo e fazer aproximações, se possível, com dados provenientes do cotidiano dos alunos, são explorados aspectos importantes da competência matemática quanto ao ensino de Funções (PONTE, 1990, p.7).

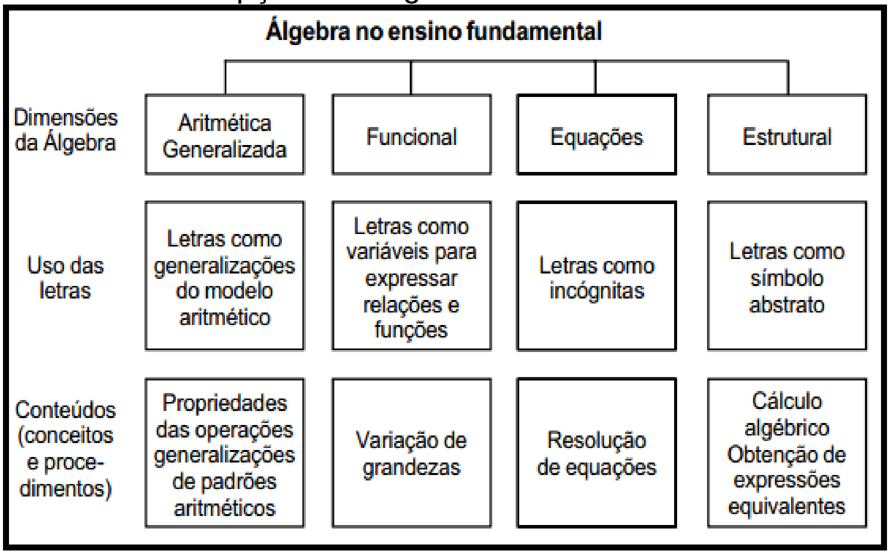
Nessa direção, o presente estudo preocupa-se em investigar quais dificuldades estudantes de 3º ano do Ensino Médio apresentam acerca da representação gráfica de funções, desde a análise do gráfico até sua construção. Para isso, foi aplicada uma prova com questões que abordavam o conteúdo de Função, seus conceitos, suas representações e aplicações.

As concepções da Álgebra e os usos da letra

O conceito de variável está ligado ao de função, que faz uso dela para descrever fenômenos de variação e resolução de problemas. Caraça (1984) e Sierpinska (1994) afirmam que o conceito de variável está entre os mais difíceis, pela sua complexidade, no processo de formação do pensamento algébrico. Usiskin (1994) afirma que as concepções de Álgebra ou os papéis que ela representa estão intrinsecamente ligados aos diversos usos das letras; no caso das funções, chamadas de "variáveis".

Os PCN (BRASIL, 1998) denominam o que este texto chama de "concepções de Álgebra" como sendo "Dimensões da Álgebra". De acordo com este documento, essas dimensões, no Ensino Fundamental, são:

Figura 1 - Diferentes concepções da Álgebra escolar e os diferentes usos das letras



Fonte: Brasil (1998, p.116).

Já as concepções apresentadas por Usiskin (1994), e que os PCN (BRASIL, 1998) utilizam como referência, são apresentadas no quadro 1:

Quadro 1 - Concepções da Álgebra e uso das variáveis

Concepção da álgebra	**Uso das variáveis**
Aritmética generalizada	Generalizadoras de modelos (traduzir, generalizar)
Meio de resolver certos problemas	Incógnitas, constantes (resolver, simplificar)
Estudo de relações	Argumentos, parâmetros (relacionar, gráficos)
Estrutura	Sinais arbitrários no papel (manipular, justificar)

Fonte: Usiskin (1994, p.20).

Ambos apresentam concepções de Álgebra equivalentes, visto que o autor supracitado é um dos referenciais teóricos adotados para a elaboração deste bloco nos PCN. Assim, será explanado como Usiskin (1994) e Brasil (1998) compreendem o uso das variáveis em cada concepção ou dimensão da álgebra. Segundo este último, os PCN, a Álgebra enquanto Aritmética Generalizada se dá entre a articulação da aritmética e as primeiras noções algébricas, e, para que os alunos adquiriram uma base mais sólida, deve ocorrer a ampliação dessas noções algébricas a fim de consolidá-las. Nesse processo é necessário que o professor proponha tarefas que permitam ao aluno identificar e generalizar as propriedades das operações aritméticas. Usiskin (1994, p.13) apresenta a seguinte situação:

$$-1 \cdot 5 = -5$$

$$-2 \cdot 5 = -10$$

Segundo o referido autor, ao se generalizar essas expressões aritméticas pode-se extrair propriedades como:

$$-x \cdot y = -xy$$

Para Usiskin (1994), dentro dessa concepção de Álgebra, é natural ver as variáveis como generalizadoras de modelos, sendo que as instruções-chave para o aluno são traduzir e generalizar.

Já na dimensão Funcional da Álgebra, as "letras" se tornam variáveis, e são usadas para expressar relações entre grandezas. Segundo Brasil (1998, p.118), ao estudar essa concepção de Álgebra os alunos "pensam que a letra em uma sentença algébrica serve sempre para indicar (ou encobrir) um valor". Para Usiskin (1994, p. 16), é somente no contexto dessa concepção que existem as noções de variável independente e variável dependente, pois dentro dela uma variável é um parâmetro, ou seja, representa um número do qual outros números irão depender, ou um argumento, isto é, quando representa valores do domínio de uma função, emergindo as relações e funções.

Na Álgebra tratada na dimensão de Equações (BRASIL, 1998), ou como um meio para resolver certos problemas (USISKIN, 1994, p. 14), as variáveis assumem o caráter de incógnitas ou constantes. Nesta concepção, espera-se que o aluno consiga desenvolver a capacidade de construir a linguagem algébrica para resolver situações problemas, após traduzir uma situação para a linguagem da Álgebra, e as instruções-chave passam a ser, simplificar e resolver (USISKIN, 1994, p. 14-15; BRASIL, 1998, p.117).

