ANÁLISE DA VARIAÇÃO DE FUNÇÕES ENSINADA ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

FUNCTION VARIATION ANALYSIS TAUGHT THROUGH PROBLEM SOLVING

Eliane Bihuna de Azevedo

Universidade do Estado de Santa Catarina, eliane.azevedo@udesc.br

Elisandra Bar de Figueiredo

Universidade do Estado de Santa Catarina, elisandra.figueiredo@udesc.br

Pedro Manuel Baptista Palhares

Universidade do Minho, palhares@ie.uminho.pt

Resumo

Este trabalho é o recorte de uma pesquisa de doutoramento que visou inserir a metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de Resolução de Problemas para ensinar conteúdos de Cálculo Diferencial e Integral. Este texto apresenta uma sequência didática preparada para abordar o conteúdo de análise da variação de funções reais de uma variável real usando essa abordagem metodológica. A referida sequência didática foi aplicada em duas turmas dos cursos de Licenciaturas da Universidade do Estado de Santa Catarina. Percebemos que essa tarefa contribuiu positivamente para a aprendizagem dos estudantes, pois a maioria dos participantes foi capaz de elaborar as conjecturas corretas e almejadas pelos pesquisadores. Outra contribuição desse trabalho está relacionada com o ensino: tecemos alguns comentários e dicas aos professores que desejem inserir essa abordagem metodológica em sala, mas não se sintam familiarizados com ela.

Palavras-chave: Resolução de Problemas. Cálculo Diferencial e Integral. Sequência Didática. Análise da Variação de Funções.

Abstract

This work is part of a doctoral research that aimed to insert the Problem-Solving teaching-learning-evaluation methodology to teach the contents of Differential and Integral Calculus. This text presents a didactic sequence designed to approach the contents of the variation analysis of one-real-variable real functions using such methodological approach. Such didactic sequence was applied to two classes of undergraduate programs of Santa Catarina State University. The tasks had a noticeably positive contribution to students' learning, since most of the participants were able to elaborate the correct conjectures as expected by the researchers. Another contribution of this work regards teaching: we make some comments and provide tips to teachers who wish to insert this methodological approach in their classes, but are not yet familiar with it.

Keywords: Problem Solving. Differential and Integral Calculus. Didactic Sequence. Function Variation Analysis.

Introdução

A aplicabilidade dos conceitos do Cálculo moderno em diversas áreas de conhecimento, como Física, Química, Matemática, Engenharias, Medicina, Biologia, dentre outras, é notória. Devido a importância de seus conceitos, o Cálculo Diferencial e Integral é componente curricular obrigatória nas primeiras fases de todos os cursos de graduação da área de Ciências Exatas das universidades brasileiras. Entretanto, o insucesso de muitos estudantes na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral (CDI) funciona como propulsor de diversas pesquisas acadêmicas de professores preocupados com o seu ensino e aprendizagem (PAGANI; ALLEVATO, 2014). Dentre os motivos desse insucesso, a literatura aponta as dificuldades oriundas da matemática supostamente já aprendida no Ensino Básico (CURY, 2009; LIMA; SILVA; SANTOS Jr; ALMEIDA, 2014); distanciamento entre o que é ensinado no Ensino Básico e no Superior (MENESTRINA; GOUGARD, 2003); dificuldades de natureza epistemológica (REZENDE, 2003) e metodologia de ensino adotada (RAFAEL; ESCHER, 2015; PAGANI; ALLEVATO, 2016), pois geralmente as aulas de CDI são do estilo tradicional (ABDELMALACK, 2011; NOGUTI, 2014) ou expositiva dialogada. Nesse ambiente, os estudantes são acostumados a aceitarem as resoluções apresentadas pelo professor, sem muitos questionamentos, pois nem sempre o docente propicia tal interação. Além disso, corroboramos com Pagani e Allevato (2016, p. 92) em que se o docente adota a postura “de resolver o problema, antes mesmo que esse aluno reflita sobre ele, o aluno, geralmente, não considera outras maneiras de resolvê-lo”.

A experiência docente dos autores desse texto os permite identificar que as dificuldades que resultam no fracasso em CDI dos estudantes do Centro de Ciências Tecnológicas da Universidade do Estado de Santa Catarina são similares a esse cenário. Essa realidade motivou a primeira autora desse texto experenciar como seria o ambiente da sala de aula mudando a metodologia de ensino adotada, pois, na época lecionava a disciplina de CDI há quase uma década e suas aulas sempre foram do estilo expositiva dialogada. Esse estilo de aula caracteriza-se pelo professor estabelecer um diálogo com os alunos buscando ser um mediador na construção do conhecimento relacionado ao conteúdo que deseja trabalhar (ANASTASIOU; ALVES, 2006). Entretanto, apesar de adotar essa metodologia, a professora doutoranda não costumava deixar muito tempo para que seus estudantes refletissem sobre o que estavam fazendo nem tempo de resolverem exercícios em sala de aula. Para tanto, propôs um projeto de tese cujo objetivo era desenvolver estratégias para utilizar a metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática para ensinar conteúdos de CDI através da Resolução de Problemas (RP) durante os horários regulares de aula (AZEVEDO, 2019). Esse texto é um recorte dessa pesquisa de doutoramento[1] e tem por objetivo apresentar a sequência didática que foi desenvolvida para abordar o conteúdo de Análise da Variação de Funções reais de uma variável real para ensinar o assunto através da RP bem como análise qualitativa[2] de alguns dos resultados dessa atividade. Além disso, iremos apresentar algumas orientações ao professor que esteja interessado em implementar essa tarefa por meio dessa metodologia e não esteja familiarizado com ela. Para tanto, foi usada a experiência docente adquirida com a pesquisa de doutoramento, proveniente da nossa interpretação para o uso do roteiro de orientações ao professor na condução de uma aula usando a metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de RP de Allevato e Onuchic (2014). Essa sequência didática foi experenciada em duas turmas de CDI dos cursos de Licenciatura em Matemática e Licenciatura em Química da Universidade do Estado de Santa Catarina, cujas aulas eram ministradas pela professora doutoranda.

Na primeira parte desse artigo será feito um breve resgate histórico da constituição da RP como metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação. Na segunda parte, será apresentada a sequência didática para desenvolvimento do conteúdo de Análise de Variação de Funções através da RP, explicitando os conteúdos relacionados ao tema da sequência didática que podem ser formalizados ao finalizar a aplicação da atividade. E, de forma sucinta, será exposto como foi o desenvolvimento dessa tarefa em sala de aula com alguns comentários de cunho orientativo ao professor que deseje experenciar a RP. Na última parte desse texto, exibiremos a análise qualitativa das conjecturas elaboradas pelos estudantes em quatro itens da sequência didática e, para finalizar, teceremos alguns comentários.

Enquadramento Teórico

A resolução de problemas passou a ganhar espaço no ambiente escolar a partir de meados do século XX com a divulgação do livro *"How to Solve It?"*, do matemático húngaro George Polya (2006[3]). Uma curiosidade dessa famosa obra da Educação Matemática, que tem mais de 1 milhão de exemplares vendidos e que já foi traduzida para mais de 21 idiomas, é que antes da primeira edição ser publicada no ano 1945, foi rejeitada por quatro editoras. Alexanderson (2000[4] apud GUIMARÃES, 2011) acredita que essas recusas ocorreram por Polya estar apresentando essa abordagem inovadora para o ensino de Matemática que se opunha a corrente vigente da época tanto da área de Matemática quanto da Educação, que entre as décadas de 30 até 50 do século passado, priorizava a ênfase nas relações matemáticas, aprendizagem incidental e abordagem de atividade orientada (LAMBDIN; WALCOTT, 2007).

