doi.org/10.26843/rencima

eISSN: 2179-426X

POLINÔMIOS: GRÁFICO, MULTIPLICIDADE E DEMONSTRAÇÃO

Polynomial: Graphic, multiplicity and demonstration.

João Domingos Gomes da Silva Junior[1]

Colégio Pedro II – RJ, joao.dgomes@gmail.com

http://orcid.org/0000-0002-1745-0302

Liliana Manuela Gaspar Cerveira da Costa[1]

Colégio Pedro II – RJ, lmgccosta@gmail.com

http://orcid.org/0000-0002-5258-1447

Resumo

Neste artigo é apresentada uma propriedade de polinômios utilizada para a resolução de um exercício em sala de aula por alunos do 3º ano do Ensino Médio. Apresenta-se também uma demonstração dessa propriedade que é acessível aos alunos. Algumas definições e teoremas necessários para a demonstração dessa propriedade são enunciados e alguns exemplos de aplicação são apresentados. Procurou-se elucidar de forma clara nossa proposta pedagógica para que outros colegas a possam utilizar com seus respectivos alunos. Junto com a propriedade, inevitavelmente, é retomada a discussão sobre a utilização ou não de demonstrações matemáticas com os alunos dos Ensinos Fundamental e Médio.

Palavras-chave: Polinômios, multiplicidade, gráficos, demonstração matemática.

Abstract

In this paper is presented a polinomial property used in an exercise resolution in a twelfth grade class. It is also presented a proof of the refered property, accessible for the students. Some required definitions and theorems used in that prof will be remarked and some examples of applications will be presented. This pedagogical proposal may interest other teachers and motivate them to use it in their classrooms. Together with this property, inevitably, is retaked the discussion about the use, or not, of mathematical demosntrations in elementary and high schools.

[1] NEPEM – Núcleo de Ensino e Pesquisa em Educação Matemática

Keywords: Polynomial, multiplicity, graphics, mathematical demonstration.

Introdução

De acordo com as mais significativas tendências em educação matemática, o estudo da Matemática no Ensino Básico deve ter como princípios norteadores: despertar a curiosidade, incentivar o questionamento, conectar áreas do saber, desenvolver o raciocínio lógico e intuitivo, aprimorar a visão geométrica, estimular a realização de análises de dados (sejam estatísticas ou funcionais) e estabelecer conjecturas, entre outros aspectos básicos a ter em consideração na formação do aluno para que ele possa saber analisar e enfrentar situações com que se depara no cotidiano.

Durante todo o processo de ensino-aprendizagem os alunos precisam ser estimulados a justificar matematicamente raciocínios e resoluções de problemas das mais variadas áreas. A justificativa desenvolve conceitos, fortalece as definições, sedimentam dúvidas, ou seja, consolida os alicerces matemáticos. Hoje a ausência de prova em sala de aula é uma realidade, no entanto, justificar raciocínios deve ser uma das preocupações do ensino de matemática,

> [...] é desejável que no terceiro ciclo se trabalhe para desenvolver a argumentação, de modo que os alunos não se satisfaçam apenas com a produção de respostas a afirmações, mas assumam a atitude de sempre tentar justificá-las. Tendo por base esse trabalho, pode-se avançar no quarto ciclo para que o aluno reconheça a importância das demonstrações em Matemática, compreendendo provas de alguns teoremas. (PCN, 1998, p. 71).

Alguns autores consideram que um dos motivos que levam os alunos a terem dificuldades com demonstração é a complexidade da prova descrita como um conjunto de argumentos que o aluno deve combinar. Contudo, cabe ao professor escolher exemplos adequados tanto ao nível etário, quanto ao nível de conhecimento do aluno.

Outros levantam “a hipótese de que os professores, em geral, não consideram as exigências para o ensino e a aprendizagem da matemática que prevê, a partir da sétima série, que o aluno inicie a justificar, a provar e a demonstrar alguns resultados a fim de torná-los indiscutíveis.” (FUSCO, SILVA, ALMOULOUD, 2007, p. 1).