Por fim, a Álgebra vista sob a dimensão Estrutural (BRASIL, 1998), ou a Álgebra como estudo das estruturas (USISKIN, 1994, p.17), assume um novo aspecto. Nesta concepção, a letra não expressa uma relação ou função, não é um argumento, não há um modelo aritmético a ser generalizado, não é uma incógnita, ela apresenta-se como um símbolo ou sinal arbitrário de estrutura estabelecida por algumas propriedades. O currículo escolar, dentro desta concepção, propõe a exploração dos produtos notáveis, fatoração ou simplificação de expressões algébricas e das operações com monômios e polinômios. Segundo os PCN (BRASIL, 1998, p.121), a visualização de expressões algébricas, por meio dos cálculos de áreas e perímetros de retângulos, é um recurso que facilita a aprendizagem, possibilitando ao aluno atribuir significado às expressões. Para Usiskin (1994, p. 20), as instruções-chave, nessa concepção, são manipular e justificar.

De acordo com os PCN (BRASIL, 1998), para que se garanta o desenvolvimento do pensamento algébrico é necessário que sejam oferecidas, aos alunos, atividades que inter-relacionem as diferentes concepções de Álgebra apresentadas. Assim, os estudantes poderiam analisa-las e compreendê-las, ao invés de trabalhar a técnica operatória.

Recomendações dos documentos oficiais em relação ao ensino de Funções

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio - PCNEM (BRASIL, 2000), é recomendável que o ensino de Matemática tenha como fundamento a contextualização e a interdisciplinaridade, e o estudo de Funções permite estabelecer conexões entre diversos conceitos e diferentes formas de pensamento matemático. O documento sugere que não se deve trabalhar Funções, de forma isolada, a fim de não perder seu caráter integrador.

Como orientação complementar aos PCNEM (BRASIL, 2000), os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (BRASIL, 2002), afirmam que:

> O estudo das Funções permite ao aluno adquirir a linguagem algébrica como a linguagem das ciências, necessária para expressar a relação entre grandezas e modelar situações-problema, construindo modelos descritivos de fenômenos e permitindo várias conexões dentro e fora da própria Matemática. Assim, a ênfase do estudo das diferentes funções deve estar no conceito de função e em suas propriedades em relação às operações, na interpretação de seus gráficos e nas aplicações dessas funções (BRASIL, 2002, p. 121).

Ainda, orienta que para iniciar o ensino de Funções é considerável o estudo dos Números Reais, Conjuntos e suas operações e das relações, como pré-requisitos, para que, a partir daí, seja possível que o aluno relacione Funções como sendo relações particulares. Ao apresentar a definição de função, o professor pode retratar situações de dependência entre duas grandezas, e o estudo de situações contextualizadas, descritas algébricas e graficamente (2002, p.121). O documento atenta para a ênfase no uso da linguagem formal e que os problemas de aplicação não devem ser deixados para o final, devendo servir de contextos para a aprendizagem de Funções, valorizando o uso de exemplos do cotidiano.

De acordo com as Orientações Curriculares para o Ensino Médio (BRASIL, 2006, p.72), o ensino de Funções deve iniciar a partir da exploração das relações entre duas grandezas em diversos contextos, como idade e altura, tempo e distância percorrida, tempo e crescimento populacional, entre outros. Além de apresentar diversos modelos, o ensino de Funções deve promover nos alunos a iniciativa de apresentar relações, seus gráficos, os registros de tipos de crescimento e decrescimento e a exploração da alteração dos parâmetros.

Nas Diretrizes Curriculares Estaduais do Paraná (PARANÁ, 2008), as Funções aparecem, de forma intuitiva, no 9º ano. São recomendações deste documento que:

> [...] o aluno deve compreender que as Funções estão presentes nas diversas áreas do conhecimento e modelam matematicamente situações que, pela resolução de problemas, auxiliam o homem em suas atividades, [...] é necessário que o aluno elabore o conhecimento da relação de dependência entre duas grandezas, [...] compreenda a estreita relação das Funções com a Álgebra, o que permite a solução de problemas que envolvem números não conhecidos. Deve conhecer as relações entre variável independente e dependente, os valores numéricos de uma função, a representação gráfica das Funções afim e quadrática e perceber a diferença entre função crescente e decrescente (PARANÁ, 2008, p.59).

No Ensino Médio, de acordo com Paraná (2008, p. 62), ao trabalhar os conteúdos de Função Afim e Progressão Aritmética, o professor pode relacioná-los com os conceitos de juros simples. Da mesma maneira, os conteúdos Função exponencial e Progressão geométrica podem ser trabalhados de modo articulado aos de juros compostos.

De acordo com a Base Nacional Comum Curricular - BNCC (BRASIL, 2018, p. 270), nos anos iniciais do Ensino Fundamental, os alunos já podem, através da Álgebra, reconhecer mudanças e relações, tratando das primeiras ideias de função. As noções intuitivas de função, para o referido documento, podem ser exploradas por meio da ideia de variação proporcional direta entre duas grandezas, nos anos finais do Ensino

Fundamental através de situações como “Se com duas medidas de suco concentrado eu obtenho três litros de refresco, quantas medidas desse suco concentrado eu preciso para ter doze litros de refresco?” (BRASIL, 2018, p. 270).

Outra ênfase, apresentada pela BNCC, é a exploração, relação e conversão de funções entre suas representações numérica, algébrica e gráfica. No Ensino Médio, as Funções devem ser usadas para analisar e interpretar a relação de dependência entre duas grandezas associadas a fenômenos do cotidiano, relacionando com outras áreas de estudo como a Física, Química e a Biologia.

Fundamentação Teórica

As dificuldades e os erros dos alunos referentes ao conteúdo de funções geralmente estão ligados ao conceito de funções e podem ser sintetizadas em: definir o conceito de funções; identificar e distinguir domínio, contradomínio e imagem; identificar e distinguir variável dependente e variável independente, analisar e representar graficamente uma função, traduzir da linguagem vernácula para a linguagem matemática, generalizar e formalizar os resultados (OLIVEIRA, 1997; PONTE, BRANCO, MATOS, 2009).

Em uma pesquisa com alunos de 14 a 16 anos, que já haviam estudado funções, Markovits, Eylon e Bruckherimer (1994) constataram algumas dificuldades relacionadas ao conceito de Função. Foram elas:

- dificuldades para identificar imagens e estabelecer pares ordenados para funções dadas na forma algébrica;
- dificuldades em distinguir conjunto imagem e contradomínio, ou ignorar o domínio e o contradomínio de uma função;
- dificuldades causadas por manipulações técnicas.