[1] Orientada pelos coautores desse texto.
[2] De acordo com Gerhardt e Silveira (p. 31, grifo do autor), "A **pesquisa qualitativa** não se preocupa com representatividade numérica, mas, sim, com o aprofundamento da compreensão de um grupo social, de uma organização, etc." e, segundo Gil, p. 175), "a análise dos dados na pesquisa qualitativa passa a depender muito da capacidade e estilo do pesquisador".
[3] Nesse trabalho foi utilizada a versão do livro *"How to solve it?"*, traduzida para o português do Brasil como sendo A arte de resolver problemas.
[4] Alexanderson, G. L. **The random walks of George Pólya.** MAA: Washington, DC, 2000.

Na visão de Polya (1980) o professor deve promover oportunidades dos estudantes desenvolveram a capacidade de resolverem problemas, bem como deixar o estudante “experimentar a tensão e viver o triunfo da descoberta” (POLYA, 1980, p. 2, tradução nossa), porque essas experiências contribuem para o desenvolvimento mental dos estudantes. Para tanto, o professor precisa deixar de ser “transmissor” e passar a ser “mediador” do conhecimento. A forma que Polya encontrou para auxiliar estudantes a obterem êxito na resolução de problemas foi dar orientações, por meio de questionamentos, em quatro etapas: compreensão do problema, estabelecimento de um plano, execução do plano e retrospecto (POLYA, 2006). Em uma entrevista dada a Jeremy Kilpatrick, Polya revelou que a inspiração dessa forma organizada de resolver um problema surgiu enquanto se preparava para ensinar um estudante que pretendia entrar para a escola secundária e que apresentava muitas dificuldades (PÓLYA, 2011).

No final da década de 50 do século passado, com o movimento da Matemática Moderna que fora iniciado nos Estados Unidos e espalhou-se por vários países do mundo, a RP ficou um pouco esquecida. O redescobrimento da RP de Polya se deu após a publicação do documento intitulado *“An Angend for Action”* do *National National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM, 1980) que recomendava que a RP deveria “ser o foco da Matemática escolar” (ONUCHIC, 1999, p. 204). A partir de então, diversos documentos oficiais passaram (e continuam) a indicar a RP como sendo uma estratégia de ensino a ser considerada nos currículos escolares (BRASIL, 2000, 2006, 2018; ME-DGIDC, 2007) e materiais didáticos passaram a ser produzidos com ênfase na RP afim de auxiliar o professor em sua prática docente (SCHROEDER; LESTER, 1989). Todavia, essas ações não foram suficientes para que a RP fosse efetivamente implementada na prática docente. Schroeder e Lester (1989) acreditavam que a falta de clareza de como fazer uso desses materiais produzidos por pesquisadores estava relacionada com as variadas concepções individuais e/ou de ensino de RP e que a compreensão dos mesmos é favorecida quando consegue discernir as três abordagens de ensino divulgadas por Hatfield[5] (1978[6]): ensinar *sobre* resolver problemas, ensinar *para* resolver problemas e ensinar *através* da resolução de problemas. O professor faz uso da concepção de ensino sobre RP ao adotar as quatro etapas de Polya. A abordagem mais comum nas aulas tradicionais é o ensinar para resolver problemas, que se dá quando o professor propõe problemas como aplicação do conteúdo previamente ensinado. E, na concepção de ensinar através da RP, o professor inicia um novo conteúdo com um problema que gerará “novos conhecimentos a partir de anteriores ou ao longo do processo de resolução de um ou mais problemas” (PAGANI; ALLEVATO, 2016, p. 91).

No Brasil, desde o ano de 1989, a professora Lourdes de La Rosa Onuchic, como professora colaboradora da Universidade Estadual Paulista de Rio Claro (São Paulo) iniciou suas pesquisas assumindo a Resolução de Problemas como metodologia de ensino em Educação Matemática (ONUCHIC, 1999). Em 1992, foi formado o Grupo de

---

[5] Schroeder e Lester (1989) acreditam que outros pesquisadores tenham feito a diferenciação das concepções de ensino antes de Hatfield, mas ele foi o primeiro a publicá-las.

[6] Hatfield, L. Heuristical emphases in the instruction of mathematical problem solving: Rationales and research. In L. Hatfield; A. Bradbard (Eds.). **Mathematical problem solving: Papers from a research workshop**. Columbus, OH: ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics and Environmental Education, p. 21–42, 1978.

Estudo em Resolução de Problemas (GTERP) e esse “tem sido o núcleo gerador de atividades de aperfeiçoamento, de investigações e de produção científica na linha de Resolução de Problemas” (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011, p. 75). Onuchic (1999) relata que ao desenvolver o projeto intitulado “Ensinando Matemática através da Resolução de Problemas”, entre os anos de 1997 e 1998, cujos participantes eram professores, ensinar Matemática através da RP

> constitui-se num caminho para ensinar matemática e não apenas para se ensinar a resolver problemas. Estabelecemos que um **problema é tudo aquilo que não se saber fazer mas que se está interessado em resolver**, que o **problema passa a ser o ponto de partida** e que, através da Resolução de Problemas, os professores devem fazer conexões entre os diferentes ramos da matemática, gerando novos conceitos e novos caminhos. (ONUCHIC, 1999, p. 215, grifo nosso).

Atendendo ao pedido dos participantes desse projeto do grupo GTERP, conjuntamente com os professores, foi elaborado um esquema para orientar ao docente como poderia conduzir uma aula cujo foco fosse ensinar através da resolução de problemas, buscando compreensão e significado ao conteúdo matemático, que surgiu a primeira versão do roteiro de atividades que visava orientar o professor em como conduzir uma aula de Matemática através da RP. A saber, o roteiro era: formar grupos – entregar a atividade; o papel do professor; registrar os resultados na lousa; realizar uma plenária; analisar os resultados; buscar um consenso; fazer a formalização (Onuchic, 1999). Entretanto, de acordo com Onuchic e Allevato (2011) nas pesquisas que adotaram esse roteiro os professores revelaram dificuldades ao trabalhar dessa forma e, por vezes, sentiam dificuldades em conduzir a aula e, até mesmo, nos conteúdos que iriam desenvolver com os estudantes. Essas autoras relatam ainda que “tentando atender à demanda de prover os alunos de conhecimentos prévios necessários ao desenvolvimento mais produtivo da metodologia” (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011, p. 83) o roteiro foi reestruturado. Assim, originou-se o segundo roteiro de orientação ao professor de como conduzir uma aula através da RP, que é constituído de nove etapas: preparação do problema; leitura individual; leitura em conjunto; resolução do problema; observar e incentivar; registro das resoluções na lousa; plenária; busca do consenso; formalização do conteúdo (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011). Uma versão mais atual desse roteiro, publicada em Allevato e Onuchic (2014, p. 45), adiciona uma décima etapa ao segundo roteiro do GTERP, que consiste na “proposição de novos problemas”. A pesquisa de doutoramento ao qual este trabalho está vinculado adotou esse roteiro de dez etapas para ensinar os conteúdos de CDI através da metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de RP através da resolução.

Com relação à tríade que aparece como uma palavra composta ensino-aprendizagem-avaliação[7], Allevato e Onuchic (2014, p. 43) a usam porque entendem que “o ensino, a aprendizagem e a avaliação devem ocorrer simultaneamente durante a construção do conhecimento pelo aluno, com o professor atuando como guia mediador”. Quanto à avaliação, essa ocorre continuamente, por parte do professor, pois conforme

[7] O termo avalição passou a integrar a expressão metodologia de ensino-aprendizagem a partir da pesquisa de mestrado de Pironel (2002).

identifica dúvidas, interpretações errôneas ou equivocadas dos grupos no momento de resolução de um problema, o docente pode promover uma discussão coletiva durante a resolução e até mesmo reestruturar a aula em andamento, fazendo um misto das concepções de ensino visando a melhor compreensão do estudante. Com respeito a essa mistura das três concepções de ensino em uma mesma aula, Onuchic (1999) afirma que isso poderia ocorrer. Um exemplo de que o professor sentiu a necessidade de alterar o viés da abordagem metodológica em virtude do processo contínuo de avaliação pode ser consultado em Pagani e Allevato (2016). Na aplicação da sequência didática a ser apresentada na próxima seção, em alguns atendimentos aos grupos de trabalho, a professora pesquisadora sentiu a necessidade de fazer essa mescla de concepções intencionando sempre o estudante/grupo ter condições de seguir de forma independente a construção do conhecimento.