Certamente, introduzir as demonstrações no quotidiano dos alunos, é algo que se pode desenvolver se houver intenção de fazê-lo, tendo presentes a clareza e a sensatez nos objetivos a atingir. Ao professor cabe, também, a tarefa de organizar o trabalho por forma a aumentar a capacidade do aluno para compreender uma demonstração ou uma justificativa teórica, já que esta atividade requer alguma frequência e algum treino.

Para qualquer justificativa são necessários argumentos e “modelos” de raciocínio, alguns dos quais estão presentes em diversos tipos de demonstração. Além da criação de bases argumentativas, o ato de demonstrar constitui em si um grande estímulo do raciocínio. Assim, “o raciocínio matemático é um hábito mental que, como todos os hábitos, deverá ser desenvolvido através da sua utilização consistente numa diversidade de contextos” (NCTM, 2008, p. 61).

A necessidade de bem fundamentar os resultados é um evento particularmente importante, para o qual não há respostas demasiado simples ou rápidas. Tal fundamentação pode ser melhor desenvolvida com o auxílio de demonstrações ou justificativas.

Diversos trabalhos sobre o uso ou não de demonstração nos Ensino Fundamental (EF) e Ensino Médio (EM) já foram publicados e discutidos, como em Roman (2016) e Almouloud e Fusco (2010). No entanto, parece pertinente que este tema seja retomado, uma vez que tivemos recentemente a criação de uma Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e, além disso, os educadores estão sempre buscando inserir em suas práticas pedagógicas novas propostas de ensino. Algumas dessas propostas podem ser facilitadores para a inclusão de demonstrações e/ou justificativas no processo de ensino-aprendizagem.

O presente trabalho pretende dar um contributo neste sentido. No decorrer do artigo apresenta-se uma propriedade matemática sobre polinômios que normalmente não é discutida com os alunos de forma mais profunda e detalhada.

Sendo assim, este artigo é proposto com o intuito de não só retomar a discussão sobre demonstrações em sala de aula, como também, servir de fonte de consulta para professores que acreditam ser pertinente o uso da demonstração dessa propriedade no Ensino Médio. Na seção 2, comenta-se de forma bem rápida os processos metodológicos que enquadram o artigo; na seção 3, fundamenta-se a proposta apresentada; na seção 4, é colocada uma situação problema que esteve na origem do assunto a ser tratado nas seções seguintes; nas seções 5 e 6, é fornecida uma justificativa para o problema proposto e respectiva fundamentação e apresentam-se alguns exemplos e, para finalizar, na seção 7, elencam-se algumas conclusões.

Metodologia

A metodologia usada na elaboração deste artigo foi, além de uma pesquisa bibliográfica, também uma pesquisa descritiva-explicativa.

Por ser uma pesquisa bibliográfica, etapa fundamental em todo trabalho científico, houve um levantamento dos conhecimentos científicos disponíveis sobre os assuntos propostos no artigo, a fim de analisarmos as principais teorias relacionadas com os temas.

Se enquadra numa pesquisa descritiva-explicativa, pois sugerimos uma abordagem mais aprofundada de uma propriedade de polinômios, que normalmente não é discutida em livros didáticos, tendo como base um exercício proposto durante uma aula de matemática

Da importância da prova no ensino de Matemática

Durante toda vivência escolar o estudante se vê diante de fórmulas, equações, proposições, teoremas, que muitas vezes são apresentados como verdades absolutas, sem que se sinta a necessidade do seu aprendizado. Essa prática é contrária às tendências em Educação Matemática já que “desde as suas primeiras experiências no campo da matemática, é importante ajudar as crianças a compreenderem que as afirmações deverão ser sempre justificadas”. (NCTM, 2008, p. 61)

A utilização do recurso à prova/demonstração matemática na educação básica brasileira é incipiente e o seu uso ainda é questionado, contudo há uma defesa de sua relevância nos currículos de Matemática como em Cobb, Wood; Yackel (1993) e Ponte, Matos, Abrantes (1998).