Para os alunos se revelou ser mais fácil a passagem da representação algébrica para a representação gráfica. No entanto, eles não perceberam que o x representava o domínio e o y correspondia ao contradomínio e, dessa forma, muitos não conseguiram estabelecer ligação entre “os componentes da definição verbal de função e os componentes da representação gráfica visual” (Ibid, p. 56).

Ainda, diante das representações gráficas de Funções, os pesquisados notaram que os alunos tendiam a conceber funções como sendo linear, o que pode ser explicado devido ao grande tempo dedicado a esse tipo de função. Conceitos como domínio, contradomínio, imagem e regra de correspondência (ou lei da função) também foram responsáveis por erros de alunos que participaram da pesquisa.

Oliveira (1997) constatou dificuldades semelhantes em sua investigação com professores e alunos voluntários. O trabalho verificou dificuldades referentes à concepção que os alunos possuíam de funções. A autora constatou que os alunos confundem função com equação e tratam uma fórmula como uma sequência de comandos para realizar um cálculo. Muitos lembram apenas das fórmulas e gráficos como representantes de uma função, além de não reconhecerem uma função constante e, outros, atribuem a noção de continuidade a esse conceito. Em relação à representação gráfica, a pesquisadora notou que os alunos possuem uma ideia errônea de que um gráfico só pode representar uma função se for conhecida a sua representação algébrica, além da confusa relação identificada entre função constante e função contínua. A pesquisadora concluiu também que basta apresentar um gráfico para que os alunos afirmem tratar de uma função e, assim como Markovits, Eylon e Bruckherimer (1994), considera que este fato esteja atrelado ao modo como o professor aborda este conteúdo.

Meneghetti e Redling (2012) verificaram que os alunos, quando deparados com uma representação gráfica, costumam traçar uma linha vertical sobre o gráfico e verificar se a mesma corta em um único ponto, como uma forma de identificar uma função. Porém, constataram que quando deparados com uma representação algébrica, tendem a ter dificuldade na construção gráfica da função. Assim, as autoras indicam que o fato de os alunos não compreenderem o conceito de função se apresenta como um obstáculo no entendimento de outros conceitos relacionados, o que culmina nas dificuldades constatadas.

Para Booth (1994), a passagem da Aritmética para a Álgebra é a fonte das dificuldades dos alunos pois:

> [...] para compreender a generalização das relações e procedimentos aritméticos é preciso primeiro que tais relações e procedimentos sejam apreendidos dentro do contexto aritmético. Se não forem reconhecidos, ou se os alunos tiverem concepções erradas a respeito deles, seu desempenho em álgebra poderá ser afetado. Nesse caso, as dificuldades que o aluno tem em álgebra não são tanto de álgebra propriamente dita, mais de problemas em aritmética que não foram corrigidos (BOOTH, 1994, p.33).

Nesse sentido, Ponte, Branco e Matos (2009) corroboram com Booth (1994) e afirmam que boa parte das dificuldades dos alunos tem a ver com o fato de que eles permanecem utilizando em Álgebra conceitos e convenções aprendidos em Aritmética.

Procedimentos Metodológicos

Para o desenvolvimento desta pesquisa, realizou-se, inicialmente, um levantamento bibliográfico a fim de buscar compreender as diferentes concepções da Álgebra e o emprego da letra. Investigou-se, também, o que trazem os principais documentos oficiais brasileiros sobre a inserção e o desenvolvimento do conteúdo de Funções na Educação Básica.

Em seguida, foram selecionadas questões que abordassem os conceitos relacionados ao conteúdo de Função, suas representações e aplicações, e elaborou-se uma avaliação com caráter investigativo, composta por 10 (dez) questões. A aplicação do referido instrumento ocorreu mediante autorização da direção e dos responsáveis em uma turma de 3º Ano do Ensino Médio, com 27 alunos, de um colégio da rede pública de ensino, teve duração de 2 horas aulas (aproximadamente 1h40min) e foi resolvida individualmente, sem nenhuma forma de consulta, ou interferência dos pesquisadores.

A posteriori, foi feita a análise dos registros dos alunos. A fim de elucidar os dados coletados e garantir o sigilo dos participantes, eles foram identificados pela a letra “A” referente a “Aluno”, seguida de um algarismo de 1 a 27, referente à quantidade de alunos participantes.

Neste artigo são discutidas as questões 3, 4, 6, 7 e 9, que abordavam a exploração da representação gráfica de funções, seja a partir de sua análise ou construção. Assim, por meio dos resultados obtidos, foi possível apresentar considerações a respeito das dificuldades dos alunos em relação a esse aspecto do ensino de Funções.

Resultados da pesquisa

A primeira questão analisada refere-se à questão 3 (três) da avaliação aplicada aos alunos. Nela, foram apresentadas quatro curvas e se esperava que os alunos reconhecessem qual delas representava uma função. Os alunos poderiam justificar utilizando o conceito ou a técnica conhecida por eles.

Um total de 20 alunos assinalou as alternativas que representam gráficos de funções. Contudo, em alguns registros, os alunos consideraram apenas o formato do gráfico como justificativa ou, simplesmente, não justificaram.

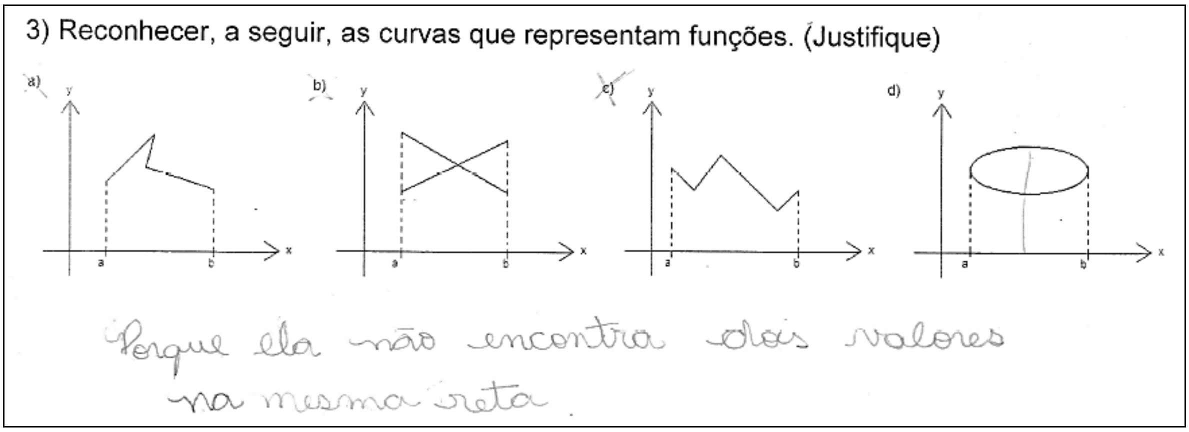
Tabela 1 - Grupos de respostas dadas pelos alunos à questão 3