Proposta de Aula – Sequência Didática

Nessa seção apresentaremos na íntegra a sequência didática desenvolvida para introduzir o conteúdo de Análise da Variação de Funções com alguns comentários/conselhos sobre o desenvolvimento de uma aula mediada pela metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de RP sob a concepção de ensinar através da RP no Ensino Superior. O objetivo dessa sequência didática foi abordar os seguintes assuntos: intervalos de (de)crescimento de uma função, ponto(s) crítico(s), ponto(s) de máximo/mínimo local(is)/relativo(s), ponto(s) de inflexão, estudo da concavidade do gráfico de uma função.

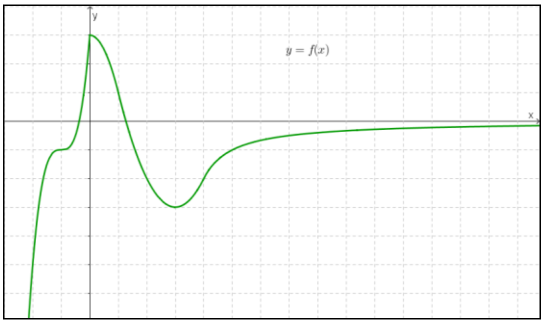
Para tanto, forneceu-se o gráfico de uma função e, a partir da análise gráfica, os estudantes deveriam responder doze itens. Os cinco primeiros estavam relacionados com assuntos que já eram de conhecimento dos estudantes: continuidade, diferenciabilidade e intervalos de (de)crescimento da função dada. A partir do sexto item o estudante deveria identificar: o sinal do coeficiente angular da reta tangente, intervalo(s) de (de)crescimento da função primeira derivada, intervalo(s) em que a segunda derivada era positiva/negativa/nula. Depois disso, era suscitado ao estudante que a partir das suas respostas e observações (oriundas da sobreposição dos gráficos de função com o gráfico da função primeira derivada; do gráfico da função primeira derivada com o gráfico da função segunda derivada; e, do gráfico da função com o gráfico da função segunda derivada) elaborasse conjecturas a respeito de possível(is) relações existentes entre: (de)crescimento da função e sinal da primeira derivada; concavidade do gráfico de uma função e o (de)crescimento da função primeira derivada; (de)crescimento da função primeira derivada com o sinal da segunda derivada da função; e, a concavidade do gráfico de uma função com o sinal da sua segunda derivada. Com essas indagações esperava-se dar condições aos estudantes, de forma intuitiva, concluírem algumas definições (por exemplos, de concavidade) e resultados de teoremas de Cálculo relacionados com o assunto em questão (por exemplo, critério de determinação de extremos).

A proposta de aula a ser apresentada na próxima subseção foi desenvolvida em seis horas-aula[8], sendo duas horas aula em cada dia de aula de CDI. Ao planejá-la já tínhamos a consciência de que não seria possível concluí-la no mesmo dia de aula. Nas duas primeiras aulas as equipes resolveram todos os itens propostos (ou seja, chegou-se até a quinta etapa do roteiro de atividades do grupo GTERP). No segundo dia de aula foi feita a discussão e formalização do conteúdo (que correspondem as etapas de 6 a 9 do roteiro). No terceiro dia de aula, que corresponderiam a quinta e sexta aula, foram propostos novos problemas (décima etapa do roteiro).

A proposta de aula

Considere a função f cujo gráfico está ilustrado na Figura 1.

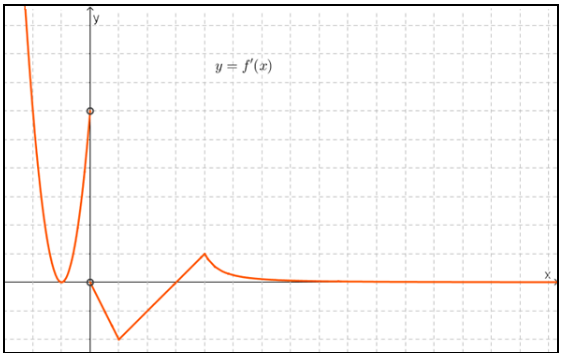
Figura 1 – Gráfico de f



a) Você acredita que f tem um valor máximo? E valor mínimo? Caso afirmativo, em que ponto(s)? Justifique sua resposta.
b) Em que intervalo(s) f é crescente? E decrescente?
c) A função f é contínua em todo seu domínio? Por quê?
d) A função f é diferenciável em todo seu domínio? Por quê?
e) Na Figura 1 represente segmentos de retas tangentes ao longo de todo o domínio de f. A seguir, responda, em que intervalos as retas tangentes têm inclinação positiva? E negativa? E nula?
f) Compare suas respostas dos itens “e” e “b”. Conjecture alguma relação entre o (de)crescimento de uma função e o sinal da função primeira derivada?
g) Em que intervalo(s) o gráfico de f tem concavidade voltada para baixo? E para cima?
h) Na Figura 2 encontra-se o gráfico da função primeira derivada de f. Use-o para identificar em que intervalos a função f' é (de)crescente.

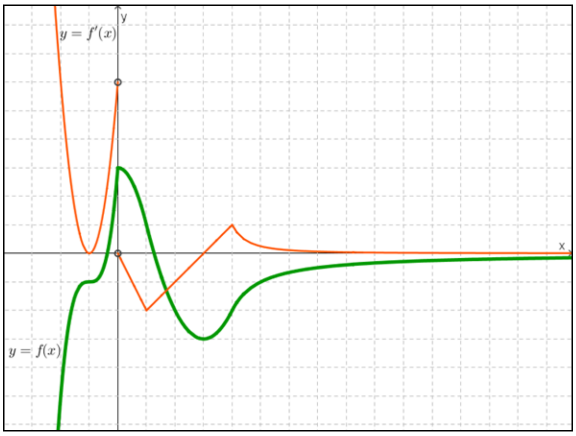
Figura 2 – Gráfico de f'

[8] Uma hora-aula corresponde a 50 minutos.



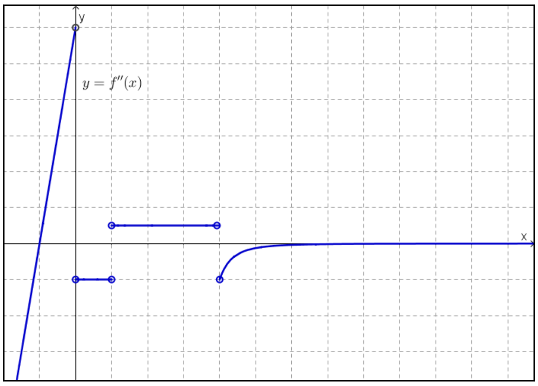
i) A Figura 3 apresenta os gráficos das funções f e f' sobrepostos. Use os itens "g" e "h" para conjecturar alguma possível relação existente entre a concavidade do gráfico de uma função e o (de)crescimento da função primeira derivada de f.

Figura 3 – Gráfico de f e f'



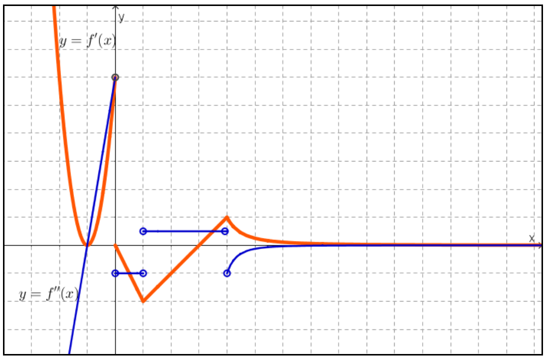
j) A Figura 4 apresenta o gráfico da função segunda derivada de f. Em que intervalos f'' é positiva? E negativa? E nula?