Dessa forma deve-se repensar as demonstrações/provas como sendo um “processo de exploração, de procura de conjecturas, de contra exemplos, de refutação, de aplicação e de comunicação e não com o sentido formalista que a caracterizou nos currículos praticados noutros períodos” (PIETROPAOLO, 2005, p. 212).

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN, 1998, p.25), é importante que a Matemática desempenhe, equilibrada e indissociavelmente, seu papel na formação de capacidades intelectuais, na estruturação do pensamento, na agilização do raciocínio dedutivo do aluno, na sua aplicação a problemas, a situações da vida cotidiana e atividades do mundo do trabalho e no apoio à construção de conhecimento em outras áreas curriculares.

Tais capacidades, principalmente na estruturação do pensamento e na agilização do raciocínio dedutivo, podem ser trabalhadas e desenvolvidas inserindo no cotidiano escolar as demonstrações.

Dessa forma podemos perceber a importância que esse tipo de prática desempenha na formação básica do cidadão, ou seja, a prática de argumentar matematicamente e de forma encadeada, certamente ajuda a exercer a cidadania.

A prática de demonstração no EF é comentada na BNCC (BRASIL, 2018, p. 265) ao afirmar que “A dedução de algumas propriedades e a verificação de conjecturas, a partir de outras, podem ser estimuladas, sobretudo ao final do Ensino Fundamental”. Já para o EM, diz:

> Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas por meio da observação de padrões, incluindo as tecnologias digitais, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas (BRASIL, 2018, p. 531).

Sendo assim, percebemos que dois dos principais norteadores da educação brasileira estimulam a inserção de práticas argumentativas e dedutivas no processo de ensino-aprendizagem e que uma das maneiras de se inserir tais práticas no processo de ensino-aprendizagem pode ser através de demonstrações.

Em alguns países da Europa, como é o caso de Inglaterra e França, e nos EUA, a utilização da "prova" como recurso da prática educativa é um fato. A necessidade de justificar raciocínios e efetuar provas matemáticas está patente no currículo escolar desde os anos iniciais. Essa opção é devida a se acreditar que ser capaz de raciocinar é fundamental para a compreensão da matemática e do mundo em geral. Assim, o processo de justificação/prova é de fundamental importância para a construção e compreensão da Matemática e para o desenvolvimento da capacidade de argumentação, em geral.

Justificar, mesmo que de forma intuitiva, ou até mesmo demonstrar em algumas situações é sempre válido, pois além de ampliar o horizonte matemático do aluno, promove desenvolvimento da capacidade de abstração, do raciocínio e estimula o seu senso crítico.

No primeiro contato com o processo justificativo em matemática é usual o recurso ao método de tentativa e erro ou de experimentação não sistematizada. Esse é o momento em que as crianças devem sentir que há suposições e regras específicas que permitem concluir se determinado argumento é, ou não, válido.

Outro aspeto importante é a sistematização do raciocínio, a observação de padrões e o estabelecimento de conjecturas, que terão que ser rejeitadas ou validadas. É na validação de conjecturas que se utilizam alguns dos métodos de demonstração matemática. A indução matemática, bem como o recurso à prova por absurdo ou por contraposição são ferramentas muito úteis e de fácil entendimento para os alunos do EM.

Um problema que envolve polinômios

O primeiro contato que os alunos têm com polinômios, ainda que de modo informal, ocorre no 7º ano do Ensino Fundamental (EF) quando se estuda a equação do primeiro grau. Mas, só no 8º ano se introduz terminologia específica e se formalizam conceitos. Apesar de vários autores de livros didáticos não estabelecerem a relação entre os dois temas, o assunto é retomado ao longo do EM, quando se faz o estudo das famílias de funções afim e quadrática. Em geral, o assunto será aprofundado no 3º ano do EM ao estudar um capítulo denominado Polinômios. Este estudo é feito quase sempre de forma algébrica valorizando apenas os resultados obtidos em proposições e teoremas.