RESPOSTAS DOS ALUNOS	Nº DE ALUNOS
Assinalou a curva que de fato representa uma Função (justificou de forma satisfatória)	2
Assinalou a curva que de fato representa uma Função (não justificou/ justificou usando a forma que a curva assume)	18
Deixou em branco ou assinalou as alternativas que não representavam Funções	7

Fonte: Dados da pesquisa.

Dentre os que assinalaram a alternativa correta, destaca-se o aluno A13, que afirmou que a curva “*c*”, conforme figura 2, corresponde a uma função por não encontrar “dois valores na mesma reta”. Observa-se no registro do aluno que a estratégia usada foi traçar uma reta (fictícia ou real) vertical ao eixo x (abcissa), e verificar se ela intercepta o gráfico em mais de um ponto. Em caso afirmativo, não se tem uma função.

Figura 2 - Resposta do aluno A13 à questão 3

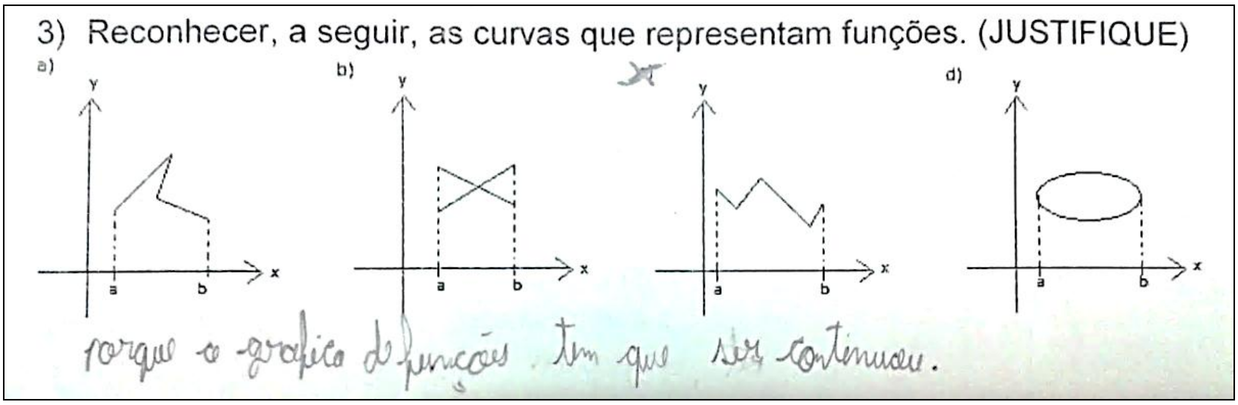


Fonte: Dados da pesquisa.

Essa estratégia é muito usada pelos alunos para identificar funções através de gráficos. Não fica claro se o aluno apenas usa esse procedimento, possivelmente apresentado pelo professor, ou se ele sabe que quando a reta vertical traçada intercepta o gráfico em mais de um ponto, isso representa a existência de imagens distintas para um mesmo elemento do domínio, o que contraria a definição de função. Outros autores como Ponte, Branco e Matos (2009) e Meneghetti e Redling (2012), em seus trabalhos, verificaram dificuldades que se assemelham às descritas neste trabalho, muitas ligadas ao conceito de função.

Já no registro do aluno A6 (Figura 3), pode-se observar que ele não reconhece os casos de funções definidas por várias sentenças, que quando representadas graficamente não apresentam linhas contínuas, já que se referem a partes distintas do domínio. Ainda é possível notar que o aluno não deixa claro o que compreende por "ser contínuo", visto que existem alternativas com traços contínuos e que não foram assinaladas.

Figura 3 - Resposta do aluno A6 à questão 3



Fonte: Dados da pesquisa.

Outras justificativas apresentadas pelos alunos se relacionaram ao fato de o gráfico "subir e descer" e que essa seria uma característica das funções. Outros justificaram dizendo que nunca tinham visto ou estudado gráficos em formato de "X" ou de "elipse", por exemplo.

Na segunda questão analisada, que se refere à questão 4 da avaliação, esperava-se que os alunos identificassem e escrevessem matematicamente o domínio e a imagem da função representada graficamente.

Os registros analisados indicaram que nenhum dos 27 alunos soube responder à questão como se esperava. Conforme tabela 2, alguns alunos tentaram encontrar a “lei de formação da função”, outros deixaram a questão “em branco” e outros não souberam descrever o intervalo da função a partir de seu gráfico.

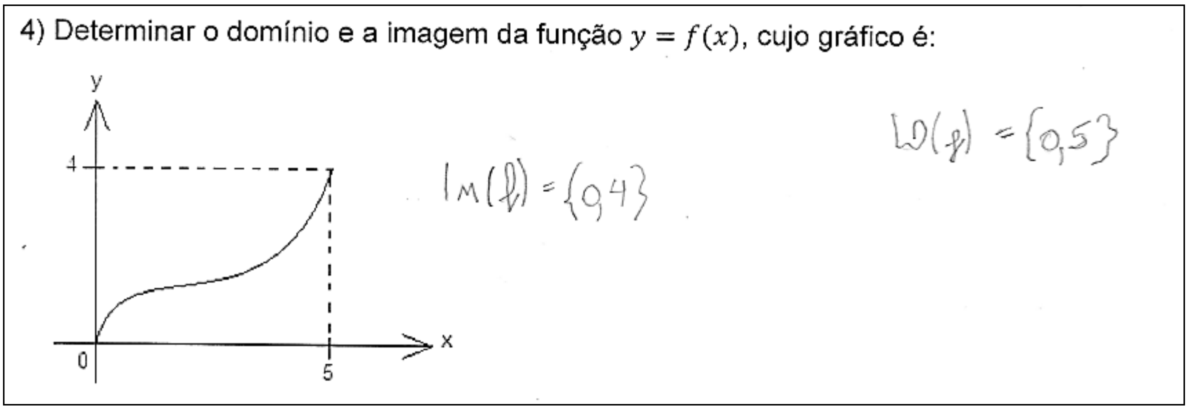
Tabela 2 - Grupos de respostas dadas pelos alunos à questão 4

RESPOSTAS DOS ALUNOS	Nº DE ALUNOS
Representou o Domínio e a Imagem como esperado	0
Considerou como Domínio e Imagem somente os pontos representados no gráfico e não o intervalo em que os elementos do domínio e da imagem pertencem	7
Tentou estabelecer uma lei de formação da função através do gráfico ou deixou em branco	20

Fonte: Dados da pesquisa.