Figura 4 – Gráfico de f''



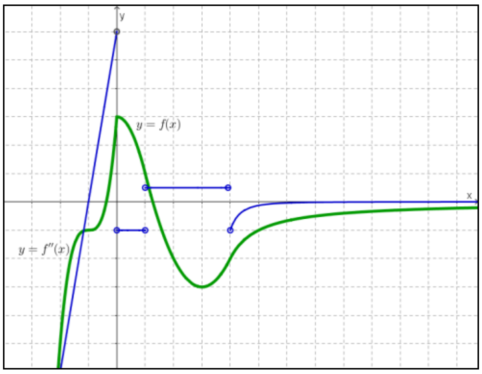
k) A Figura 5 apresenta os gráficos de f' e f'' sobrepostos. Use os itens "h" e "j" para conjecturar alguma possível relação existente entre (de)crescimento da função f' com o sinal da função f''.

Figura 5 – Gráfico de f' e f''



l) A Figura 6 apresenta os gráficos de f e f'' sobrepostos. Use os itens “g” e “j” para conjecturar a relação entre a concavidade do gráfico de f e o sinal de f''.

Figura 6 – Gráfico de f e f''



Na próxima subseção será descrita de forma breve como foi, na prática, o desenvolvimento dessa sequência didática. Além disso, faremos alguns comentários/observações que julgarmos pertinentes para auxiliar os professores que desejem implementar essa proposta de aula e não estejam familiarizados com o uso da metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de RP.

Desenvolvimento da proposta de aula fazendo uso da metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de RP

Antes de iniciar qualquer atividade que envolva alguma metodologia que os estudantes não estão habituados é interessante que o professor explique detalhadamente como transcorrerá a aula para que se sintam mais seguros. Na experiência de ensino aqui relatada esses esclarecimentos foram feitos no primeiro dia letivo de aula no momento que a professora (primeira autora) apresentou o plano de ensino, explicou que suas turmas iriam compor o público participante de sua pesquisa de doutoramento cuja temática era o uso da metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de RP buscando ensinar CDI através da RP. Nesse momento, explicou detalhadamente a dinâmica de uma aula com essa abordagem metodológica e com consentimento de seus estudantes foi possível concretizar a coleta de dados de sua pesquisa.

Ao iniciar a aula o professor deve formar ou solicitar que se formem grupos de trabalho. O número de integrantes e o critério de formação do grupo fica a cargo do professor combinar com a turma. Por ter experienciado o uso dessa metodologia em sala de aula, aconselhamos que sejam formadas equipes de até quatro membros, pois em grupos com número maior de integrantes, os estudantes se distraem mais facilmente com assuntos não relacionados com a tarefa proposta. Após ou enquanto os grupos se organizam, o professor distribui o material impresso aos estudantes para cada integrante ou um por grupo. Observamos que ao distribuir material para cada integrante da equipe, alguns estudantes tendem a querer resolver a atividade de forma independente e discutir com os demais integrantes da equipe somente no momento em que tem dúvidas. Portanto, se o professor optar por esse caminho, deverá “auxiliar” os estudantes a manterem o foco na tarefa proposta.

Geralmente, assim que os estudantes recebem a atividade eles já iniciam a leitura individual. Em seguida, recomenda-se fazer a leitura em grupo. Esse grupo pode ser interpretado como cada uma das equipes de trabalho, assim como pode ser considerado toda a turma. Ao adotarmos essa metodologia, costumamos fazer a leitura com a turma, pois é o momento do professor esclarecer dúvidas no que se refere ao entendimento do problema proposto. Em particular, nessa aula em que a atividade foi resolvida, os estudantes manifestaram-se dizendo que não queriam que a leitura conjunta fosse realizada. Por isso, a professora respeitou a decisão da turma e sugeriu que não se preocupassem em encontrar a representação analítica da função ilustrada na Figura 1, pois o objetivo da proposta era trabalhar com a análise gráfica. Essa recomendação foi dada, porque pelo gráfico fornecido poderia ser difícil encontrar a lei de formação da função, além de dispenderem muito tempo para tal atividade e essa não era a intenção.

Ao ser distribuída a sequência didática, de partida, ela assustou os estudantes devido ao seu “tamanho”, pois foram entregues três folhas impressas para cada integrante da equipe contendo ao todo seis gráficos. Apesar do impacto inicial, conseguiram desenvolvê-la por completo[9].

Do item “a” até o item “e”, os grupos conseguiram responder com facilidade o que estava sendo solicitado, pois compreendiam os termos que estavam sendo utilizados e estavam relacionados a conteúdos já estudados. No item “f”, a professora teve de auxiliar várias equipes no confronto das informações solicitadas. Acreditamos que isso tenha ocorrido porque do item “e” para o “f” ficou uma passagem muito direta, pois no primeiro desses itens falava-se em coeficiente angular e, no segundo, em derivada. Por isso, a mediação da professora foi no sentido de, por meio de questionamentos, auxiliar os alunos a encontrarem a conexão existente entre inclinação de reta tangente e a derivada de uma função (num ponto). No item “g”, muitas equipes solicitaram auxílio para entender o que significa concavidade para cima/para baixo, pois antes de trabalhar com análise de variação das funções em CDI, os estudantes ouvem esse termo apenas ao estudar parábolas e o gráfico da Figura 1 não era uma parábola. Para mediar essa dúvida, a professora partiu de onde os estudantes conheciam o termo concavidade para cima e/ou para baixo, que no caso, era da parábola. A professora fazia o esboço de uma parábola “inteira”. Depois de todos os membros da equipe demostrarem que estavam entendendo do que ela falava, a professora fazia “cortes” na parábola. Esses cortes eram antes ou após seu vértice. E, mostrando a menor parte do gráfico seccionado (que parecia uma reta) questionava o grupo a respeito da concavidade. Retornando a parábola que a

[9] Exceto uma equipe que não conclui a atividade porque a começou muito tempo depois do início da aula.

originou, respondiam que a concavidade era a mesma. Depois dessa justificativa, analisaram o gráfico da Figura 2, seccionando-o e analisando cada uma dessas partes. No confronto das informações solicitadas no item “i” pelas equipes que pediram auxílio para interpretar essa questão, a professora usou algum objeto, como por exemplo, uma régua, para percorrer o gráfico de forma que facilitasse a identificação do comportamento de f (crescente/decrescente) e a concavidade. Após a régua deslizar sobre o primeiro intervalo, os estudantes demonstravam ter entendido e a professora os deixava seguirem nas análises. No item “l” algumas equipes confundiram o que se pedia. Era solicitado intervalos em que o sinal da derivada segunda era positivo/negativo, mas interpretaram como crescente/decrescente/constante. Os grupos em que a professora identificou o erro, durante a resolução, ela interviu e eles corrigiram o erro. Acreditamos que esse tenha ocorrido porque em outros dois itens já haviam analisado crescimento/decrescimento. Os demais itens, relacionados às conjecturas, quase todas as equipes conseguiram elaborar as conjecturas almejadas pelos pesquisadores, sem necessidade de auxílio da professora, pois o raciocínio lógico necessário era similar ao já utilizado em itens anteriores.

No segundo dia de aula foi realizada a socialização das respostas. Para tanto, tivemos de adaptar a sexta etapa do roteiro de Onuchic e Allevato (2014), que corresponde ao “registro das atividades na lousa”, para que depois seja feita a “busca do consenso” da resposta adequada diante do exposto pela turma. Ao final do primeiro dia de aula, a professora recolheu todo o material escrito produzido pelos estudantes (um por equipe) e digitalizou-o. A seguir, selecionou as variadas respostas apresentados pelos grupos e preparou uma apresentação em *PowerPoint* com essas resoluções. No dia da plenária, a dinâmica em sala de aula foi a seguinte: antes de iniciar a discussão, a professora pedia respeito para com a resposta dos colegas; no momento em que uma resposta foi escolhida para ser apresentada, era considerada a resposta do grupo; e, a turma devia se manifestar mostrando concordância ou não com a resposta apresentada. Essa dinâmica foi adotada para agilizar a discussão e mostrar respostas variadas, pois em sala de aula, conforme o número de respostas, além do fator tempo gasto para registro das atividades na lousa, pode faltar espaço físico para tal registro na lousa.