Segundo o PCN não é fundamental que se estude de forma aprofundada polinômios, equações polinomiais e funções polinomiais. Estes devem constar na parte flexível do currículo, apesar de surgirem em várias aplicações. Na tentativa de ir ao encontro da necessidade de estudar este tema, durante uma aula para o 3º ano do EM do colégio Pedro II, campus Engenho Novo II, Rio de janeiro, foi proposto o seguinte exercício da prova discursiva da UERJ de 2003:

***Questão**: Um ciclista e um corredor começam juntos, uma competição. A curva abaixo, cuja equação é $e = t^3 + at^2 + bt + c$, representa a posição e, em metros, do ciclista, em função do tempo t, em segundos, em que a; b e c são números reais fixos.*

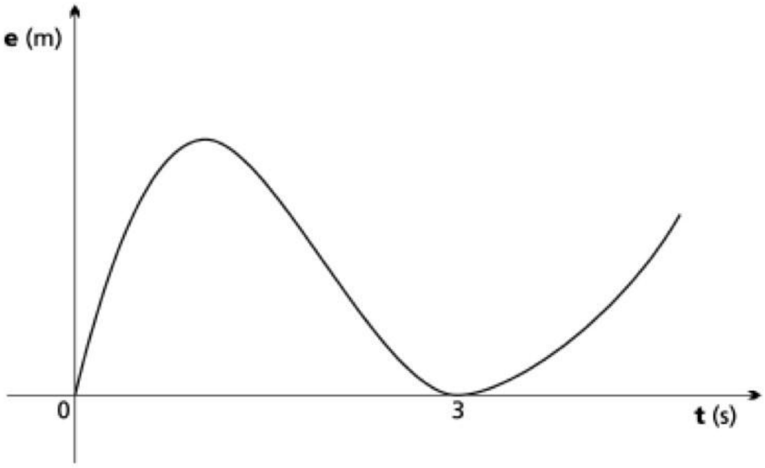


Figura 1: Figura da questão proposta pelo vestibular UERJ.
Fonte: Vestibular UERJ – 2003.

No instante em que o ciclista parte da posição zero, o corredor inicia um movimento, descrito pela equação e= $4t$, na mesma pista e no mesmo sentido.

Determine a posição mais afastada da origem na qual o ciclista e o corredor voltam a se encontrar.

Uma proposta de resolução da questão.

Pelo gráfico podemos observar que este passa pelos pontos (0, 0) e (3, 0). Assim, $e(0) = 0$ e consequentemente $c = 0$. Logo, temos o polinômio

$$e(t) = t(t^2 + at + b) \tag{1}$$

Enquanto que em $t = 0$, o gráfico atravessa o eixo das abcissas, no ponto $t = 3$ o gráfico tangencia o eixo, sem o atravessar. Assim, tanto 0 como 3 são raízes do polinômio, mas terão multiplicidades diferentes. Pelo fato do gráfico atravessar o eixo, a raiz em questão será de multiplicidade ímpar, e pelo fato de não atravessar o eixo, a raiz respectiva será de multiplicidade par. Assim, 3 é uma raiz de multiplicidade par, e atendendo ao grau do polinômio, esta raiz será de multiplicidade 2. Note-se que sendo 3 o grau do polinômio $e(t)$, o seu número máximo de raízes é também 3, e como $t = 0$ é uma raiz de multiplicidade ímpar, a única possibilidade é que seja de multiplicidade 1, restando 2 raízes do polinômio pelo que a outra raiz terá multiplicidade 2.

Dessa forma, atendendo a (1), vem

$t^2 + at + b = (t - 3)^2 = t^2 - 6t + 9$

Igualando as funções que expressam a posição do ciclista e a do corredor ($e = 4t$) obtêm-se,

$$t^3 - 6t^2 + 9t = 4t$$

Segue que, para encontrarmos os pontos de encontro do ciclista e do corredor, temos que resolver a equação incompleta do 3º grau.

$$t^3 - 6t^2 + 5t = 0\text{, ou seja, } t(t^2 - 6t + 5) = 0$$

Que possui como raízes 0, 1 e 5. Assim o ponto mais distante em que eles voltam a se encontrar é, em metros, $e(5) = 4 \cdot 5 = 20$.