Nos registros do aluno A9, figura 4, nota-se que o mesmo mostra conhecer a simbologia matemática, apesar de considerar apenas os pontos *0*, *4* e *5*, indicados no gráfico. O referido aluno também reconheceu o domínio e a imagem como sendo conjuntos de pontos e identificou o eixo x como o do domínio, e o eixo y como o da imagem da função.

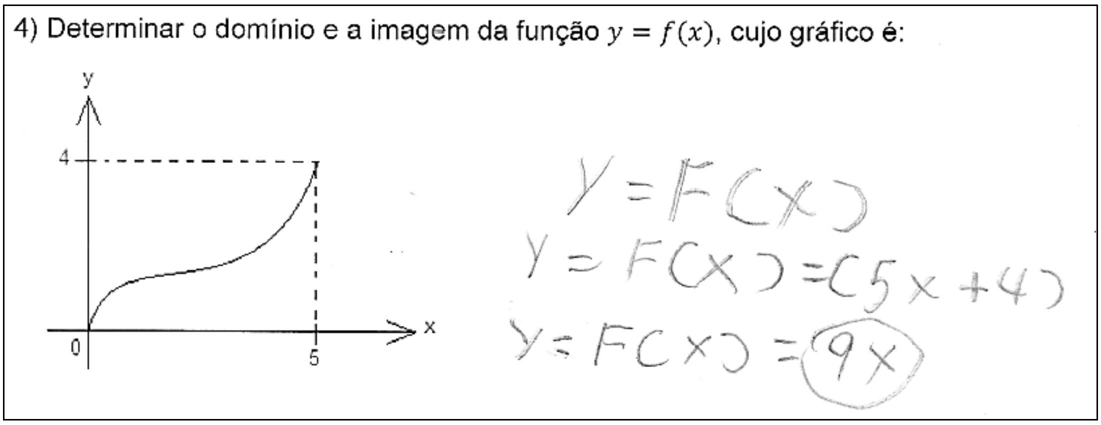
Figura 4 - Resposta do aluno A9 à questão 4



Fonte: Dados da pesquisa.

Houve casos em que os alunos tentaram estabelecer uma lei de formação da função através do gráfico, como no registro de A19, na figura 5:

Figura 5 - Resposta do aluno A19 à questão 4



Fonte: Dados da pesquisa.

Os alunos que tentaram resolver dessa maneira procuraram determinar uma lei de formação da função, mostrando que eles não compreenderam a questão. Pode-se conjecturar, ainda, que os mesmos não reconhecem, ao menos graficamente, o domínio e imagem de uma função. Destaca-se que não perceberam que a função tratada no problema não é linear e, na figura 5, o aluno demonstrou um erro algébrico ao operar $5x + 4$.

Esse tipo de erro ocorre quando os alunos tentam utilizar regras da Aritmética para operar com a Álgebra. Segundo as Orientações Curriculares para o Ensino Médio (BRASIL, 2006):

> [...] na passagem da aritmética à álgebra é preciso renegociar, pois agora a letra não é mais uma simples incógnita, mas passa a representar uma variável. Se no início da passagem da aritmética para a álgebra a letra representa um elemento desconhecido que se quer descobrir, aos poucos ela vai assumindo diferentes status, como, por exemplo, o de variável no trabalho com as funções, o de elemento genérico de determinado conjunto numérico, o de parâmetro no caso de identidades trigonométricas, etc (BRASIL, 2006, p.82).

A questão 6 (seis) da avaliação fornecia aos alunos a lei de formação da função e seu domínio. Esperava-se que eles associassem o conjunto domínio da função com o eixo das abcissas e, a partir da função de segundo grau dada, construíssem seu gráfico. Também deveriam perceber que o domínio apresentado se constituía de um conjunto discreto de pontos.

As respostas indicaram que a maioria dos participantes conseguiu substituir os valores do domínio e obter o conjunto imagem. No entanto, eles erraram ao representar as coordenadas no plano cartesiano, conforme tabela 3:

Tabela 3 - Grupos de respostas dadas pelos alunos à questão 6

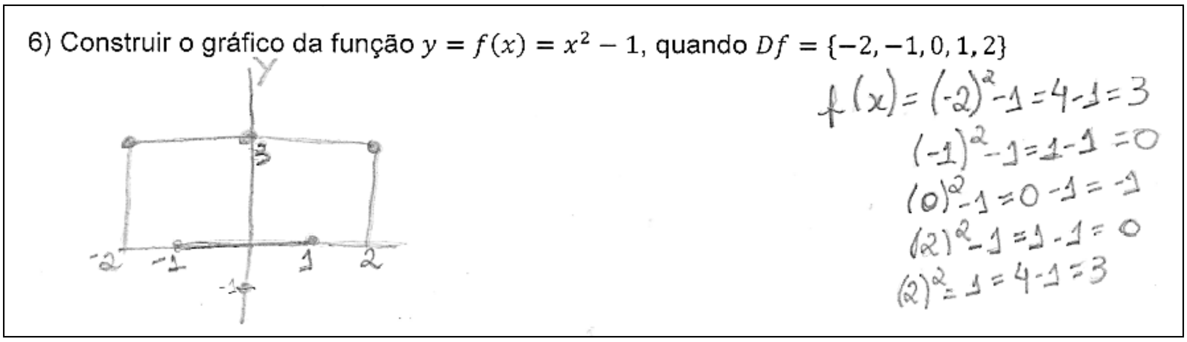
RESPOSTAS DOS ALUNOS	Nº DE ALUNOS
Relacionou corretamente os elementos do Domínio e encontrou o conjunto Imagem, e ao construir o gráfico, identificou o Domínio como sendo um conjunto discreto de pontos	2
Relacionou corretamente os elementos do Domínio e encontrou o conjunto Imagem, porém ao construir o gráfico considerou o conjunto dos Reais como Domínio. Não identificou o domínio como sendo um conjunto discreto de pontos	4
Encontrou os elementos do conjunto imagem, não identificou o	18

Domínio como sendo um conjunto discreto de pontos. Ao considerar como domínio os Reais, não soube construir o gráfico corretamente	
Deixou em branco ou não construiu o gráfico	3

Fonte: Dados da pesquisa.