Por essa atividade ser longa, a etapa da “formalização do conteúdo” não ocorreu em um único momento. À medida que a discussão dos itens da tarefa em questão propiciava alguma definição e/ou resultado de algum teorema, esses eram formalizados. A Quadro 1 apresenta uma sugestão “de que” conteúdos formalizar e “em que” momento da discussão da Tarefa a formalização pode ser feita com a adaptação que fizemos na forma de utilizar o roteiro de Allevato e Onuchic (2014).

Quadro 1: Sugestão de momentos propícios para formalização de conteúdos

Após discutir o item	**O que é possível formalizar?**
a	Definir pontos de máximos/mínimos locais ou relativos e globais ou absolutos.
b	Definir função crescente/decrescente
f	Teorema que relaciona (de) crescimento de uma função com o sinal da derivada primeira. Definir pontos críticos. Critério da primeira derivada para determinação de pontos

	extremos locais. Teorema de Weierstrass.
g	Definir pontos de inflexão.
h	Definir a concavidade do gráfico de uma função para cima/baixo conforme a função primeira derivada cresce/decresce.
I	Teorema que relaciona diretamente a concavidade do gráfico da função (para cima/para baixo) com o sinal (positivo/negativo) de sua segunda derivada

Fonte: Autores, 2018.

Nas duas turmas que essa proposta de aula foi aplicada, após a formalização do item “I” a professora fez o seguinte questionamento: *“E no ponto em que c é um ponto crítico da forma $f'(c) = 0$ que é um ponto de máximo ou mínimo relativo, o que você pode falar a respeito do sinal da segunda derivada neste ponto, ou seja, qual o sinal de $f''(c)$? Por quê?”* Para proporcionar uma melhor reflexão sobre esse questionamento, a professora projetou no quadro o gráfico da Figura 1. Os estudantes identificaram que havia somente um ponto que se enquadrava nessa situação, que ocorria na abscissa igual a 3 e esse ponto correspondia a um ponto de mínimo local, como discutido anteriormente ao estudar o critério da primeira derivada. Essa constatação motivou a formalização do Critério da Segunda Derivada. Em seguida, a professora usou o gráfico da Figura 1 para discutir a existência de assíntotas. Esse termo já era conhecido dos estudantes, pois no momento em que foi trabalhado com o assunto de funções, a professora abordou translações. E, um dos exemplos discutidos em sala de aula foi a função racional $f(x) = \frac{1}{x}$. Julgamos importante o estudo dessa função, pois auxilia o estudante de CDI compreender os termos “infinitamente grande” e “infinitamente pequeno” (infinitesimais) ao estudar limites. Além disso, trabalhar com a definição de assíntota no momento da formalização foi motivado pela observação feita pela professora no momento da resolução dessa tarefa, pois alguns estudantes ao analisarem se a função era contínua estavam confundindo $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ com $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$, ou seja, confundiram a existência de uma assíntota horizontal com uma assíntota vertical e, por isso, consideraram que $x = 0$ não pertencia ao domínio da função. Além disso, durante a resolução da atividade, a professora teve de fazer uma revisão dos conceitos de limite envolvidos com as equipes que cometeram esse equívoco. Retomando a sequência da aula, após definir assíntotas horizontal e vertical, foi apresentado um roteiro de oito passos, que não precisam ser seguidos na ordem, mas todos os itens nele listados devem ser considerados na construção de um gráfico ao usar a teoria de derivadas. O roteiro consiste em: 1) Determinar o domínio da função; 2) Encontrar os pontos críticos; 3) Analisar os sinais de f' para encontrar intervalos de crescimento/decrescimento de f; 4) Encontrar, se existirem, os pontos de máximo(s)/mínimo(s); 5) Achar os possíveis pontos de inflexão; 6) Determinar os intervalos em que a concavidade é voltada para cima/para baixo; 7) Analisar a (não)existência de assíntotas; 8) Esboçar o gráfico da função.

Para aplicar toda a teoria discutida com essa tarefa, a professora passou a ensinar *sobre* resolver problemas para construir o gráfico da função $f(x) = x + \frac{1}{x^2}$. E, da forma como o segundo dia de aula trabalhando com essa atividade foi desenvolvido permite-nos corroborar com Allevato (2005, p. 61, grifo nosso) ao dizer que “[...] quando o professor adota essa metodologia, os alunos podem aprender tanto **sobre** resolução de problemas, quanto aprendem Matemática **para** resolver novos problemas, enquanto aprendem Matemática **através** da resolução de problemas”. Ou seja, adotando uma das concepções de ensino de RP, em alguns momentos o docente poderá fazer uma mescla dessas três visões e, o acreditamos que o momento mais propício para que isso ocorra é na formalização do conteúdo.

Para atender a décima etapa do roteiro de Onuchic e Allevato (2014), “propor novos problemas” os estudantes foram desafiados a resolverem os problemas ilustrados nas Figuras 7 e 8. Entendemos que ambos problemas são conceituais, pois nenhum cálculo é necessário na resolução, mas precisa-se conhecer e entender a teoria de derivadas para conseguir solucioná-los.

Figura 7 – Problema 2

2. Esboce o gráfico da função f, contínua em $\mathbb{R}-\{2\}$, que satisfaz as seguintes condições:

i. $f'(0)=0$ e $f'(-1)$ não existe;

ii. $f'(x)>0$ para todo $x\in(0,2)\cup(2,+\infty)$;

iii. $P(0,-3)$ é um ponto de mínimo local;

iv. $Q(-1,0)$ é um ponto de inflexão;

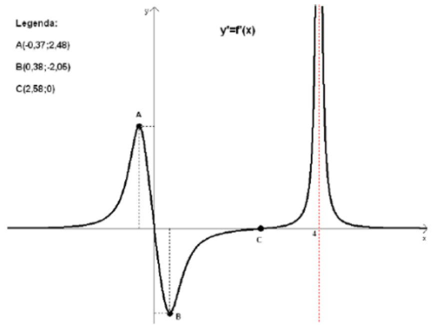
v. $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)+x)=2$;

vi. $\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=1$.

Fonte: Autores, 2017.

Figura 8 – Problema 3

3. Sabendo que h é uma função contínua em $\mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=\frac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x\to-\infty}h(x)=-\frac{\pi}{2}$ e que o gráfico de h' está ilustrado na figura abaixo, faça um esboço do gráfico da função h. Além disso, argumete de forma consistente se existe(m) ou não ponto(s) crítico(s), ponto(s) extremo(s), ponto(s) de inflexão e assíntotas.



Fonte: Autores, 2017.

Análise e Resultados

Nesta seção, apresentaremos a análise sobre as conjecturas apresentadas como respostas dos itens “f”, “i”, “k” e “l” da sequência didática apresentada na seção 3.1. Para realização dessa tarefa, ao todo foram formados 17 grupos de trabalho, sendo 12 grupos da turma de Licenciatura em Matemática (MAT) e 5 da turma de Licenciatura em Química (QUI). Por convenção, indicaremos por Gn o grupo n, com n de 1 até 12 equipes da MAT e de 13 até 17 as equipes da QUI.

Na Tabela 1 estão as categorias das conjecturas elaboradas pelos grupos para responder o item “f” que pedia para conjecturar alguma relação percebida entre o (de)crescimento de uma função e o sinal da função primeira derivada.