Convém salientar que durante a resolução do problema, para poder concluir que a raiz 3 tem multiplicidade 2, recorreu-se ao fato do gráfico do polinômio não atravessar o eixo das abscissas nesse ponto. Alguns questionamentos se colocam:

- Que propriedade se está a usar?
- Como justificar essa mesma propriedade usando ferramentas que os alunos do EM conheçam?

A propriedade

Tendo em vista estabelecer a propriedade utilizada na seção anterior e apresentar uma demonstração da mesma, que seja acessível aos alunos do EM, vamos recordar algumas definições e teoremas, retirados de (IEZZI, 1993) e (MALTA, PESCO, LÓPES, 2015). Vale destacar que para a propriedade, analisaremos apenas as raízes reais dos polinômios.

Definição 1: Sejam $p(x)$ um polinômio de grau n e coeficientes reais e $k \leq n$ um inteiro positivo. Dizemos que x_0 é raiz de multiplicidade k de $p(x)$ quando este é divisível por $(x - x_0)^k$ mas não é divisível por $(x - x_0)^{k+1}$.

Definição 2: O gráfico cartesiano de uma função f é o conjunto de todos os pontos do plano da forma $(x, f(x))$, com x variando no domínio de f.

Seja f uma função e x_0 um ponto do seu domínio tal que $f(x_0) = 0$, ou seja, x_0 é um zero (ou raiz) de f. Dizemos, então que:

Definição 3: O gráfico de f **atravessa o eixo das abscissas** no ponto x_0 quando existe um $\varepsilon > 0$ tal que no intervalo $I =]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$ acontece uma das seguintes situações:

1. $f(a) < 0$ *para todo* $a \in]x_0 - \varepsilon, x_0[$ *e* $f(b) > 0$ *para todo* $b \in]x_0, x_0 + \varepsilon[$

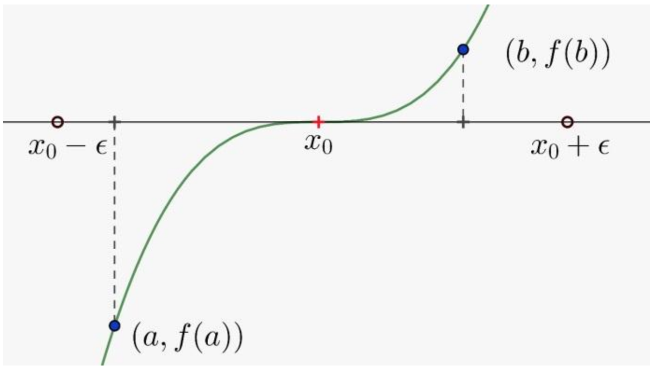


Figura 2: Ilustração do item 1 da definição 3..
Fonte: Elaborada pelos autores.

2. $f(a) > 0$ para todo $a \in \left]x_0 - \varepsilon, x_0\right[$ e $f(b) < 0$ para todo $b \in \left]x_0, x_0 + \varepsilon\right[$