Em relação aos alunos que conseguiram resolver a questão conforme esperado, destaca-se o aluno A26, apresentada na figura 6.

Figura 6 - Resposta do aluno A26 à questão 6

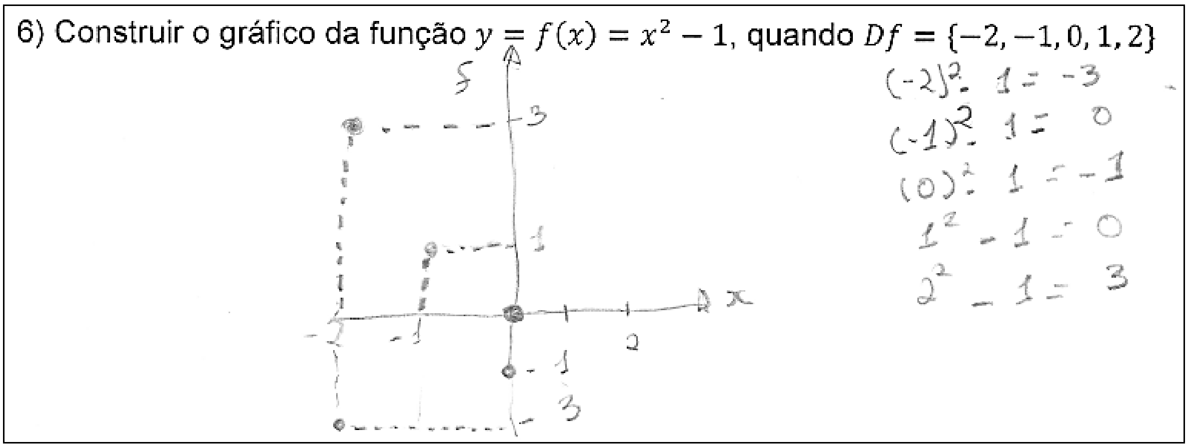


Fonte: Dados da pesquisa.

Nota-se que o aluno A26 encontrou os elementos do conjunto Imagem, mas, ao construir o gráfico, representou o conjunto do domínio como um conjunto discreto de pontos isolados. Outros alunos determinaram os elementos pertencentes ao conjunto imagem, porém, ao construir o gráfico, consideraram o domínio como sendo o conjunto dos números Reais. Diante do par ordenado (x, f(x)), os alunos indicaram os pontos no plano cartesiano e efetuaram a ligação entre eles, encontrando a curva que representa uma parábola da função dada $x^2 - 1$. De modo equivocado, esses participantes consideraram elementos não pertencentes ao conjunto discreto dado no enunciado. Quanto à curva que representa a função, houve casos em que, após aplicar os elementos do domínio na lei de formação da função dada e obter os elementos da Imagem, o aluno indicou corretamente os pontos no plano cartesiano, mas desconsiderou o Domínio fornecido. Ao traçar a curva, que se trataria de uma parábola, os alunos traçaram seguimentos de reta com origem em pontos que interceptam o eixo das ordenadas e de modo que interceptassem as raízes da função.

Houve casos em que os alunos não souberam construir os gráficos, vários deles encontraram os elementos do conjunto imagem e representaram os pontos no plano cartesiano, porém, de forma equivocada, como no registro do aluno A14, conforme figura 7.

Figura 7 - Resposta do aluno A14 à questão 6



Fonte: Dados da pesquisa.

É possível observar que o aluno registrou os pontos de forma incorreta. Ao aplicar o elemento $\{-2\}$ na função dada, o aluno cometeu um erro em relação às regras de sinais, talvez por motivo de descuido, visto que quando aplicado o elemento $\{-1\}$ o valor foi encontrado corretamente. Em um segundo momento, nota-se que A14 não reconheceu os pares corretamente. No registro feito por ele ao aplicar o elemento {-1} obteve o elemento $\{0\}$, formando o par ordenado *(-1,0),* mas sua representação gráfica foi o par $(-1,1)$ e o mesmo ocorreu com o ponto (0,0). Por fim, constata-se que o aluno apresentou dificuldade em encontrar os pares ordenados. Ainda, ocorreram casos em que os alunos tiveram dificuldades em estabelecer os eixos corretamente, havendo confusão ao identificar o eixo *y,* das ordenadas, e o eixo *x*, das abscissas.

A questão 7 (sete) referia-se a conceitos de Função Constante. Esperava-se que os alunos, a partir de valores definidos para *x* e uma função constante dada, conseguissem encontrar os pares $(x, f(x))$ e traçassem o gráfico da função, identificando o domínio como um conjunto discreto de pontos.