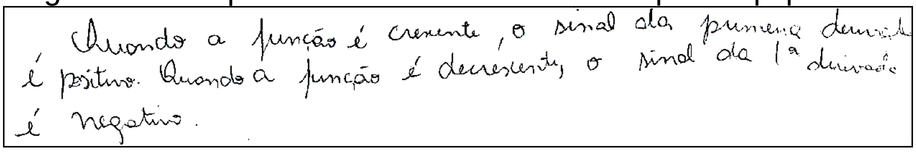
Tabela 1: Categorias e conjecturas do item “f”

		MAT	QUI
Correta	Relacionou o sinal da função primeira derivada com crescimento e decrescimento da função ou vice-versa.	7	2
	Relacionou o sinal do coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da função com o crescimento e decrescimento dessa função.	3	0
Parcialmente correta	Relacionou o sinal da função primeira derivada com crescimento e decrescimento da função, mas complementou com informações erradas.	0	1
	Relacionou o sinal do coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da função com crescimento e decrescimento dessa função, mas cometeu algum equívoco ao se expressar.	2	2

Fonte: Autores.

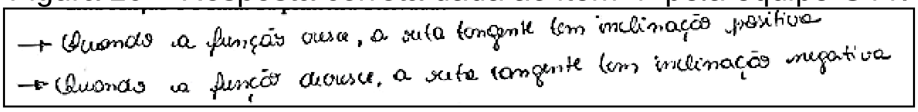
Pelas informações da Tabela 1, percebemos que todas as equipes fizeram conjecturas corretas ou, ao menos, parcialmente corretas. Ao todo 10 equipes conseguiram relacionar o sinal da primeira da primeira derivada com o (de)crescimento da função, que era a conjectura almejada (exemplo na Figura 9). Outro exemplo de conjectura correta, apresentada por três equipes, está ilustrado na Figura 10, em que os alunos relacionam o (de)crescimento com a inclinação (negativa) positiva da reta tangente.

Figura 9 – Resposta correta dada ao item “f” pela equipe G17.


Quando a função é crescente, o sinal da primeira derivada é positivo. Quando a função é decrescente, o sinal da 1ª derivada é negativo.

Fonte: Dados da pesquisa.

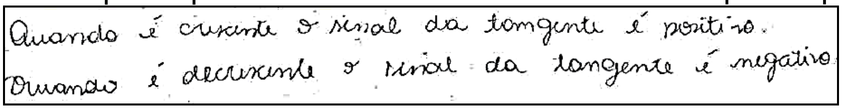
Figura 10 – Resposta correta dada ao item “f” pela equipe G11.


→ Quando a função cresce, a reta tangente tem inclinação positiva
→ Quando a função decresce, a reta tangente tem inclinação negativa

Fonte: Dados da pesquisa.

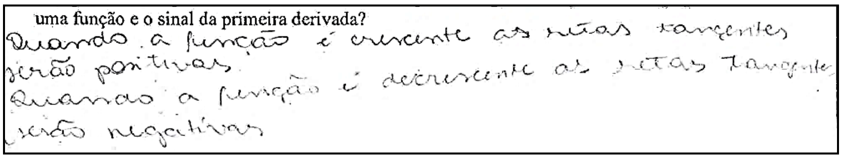
Uma equipe escreveu novamente os intervalos que identificou no item “e” e, além de associar com (de)crescimento da função também apresentou observações sobre a concavidade do gráfico da função, mas essas não estavam coerentes em todos os intervalos apresentados, por isso foi classificada como parcialmente correta. Outras equipes que cometeram equívocos ao associarem o coeficiente angular com decrescimento da função, se expressaram mal matematicamente, pois ao invés de escreverem coeficiente angular da reta tangente usaram alguma das expressões: “sinal da tangente” (Figura 11); “retas tangentes positivas/negativas” (Figura 12).

Figura 11 – Resposta parcialmente correta dada ao item “f” pela equipe G15.


Quando é crescente o sinal da tangente é positivo.
Quando é decrescente o sinal da tangente é negativo.

Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 12 – Resposta parcialmente correta dada ao item “f” pela equipe G16.


uma função e o sinal da primeira derivada?
Quando a função é crescente as retas tangentes serão positivas.
Quando a função é decrescente as retas tangentes serão negativas

Fonte: Dados da pesquisa.

A Tabela 2 apresenta a categorização das respostas do item “i” que solicitava que fosse feita a conjectura sobre alguma possível relação entre a concavidade do gráfico de uma função e o (de)crescimento da função primeira derivada de f.

Tabela 2: Categorias e conjecturas do item “i”

		MAT	QUI
Correta	f' decrescente, concavidade para baixo ou vice-versa; f' crescente, concavidade para cima ou vice-versa.	10	4
Parcialmente correta	Respondeu que concavidade do gráfico de f está ligada diretamente ao crescimento e decrescimento da função primeira derivada, mas não especificou de que forma.	1	0
Errada	Quando f decresce, f' cresce.	1	0
	Nos intervalos em que a função é decrescente (crescente) com concavidade para baixo (cima) a sua derivada primeira é positiva (negativa).	0	1

Fonte: Autores.

Pelas informações da Tabela 2, pode-se observar que 14 equipes conseguiram fazer a conjectura correta, todas escreveram de forma muito parecida com as imagens ilustradas nas Figuras 13a, 13b e 13c. Na primeira, observa-se que a equipe foi cuidadosa ao escrever, mesmo não tendo usado simbologia matemática a conjectura está correta e, qualquer leitor que tenha conhecimento de CDI, entenderá a colocação. A Figura 13b sendo é dada uma resposta mais objetiva, não houve prejuízo no entendimento da conjectura. Já na terceira imagem, o grupo fez a conjectura correta, mas omitiu informações importantes para um bom entendimento, pois da forma como foi apresentada é necessário que o leitor, ao ler à conjectura, leia as entrelinhas, ou seja, leia *“[quando a concavidade do gráfico da função é] para cima [a derivada primeira] é crescente”.* O mesmo ocorre para a segunda sentença.

Figura 13a – Resposta correta dada ao item "i" pela equipe G6

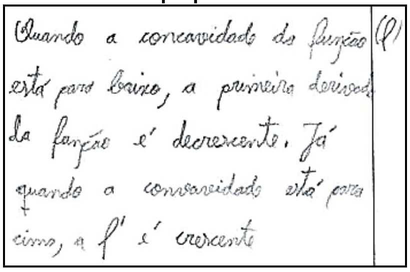
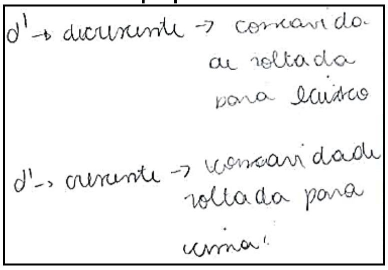
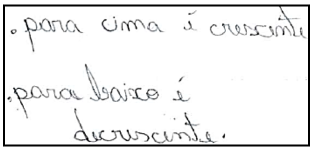

Quando a concavidade da função (f) está para baixo, a primeira derivada da função é decrescente. Já quando a concavidade está para cima, a f' é crescente

Figura 13b – Resposta correta dada ao item "i" pela equipe G15


d' → decrescente → concavidade voltada para baixo

d' → crescente → concavidade voltada para cima.

Figura 13c – Resposta correta dada ao item "i" pela equipe G2

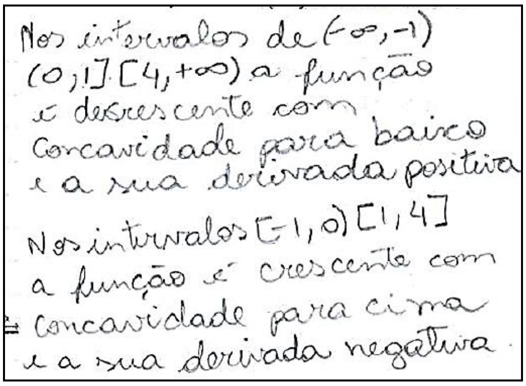

. para cima é crescente

. para baixo é decrescente.

Fonte: Dados da pesquisa.