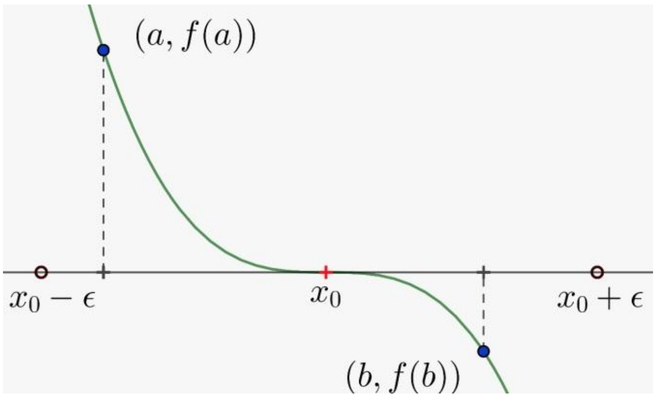
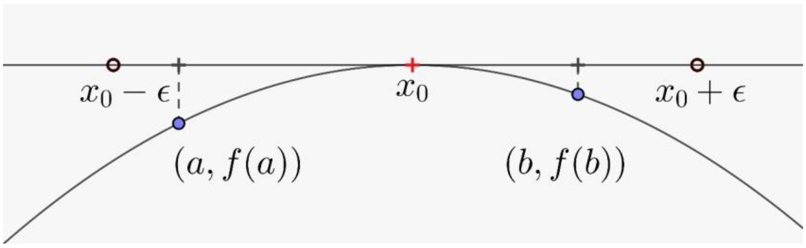


Figura 3: Ilustração do item 2 da definição 3..
Fonte: Elaborada pelos autores.

Definição 4*:* O gráfico de uma função f **não atravessa o eixo das abscissas** no ponto x_0, quando existe um $\varepsilon > 0$ tal que no intervalo $I = \left]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon\right[$ acontece uma das seguintes situações:

1. $f(a) < 0$ para todo $a \in \left]x_0 - \varepsilon, x_0\right[$ e $f(b) < 0$ para todo $b \in \left]x_0, x_0 + \varepsilon\right[$.

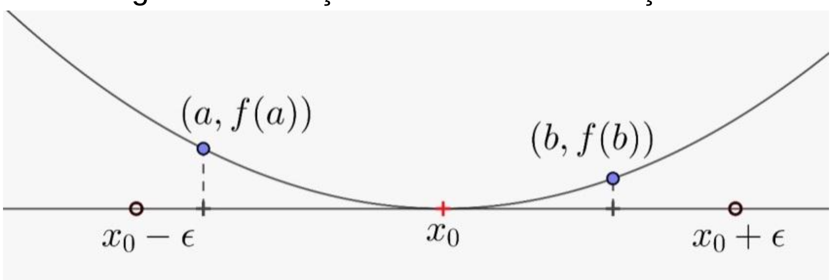
Figura 4: Ilustração do item 1 da definição 4.



Fonte: Elaborada pelos autores.

2. $f(a) > 0$ para todo $a \in \left]x_0 - \varepsilon, x_0\right[$ e $f(b) > 0$ para todo $b \in \left]x_0, x_0 + \varepsilon\right[$.

Figura 5:Ilustração do item 2 da definição 4.



Fonte: Elaborada pelos autores.

Teorema 1: Dados os polinômios $p(x)$ e $d(x)$, de graus n e m, respectivamente, com $m \leq n$, então existem um único polinômio $q(x)$ e um único polinômio $r(x)$ tais que $p(x) = q(x)d(x) + r(x)$, com grau de $r(x)$ menor que m.

Definição 5: Quando $r(x)$ é o polinômio nulo, diz-se que $d(x)$ divide $p(x)$.

Das definições 1 e 5 tem-se que se x_0 é uma raiz de multiplicidade k do polinômio $p(x)$, então existe um único polinômio $q(x)$ tal que

$$p(x) = q(x)(x - x_0)^k$$

Neste caso, o grau do polinômio $q(x)$ é $n - k$.

Teorema 2: Se $p(x)$ é um polinômio de grau n e $x_1, x_2, \dots, x_k$ são as k raízes reais de p, então p pode ser fatorado de forma única como

$$p(x) = (x - x_1)^{\alpha_1} (x - x_2)^{\alpha_2} \dots (x - x_k)^{\alpha_k} q(x),$$

onde $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ são inteiros positivos e q é um polinômio sem raízes reais.