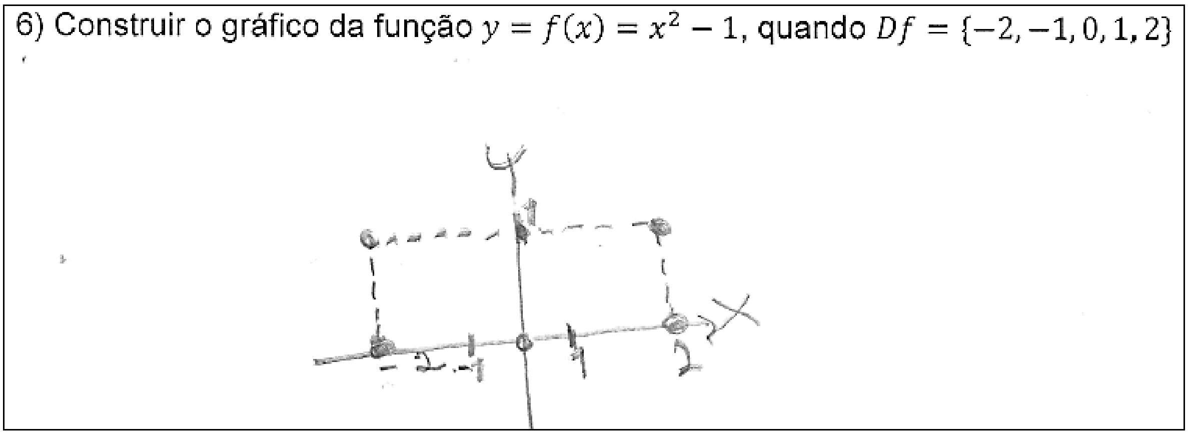
Tabela 4 - Grupos de respostas dadas pelos alunos à questão 7

RESPOSTAS DOS ALUNOS	Nº DE ALUNOS
Identificou o conjunto Imagem, considerou o Domínio como um conjunto discreto de pontos e construiu o gráfico corretamente	6
Identificou o conjunto Imagem, porém na construção do gráfico não considerou o Domínio como sendo um conjunto discreto	6
Deixou em branco, não identificou o conjunto Imagem ou não construiu o gráfico	15

Fonte: Dados da pesquisa.

Essa questão foi respondida como esperado por apenas seis alunos. Nos registros analisados pode-se observar que todos eles identificaram que em uma função constante existe apenas um elemento pertencente ao contradomínio, que também é a imagem da função. A figura 8 (oito) apresenta um exemplo de resolução esperada, feita pelo aluno A23:

Figura 8 - Resposta do aluno A23 à questão 7

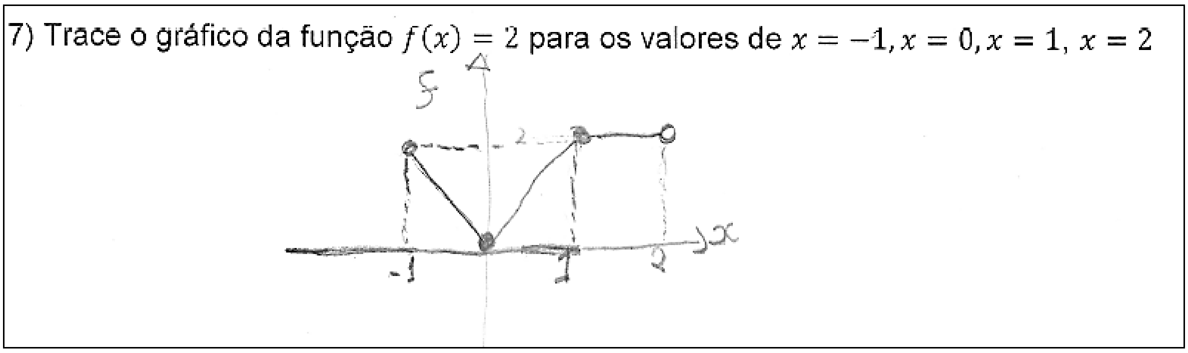


Fonte: Dados da pesquisa.

Observa-se que o aluno A23 reconheceu os pontos pertencentes ao conjunto discreto do domínio, e não traçou a curva que representaria uma reta paralela ao eixo das abscissas. Já outros 6 (seis) participantes traçaram uma reta horizontal ao eixo das abscissas, conforme tabela 4.

Em outros casos, os alunos construíram curvas diversas, como a do participante A14 (Figura 9):

Figura 9 - Resposta do aluno A14 à questão 7



Fonte: Dados da pesquisa.

Neste registro, o aluno representa no plano cartesiano o par *(0,0)* equivocadamente, visto que o correto seria *(0,2)*. Assim, além de traçar uma curva ligando os pares ordenados, o aluno demostrou não reconhecer o domínio como um conjunto discreto de pontos.

Em outros casos, o aluno criou uma lei de formação para a função dada, modificando a função original. Com isso, obteve um novo conjunto imagem, o que ocasionou no esboço de uma função linear, por exemplo. O gráfico traçado pelo aluno, com os elementos obtidos pela nova função estabelecida, estava correto.

A questão 9 (nove) exigia que o aluno, a partir do conceito de função, realizasse uma análise do gráfico referente a variação entre duas grandezas (Km/l e Km/h) e assinalasse a alternativa correta, justificando sua escolha. O aluno deveria perceber que o ponto de maior economia, por exemplo, ocorreria quando um carro estivesse andando a 60 km/h, em que seu consumo seria de $10km/l$. Os registros foram categorizados conforme a tabela 5.

Tabela 5 - Grupos de respostas dadas pelos alunos à questão 9

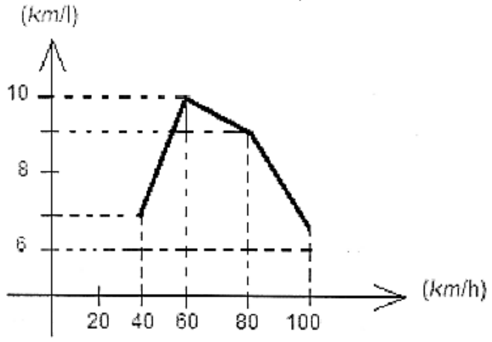
RESPOSTAS DOS ALUNOS	Nº DE ALUNOS
Assinalou a alternativa correta e justificou corretamente.	8
Assinalou a alternativa correta, porém não soube justificar de forma considerável.	1
Não assinalou a alternativa correta.	16
Deixou em branco.	2

Fonte: Dados da pesquisa.

Na análise das respostas dos alunos destaca-se a resolução de A17, figura 10. Observa-se que esse aluno analisou corretamente o gráfico, visto que, ao justificar, ele compreendeu que o menor consumo ocorria quando o automóvel estava a 60 km/h, efetuando a divisão $\frac{60\ km/h}{10\ km/l}$ e indicando que em uma hora nessa velocidade o carro irá consumir 6 litros de combustível.