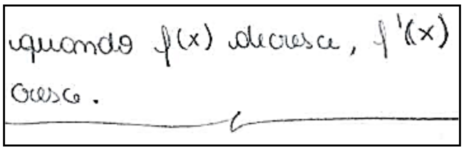
As conjecturas erradas estão ilustradas nas Figuras 14a e 14b. Ao analisar a Figura 3 da atividade e a resposta da Figura 14a, entendemos que a equipe identificou os intervalos em que a derivada é decrescente, observou o gráfico da função f que tem a concavidade voltada para baixo nos intervalos indicados, mas a função primeira derivada não é positiva em todos os intervalos indicados nessa imagem. De forma análoga, interpretamos o restante da resposta dessa equipe. Ou seja, essa equipe pode ter observado informações verdadeiras, mas se expressou mal matematicamente. A resposta da Figura 14b é uma constatação verdadeira apenas para o intervalo $(-\infty, 1]$.

Figura 14a – Resposta errada dada ao item "i" pela equipe G14


Nos intervalos de (-∞,-1) (0,1] [4,+∞) a função é decrescente com concavidade para baixo e a sua derivada positiva

Nos intervalos [-1,0) [1,4] a função é crescente com concavidade para cima e a sua derivada negativa.

Figura 14b – Resposta errada dada ao item "i" pela equipe G11


quando f(x) decresce, f'(x) cresce.

Fonte: Dados da pesquisa.

As categorias das respostas apresentadas ao item "k" que pedia para conjecturar a relação existente entre (de)crescimento de f' e o sinal de f'' estão apresentadas na Tabela 3.

Tabela 3: Categorias e conjecturas do item "k"

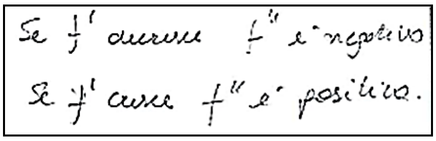
		MAT	QUI
Correta	Se f' é decrescente, então f'' será negativa ou vice-versa. Se f' for crescente, então f'' será positiva ou vice-versa.	10	3
Errada	O (de)crescimento de f' está diretamente ligado a concavidade de f.	1	0
	O (de)crescimento de f estão diretamente ligados a concavidade do gráfico de f'	1	0
	Associou o sinal de f'' com o (de)crescimento da (reta) tangente	1	0

Não respondeu	0	1

Fonte: Autores.

Pela Tabela 3, temos que 13 equipes conseguiram apresentar a conjectura almejada, isto é, constatar que nos intervalos que f' é decrescente, a função f'' é negativa ou vice-versa (Figura 15). Ou, conclusão equivalente a essa considerando f' uma função crescente.

Figura 15 – Resposta correta dada ao item “k” pela equipe G8.



Fonte: Dados da pesquisa.

Com relação ao item “l”, as categorias das respostas apresentadas pelos grupos estão na Tabela 4.

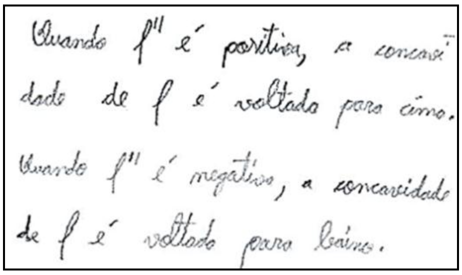
Tabela 4: Categorias e conjecturas do item “l”

		MAT	QUI
Correta	Se f'' é positiva, então a concavidade de f é voltada para cima ou vice-versa. Se f'' é negativa, então a concavidade de f é voltada para baixo ou vice-versa.	9	3
Parcialmente correta	Se a concavidade do gráfico de f é voltada para baixo, então a tangente é negativa. Se a concavidade do gráfico de f é voltada para cima, então a tangente é positiva.	1	0
Errada	A concavidade do gráfico de f está relacionada com (de)crescimento de f''.	1	0
	Relacionou (de)crescimento de f e concavidade do gráfico de f com (de)crescimento de f'' ou com continuidade de f''.	0	1
Não respondeu		1	1

Fonte: Autores.

Note que 12 equipes conseguiram conjecturar que se f'' é positiva, então a concavidade de f é voltada para cima ou vice-versa. Conclusão similar foi apresentada para f'' negativa (Figuras 16).

Figura 16 – Resposta correta dada ao item “l” pela equipe G6.


Quando f'' é positiva, a concavi-
dade de f é voltada para cima.
Quando f'' é negativa, a concavidade
de f é voltado para baixo.

Fonte: Dados da pesquisa.

Acreditamos que o grupo cuja resposta foi classificada como parcialmente correta conseguiu intuir a conjectura correta, mas se expressou mal matematicamente, pois usou as expressões “tangente positiva” e “tangente negativa” querendo se referir ao sinal da inclinação das retas tangentes, que são dadas pela derivada primeira no ponto.

Considerações finais

Por meio dessa sequência didática sentimos que foi possível tornar mais dinâmica uma clássica aula de CDI para abordar o conteúdo de Análise de Variação de Funções, pois pela experiência docente que as autoras possuem nessa disciplina, geralmente, suas aulas, referentes a esse conteúdo, eram teóricas providas de muitas definições e teoremas. Avaliamos como sendo positivos os resultados da sequência didática aqui apresentada tanto do ponto de vista de ensino quanto de aprendizagem, pois ao menos 70% das conjecturas elaboradas (nos itens “i”, “k” e “l”) pelos estudantes correspondem às conclusões almejadas pelos pesquisadores e foram intuídas de forma natural. No item “i” o número de respostas com a categoria almejada foi menor (50%), mas cremos que esse menor número de respostas adequadas foi devido a problemas de enunciado, pois desejávamos que fosse feita relação entre (de)crescimento da função com sinal da primeira derivada, entretanto o item pedia o confronto de informações entre (de)crescimento da função e sinal do coeficiente angular. E, a partir desse dado para relacionar com o sinal da primeira derivada, não é imediato, pois é necessário utilizar a interpretação geométrica da reta tangente.

Com essa atividade acreditamos que os estudantes tiveram a oportunidade de vivenciarem o “prazer da descoberta” e puderam experimentar na prática o significado de “fazer matemática[10]” como um matemático. Assim sendo, essa investigação permitiu que os estudantes “tivessem alguma independência ou pelo menos alguma ilusão de independência” (Polya, 1980, p. 2, tradução nossa) favorecendo o seu desenvolvimento mental , pois eles próprios elaboraram suas conjecturas a partir das constatações/observações/intuições da equipe.

[10] De acordo com Nunes (2014, p. 5), “Fazer matemática é o que o aluno faz quando, diante de uma situação problema, consegue refletir, explorar, argumentar, conjecturar, justificar, verificar e desenvolver a matemática.”

Rezende (2003, p. 12-13), defende que “(…) nem sempre a demonstração revela, por si própria, a essência do resultado; que existem outros caminhos para se alcançar à compreensão de uma proposição ou conceito matemático.” Acreditamos que no caso do conteúdo de Análise de Variação de Funções, essa sequência didática pode não favorecer algumas das clássicas demonstrações, por exemplo, do critério da primeira derivada para determinação de pontos extremos relativos, pois para prová-lo, é necessário o conhecimento do Teorema do Valor Médio. E, da forma como propusemos, os estudantes ainda não o estudaram. Entretanto, acreditamos que os ganhos no entendimento de conceitos usando essa abordagem são maiores do que as “perdas” de algumas demonstrações que satisfazem o sentimento individual do “matemático-professor[11]”.

Por fim, cremos que esse texto pode vir a inspirar professores a adaptar essa sequência didática para seu contexto escolar bem como o relato e as dicas dadas de como desenvolver uma aula mediada pela metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de RP apoiada no roteiro de Allevato e Onuchic (2014) para ensinar através da RP podem instigar a curiosidade/vontade de professores de CDI ousar inovar a sua própria prática pedagógica almejando envolver mais os estudantes com a sua aprendizagem. Entretanto, corroboramos com Nunes (2014, p. 15) que “não se pode negar que trabalhar com essa metodologia seja uma tarefa fácil para o professor. Ela requer tempo, maturidade, muita reflexão e pesquisa por parte do professor” e cremos que uma maneira dessa abordagem metodológica ser agregada à prática profissional de um (futuro) professor é que os licenciandos tenham contato com a metodologia não apenas

> nas disciplinas pedagógicas, mas também [seja] utilizada pelos docentes que ministram disciplinas nesses cursos, não só para promover a construção de conhecimento matemático específico, mas para oferecer a esses licenciandos a oportunidade de vivenciar e, assim, incorporar à sua prática, essa forma alternativa e mais atual de trabalho nas aulas de Matemática, sempre que possível como caminho para a aprendizagem. (NUNES, 2014, p. 15).