A seguir iremos referir algumas propriedades elementares referentes a funções contínuas em IR. Atendendo que a proposta aqui apresentada pretende fornecer argumentos entendíveis por alunos do EM, não iremos recorrer a noções do Cálculo infinitesimal e diferencial. Adotaremos para o conceito de continuidade a ideia intuitiva de que ao traçar o gráfico de uma função contínua, o lápis não deixa de tocar o papel.

Teorema 3:

(i) A função **constante** é contínua.

(ii) A função **potência**, $x \to x^n$, com $n \in IN$, é contínua.

(iii) As funções **soma** e o **produto** de funções contínuas são também funções contínuas.

Com aplicações sucessivas desse teorema, conclui-se que qualquer **função definida por um polinômio é contínua**.

Teorema 4 (Teorema dos Valores Intermediários): Seja f uma função contínua num intervalo $[a;\ b]$ $(a < b)$, com $f(a) \neq f(b)$. Se c é qualquer número entre $f(a)$ e $f(b)$, então existe $x_0 \in (a;\ b)$ tal que $f(x_0) = c$.

Como consequência imediata deste teorema, tem-se que uma função contínua para passar de valores positivos(negativos) para valores negativos(positivos) tem que passar necessariamente pelo zero.

Estamos agora em condições de responder às questões inicialmente colocadas, o que será feito através da proposição seguinte:

Proposição 1: Sejam $p(x)$ um polinômio de grau n, com coeficientes reais, $x_0 \in IR$ uma raiz de $p(x)$ e G o gráfico da função p definida em IR por $p(x)$. Então,

(i) Se o eixo das abscissas não atravessa G em x_0, a multiplicidade de x_0 é par.

(ii) Se o eixo das abscissas atravessa G em x_0, a multiplicidade de x_0 é ímpar.

Demonstração: Seja $k \in IN$, $k \leq n$ a multiplicidade de x_0. Existe um único polinômio $q(x)$ de grau $n-k$ com $q(x_0) \neq 0$ tal que

$$p(x) = (x - x_0)^k q(x) \tag{2}$$

Como a função polinomial q é contínua, existe $\varepsilon_1 > 0$ tal que, para todo x no intervalo $]x_0 - \varepsilon_1, x_0 + \varepsilon_1[$, $q(x)$ tem o mesmo sinal de $q(x_0)$. Assim,

(i) Suponha, por contraposição, que o eixo das abscissas não atravessa G em x_0 e que k é ímpar. Como o eixo das abscissas não é atravessado em x_0 existe $\varepsilon_2 > 0$ tal que, para todo $a \in]x_0 - \varepsilon_2, x_0 + \varepsilon_2[- \{x_0\}$, $p(a)$ tem sinal constante. Seja $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$.

Considere o intervalo $I =]x_0 - \varepsilon, x_0[$ e que $p(a)$ e $q(a)$ mantêm o sinal para todo $a \in]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[- \{x_0\}$.

Consideremos $p(a)$ e $q(a)$ ambos positivos em I. Sabemos que $a - x_0 < 0$, assim atendendo a (2), temos que $p(a) = \underbrace{(a - x_0)^k}_{<0} \underbrace{q(a)}_{>0} < 0$. Absurdo, pois $p(a) > 0$.

Consideremos agora $p(a)$ e $q(a)$ ambos negativos em I. Sabemos que $a - x_0 < 0$, assim atendendo a (2), temos que $p(a) = \underbrace{(a - x_0)^k}_{<0} \underbrace{q(a)}_{<0} > 0$. Absurdo, pois $p(a) < 0$.

Procedendo de forma análoga, considere o intervalo $J =]x_0, x_0 + \varepsilon[$ e que $p(a)$ e $q(a)$ têm sinais contrários para todo $a \in]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[- \{x_0\}$.

Consideremos, inicialmente que $p(a) > 0$ e $q(a) < 0$ em J. Sabemos que $a - x_0 > 0$, assim atendendo a (2), temos que $p(a) = \underbrace{(a - x_0)^k}_{>0} \underbrace{q(a)}_{<0} < 0$. Absurdo, pois $p(a) > 0$.