Figura 10 - Resposta do aluno A17 à questão 9

9) O gráfico a seguir mostra o consumo de combustível de um veículo na dependência da velocidade por ele desenvolvida.
A análise do gráfico mostra que: (Justifique)



~~a)~~ O menor consumo se dá aos 60 km/h;
b) A partir de 40 km/h, quanto maior é a velocidade, maior é o consumo;
c) O consumo é diretamente proporcional à velocidade;
d) O consumo é inversamente proporcional à velocidade;

R: Pois Segundo o grafico aos 60Km/h, Ele gastou Apenas 6 litros de gasolina.

Fonte: Dados da pesquisa.

Em relação aos alunos que não assinalaram a alternativa correta, destacam-se casos que demonstram compreensões errôneas sobre proporcionalidade entre grandezas. Alguns não compreenderam corretamente o conceito de grandezas diretamente proporcionais, justificando que “quando a velocidade é menor, gasta mais, velocidade maior força menos o motor, gastando menos [...]”, o que contraria que as grandezas velocidade e consumo sejam diretamente proporcionais.

Em outro caso, os alunos apresentaram uma compreensão errônea do conceito de grandezas inversamente proporcionais, ao justificarem que “quanto maior a velocidade, maior a queima de combustível”, o que contraria que as grandezas sejam inversamente proporcionais, como assinalado por eles.

Considerações finais

Esta pesquisa buscou compreender as principais dificuldades dos alunos em relação ao conteúdo de Função, representada graficamente. Em grande parte das pesquisas consultadas, como Booth (1994), Ponte, Branco e Matos (2009), a passagem da Aritmética para a Álgebra ocasiona grande parte das dificuldades iniciais. O caso do aluno A19 é um exemplo de quando os estudantes ainda operam em Álgebra com as regras aprendidas na Aritmética.

A representação gráfica é considerada por Markovits, Eylon e Bruckheimer (1994) como sendo mais fácil para os alunos compreenderem e identificarem, dado ao seu aspecto visual; no entanto, nesta pesquisa, os participantes apresentaram dificuldade na identificação de componentes como domínio, imagem e contradomínio.

Outra dificuldade, provavelmente decorrente da anterior, refere-se ao esboço do gráfico. Nos casos em que diante de curvas, os alunos deveriam identificar quais representavam uma função, eles justificavam levando em consideração o procedimento de traçar retas verticais, sem saber justificar o porquê de seu uso. Diante de uma função os alunos traçaram curvas considerando o conjunto dos números Reais como o domínio. No caso de o domínio ser formado por pontos discretos, a maioria dos alunos uniu os pontos do gráfico. Esses equívocos podem estar atrelados ao fato de que, muitas vezes, ao trabalhar com funções em sua forma gráfica, os professores tendem a considerar domínios diferentes do Conjunto dos Números Reais e a pouco explorar funções de várias sentenças ou funções polinomiais de grau maior que dois.

Ao iniciar a análise, conjecturava-se que as dificuldades estavam apenas relacionadas ao conceito de função. Porém, contatou-se que em alguns casos, os alunos que evidenciaram compreender o conceito de função, quando diante de sua representação gráfica, mostraram não saber aplicá-lo e utilizá-lo em situações-problema. Frente a um gráfico, os alunos apresentaram dificuldades desde a representação correta dos pontos no plano cartesiano, na identificação do domínio para traçar o gráfico, até a compreensão da Função Constante.

No caso desses participantes, outra preocupação relacionada é o fato de serem alunos concluintes do Ensino Médio e que já estudaram os vários tipos de representação de função, bem como seus diversos tipos. No entanto, esses alunos associaram função à sua representação gráfica linear, que pode refletir a ênfase do ensino que tiveram nas funções de 1º grau.

Referências

BOOTH, Lesley Rochelle. Dificuldades das crianças que se iniciam em álgebra. In: COXFORD, Arthur F. SHULTE, Albert P. (Org.). **As ideias da álgebra**. São Paulo: Atual Editora, 1994. p. 23-36.

BRASIL. Ministério da Educação, Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998.

______. Ministério da Educação, Secretaria da Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática. Brasília: MEC/SEMTEC, 2000.

______. Ministério da Educação, Secretaria da Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais +**. Brasília: MEC/SEMTEC, 2002.

______. Ministério da Educação, Secretaria da Educação Média e Tecnológica. **Orientações curriculares para o ensino médio**: ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília: MEC/SEB, 2006.

______. Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC/SEB, 2018.

BOTTA, Eliane Saliba. **O ensino do conceito de função e conceitos relacionados a partir da resolução de problemas**. 2010. 427 f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro/SP, 2010.

CARAÇA, Bento de Jesus. **Conceitos Fundamentais da Matemática**. Lisboa, Gráfica Brás Monteiro, 1984.

MARKOVITS, Zvia; EYLON, Bat; BRUCKHEIMER, Maxim. Dificuldades dos alunos com o conceito de função. In: COXFORD, Arthur F. SHULTE, Albert P. (Org.). **As ideias da álgebra**. São Paulo: Atual Editora, 1994. p. 49-69.

MENEGHETTI, Renata Cristina Geromel; REDLING, Julyette Priscila. Tarefas Alternativas para o Ensino e a Aprendizagem de Funções: análise de uma intervenção no Ensino Médio. **Bolema**, Rio Claro, v. 26, n. 42A, p. 193-229, abr. 2012.

OLIVEIRA, Nanci de. **Conceito de função**: Uma abordagem do Processo Ensino-aprendizagem.1997. 174 f. Dissertação (Mestrado) Pontifícia Universidade Católica. São Paulo, 1997.

PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação do Paraná. Departamento de Educação Básica. **Diretrizes Curriculares da Educação Básica**: Matemática. Curitiba: SEED, 2008.

PONTE, João Pedro da. **O conceito de Função no currículo de Matemática**. Educação e Matemática, Lisboa, n. 15, p.3-9, 1990.

PONTE, João Pedro da; BRANCO, Neusa; MATOS, Ana. **Álgebra no Ensino Básico**. Ministério da Educação de Portugal. Direção Geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular. Portugal, 2009.

SIERPINSKA, Anna. **Understanding in mathematics**. London: The Falmer Press, 1994.

USISKIN, Zalman. Concepções sobre a álgebra da escola média e utilizações das variáveis. In: COXFORD, Arthur F. SHULTE, Albert P. (Org.). **As ideias da álgebra**. São Paulo: Atual Editora, 1994. p. 9-22.