Com essa fala de Nunes (2014), não intencionamos afirmar que um (futuro) profissional de educação só conseguirá implementar na sua prática docente a metodologia de RP ou qualquer outra metodologia diferenciada se o estudante tiver a oportunidade de vivenciá-la no período de sua graduação, entretanto, acreditamos que se já conhecer (na prática) os benefícios de uma metodologia que exija um comportamento mais ativo nas aulas, pode servir de incentivo a diversificação de metodologias na futura prática professional. Porém, se o professor conhece pouco ou desconhece como usufruir uma metodologia diferenciada, esse profissional tem de ter muita persistência e vontade de buscar metodologias alternativas (dentre elas, a metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de RP) e ter consciência de que é somente praticando que se aprende a usá-las e adequá-las conforme a realidade em que está inserido.

[11] Rezende (2003, p. 11) usa a expressão “matemático-professor” do “Prof. Baldino para fazer referência aos professores do curso superior que não largam o “ranço-matemático”.”

Agradecimentos

Agradecemos ao apoio financeiro da Fundação de Amparo à Pesquisa e Inovação do Estado de Santa Catarina (FAPESC), à Fundação para a Ciência e a Tecnologia (FCT) no âmbito do projeto do Centro de Investigação em Estudos da Criança da Universidade do Minho (com a referência UID/CED/00317/2019) e ao Grupo de Pesquisa em Educação Matemática e Sistemas Aplicados ao Ensino (PEMSA).

Referências

ABDELMALACK, A. **O ensino-aprendizagem-avaliação de derivada para o curso de Engenharia através da resolução de problemas.** Dissertação (Mestrado em Ciências e Matemática), Universidade Cruzeiro do Sul, São Paulo, 2011.

ALLEVATO, N. S. G. **Associando o Computador à Resolução de Problemas Fechados: Análise de uma experiência.** (Tese de Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2005.

ALLEVATO, N. S. G.; ONUCHIC, L. R. Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática: por que Através da Resolução de Problemas? In: ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G.; NOGUTI, F. C. H.; JUSTILIN, A. M. **Resolução de Problemas: Teoria e Prática,** p. 35-52. Jundiaí/SP: Paco, 2014.

ANASTASIOU, L. G. C.; ALVES, L. P. Estratégias de ensinagem. In: ANASTASIOU, L. G. C., ALVES, L. P. **Processos de ensinagem na Universidade: pressupostos para as estratégias de trabalho em aula.** 5ed.Joinville-SC, Univille, 2009.

AZEVEDO, E. B. **Vivenciando a metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação através da Resolução de Problemas nas aulas de Cálculo Diferencial e Integral.** Tese de doutorado. Universidade do Minho, Braga, Portugal, 2019.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros curriculares nacionais para o ensino médio.** Brasília: MEC, 2000.

_____. Ministério da Educação, Secretaria da Educação Básica. **Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias** (Orientações curriculares para o ensino médio; volume 2). Brasília, 2006.

_____. Ministério da Educação, Secretaria da Educação Básica. **Base Nacional Curricular Comum.** Brasília, 2018.

CURY, H. N. Pesquisas em análise de erros no ensino superior: retrospectiva e novos resultados. In: **Educação Matemática no Ensino Superior: Pesquisas e Debates.** Recife: SBEM, 223 – 238, 2009.

GIL, A. C. **Métodos e técnicas de pesquisa sociais.** Ed. Atlas, São Paulo, 2008.

GERHARDT, T. E.; SILVEIRA, D. T. **Métodos de Pesquisa.** Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2009.

GUIMARÃES, H. M. Pólya e as capacidades matemáticas. In: **Educação e Matemática.** Lisboa: Associação de Professores de Matemática, n.114, p. 28-35, 2011. Nota biográfica da entrevista de George Pólya cedida à Jeremy Kilpatrick.

LAMBDIN, D. V.; WALCOTT, C. Changes through the Years: Connections between Psychological Learning Theories and the School Mathematics Curriculum. In: MARTIN, W. G. et al. (Eds.). **The Learning of Mathematics.** Reston, VA: NCTM, 2007. p. 3 – 25

LIMA, S. A.; SILVA, S. C. R.; SANTOS Jr; G. S.; ALMEIDA, M. F. A. O ensino de Cálculo Diferencial e Integral em um curso de Administração: principais dificuldades de aprendizagem dos alunos. **IV Sinect**, Ponta Grossa, 2014.

MENESTRINA, T. C; GOUDARD, B. Atualização e revisão pedagógica de cálculo e álgebra: Concepções e atitudes Inovadoras. **XXXI COBENGE.** Joinville (SC), 2003.

ME-DGIDC. **Programa de Matemática do Ensino Básico.** Lisboa: Ministério da Educação, Departamento de Educação Básica, 2007.

NCTM. (1980). **An Agenda for Action.** Reston. VA: National Council of Teachers of Mathematics.

NOGUTI, F. C. H. **Um curso de Matemática Básica através da Resolução de Problemas para os ingressantes da Universidade Federal do Pampa – Campus Alegrete.** (Tese de Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 370 f, 2014.

NUNES, C. B. Resolução de Problemas: uma proposta didática na formação de professors. **REnCiMa**, v. 5, n. 2, p. 1-17, 2014.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. **Bolema,** Rio Claro (SP), v. 25, n. 41, p. 73-98, 2011.

ONUCHIC, L. R. Ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas. In: Bicudo, M. A. V. (Org.). **Pesquisa em Educação Matemática: Concepções e perspectivas.** São Paulo: Editora UNESP, p. 199-218, 1999.

PAGANI, E. M. L.; ALLEVATO, N. S. G. Ensino e aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral: um mapeamento de algumas teses e dissertações produzidas no Brasil. **VIDYA**, Santa Maria, v. 34, n. 2, p.61-74, 2014.

PAGANI, E. M. L.; ALLEVATO, N. S. G. O trabalho com derivadas no Ensino Médio através da Resolução de Problemas: aspectos da avaliação. **REnCiMa**, v. 7, n. 1, p. 86-101, 2016.

PIRONEL, M. **A avaliação integrada no processo de Ensino-Aprendizagem-Avaliação da Matemática.** Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociência e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, São Paulo, 2002.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático.** Tradução e adaptação Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro, Interciência, 2006.

POLYA, G. On Solving Mathematical Problems in High School. In: KRULIK, S; REYS, R. E. **Problem Solving in School Mathematics.** NCTM: Yearbook, United States of America, 1980.

PÓLYA, G. Pólya e as capacidades matemáticas. [abril de 1978]. Lisboa: Revista Educação e Matemática, n.114, p. 28-35, 2011. Entrevista cedida à Jeremy Kilpatrick, Universidade da Georgia, Athens, EUA. Tradução: Henrique Manuel Guimarães.

RAFAEL, R. C.; ESCHER, M. A. Evasão, baixo rendimento e reprovações em Cálculo Diferencial e Integral: uma questão a ser discutida. **VII Encontro Mineiro de Educação Matemática.** 12 p. Juiz de Fora, 2015.

REZENDE, W. M. **O ensino de Cálculo: Dificuldades de natureza epistemológica.** Tese (Doutorado em Educação – Ensino de Ciências e Matemática), Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade de São Paulo, 2003.

SCHROEDER, T. L.; LESTER Jr, F. K. Developing Understanging in Mathematics via Problem Solving. In: P. R. Trafton (Ed.) **New Directions for Elementar School Mathematics.** Reston, VA: NCTM, 31-42, 1989.