Consideremos agora $p(a) < 0$ e $q(a) > 0$ em J. Sabemos que $a - x_0 > 0$, assim atendendo a (2), temos que $p(a) = \underbrace{(a - x_0)^k}_{>0} \underbrace{q(a)}_{>0} > 0$. Absurdo, pois $p(a) < 0$.

O absurdo decorre de se ter considerado k ímpar, conclui-se assim, que k deve ser par.

(ii) Considere agora que o eixo das abscissas atravessa G em x_0 e, por contradição, admita-se que k seja par. Assim, existe $\varepsilon_2 > 0$ tal que, para todo a no intervalo $I_1 =]x_0 - \varepsilon_2, x_0[$, $p(a)$ mantém o sinal e que para todo $b \in I_2 =]x_0, x_0 + \varepsilon_2[$, $p(b)$ possui sinal oposto ao sinal de $p(a)$. Seja $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$.

Sem perda de generalidade, podemos supor que para todo $a \in I_1, p(a) > 0$ e que para todo $b \in I_2, p(b) < 0$ e que $q(x) > 0$ para todo $x \in I =]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$.

Logo, segue de (2), que $p(b) = \underbrace{(b - x_0)^k}_{>0} \underbrace{q(b)}_{>0} > 0$. Absurdo pois $p(b) < 0$.

Supondo agora que $p(a) < 0$ e $p(b) > 0$, em seus respectivos intervalos, e adotando a ideia anterior, mas usando o ponto a, tem-se, $p(a) = \underbrace{(a - x_0)^k}_{>0} \underbrace{q(a)}_{>0} > 0$. O que é absurdo, pois $p(a) < 0$.

O argumento a usar quando o polinômio $q(x)$ for negativo em I é análogo. Pode-se concluir então que k tem que ser ímpar. ■

Vejamos agora a proposição recíproca da anterior:

***Proposição 2**:* Sejam $p(x)$ um polinômio de grau n, com coeficientes reais, $x_0 \in IR$ uma raiz de $p(x)$ e G o gráfico da função p definida em IR por $p(x)$. Então,

(i) Se a multiplicidade de x_0 é par então o eixo das abscissas não atravessa G em x_0.

(ii) Se a multiplicidade de x_0 é ímpar, o eixo das abscissas atravessa G em x_0.

Demonstração: Sendo x_0 uma raiz de multiplicidade k do polinômio $p(x)$, este pode escrever-se de forma única como $p(x) = q(x)(x - x_0)^k$, com $q(x_0) \neq 0$.

Assim, existe $\varepsilon > 0$, tal que em $I =]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$, o sinal de $q(x)$ é igual ao sinal de $q(x_0)$.

(i) Se k for par, $p(x)$ tem em $I - \{x_0\}$ o mesmo sinal que $q(x_0)$. Assim, para todo $a \in I - \{x_0\}, p(a)$ tem sinal constante, ou seja, pela definição 4, o eixo das abscissas não atravessa G. Dessa forma está provado.

(ii) Por outro lado, se k for ímpar, vamos supor

- que $a < x_0$, $(a - x_0)^k < 0$, pelo que $p(a)$ tem sinal oposto ao de $q(x_0)$;
- e que $b > x_0$, $(b - x_0)^k > 0$, pelo que $p(b)$ tem o mesmo sinal que $q(x_0)$.

Assim, o sinal de p muda em x_0, o que, de acordo com a definição 2 e permite concluir que o eixo das abscissas atravessa G. ■

Das proposições anteriores podemos estabelecer que:

Proposição 3: Sejam $p(x)$ um polinômio de grau n, com coeficientes reais, $x_0 \in IR$ uma raiz de $p(x)$ e G o gráfico da função p definida em IR por $p(x)$. Então,

(i) A multiplicidade de x_0 é par se, e somente se, o eixo das abscissas não atravessa G em x_0.

(ii) A multiplicidade de x_0 é ímpar se, e somente se, o eixo das abscissas atravessa G em x_0.

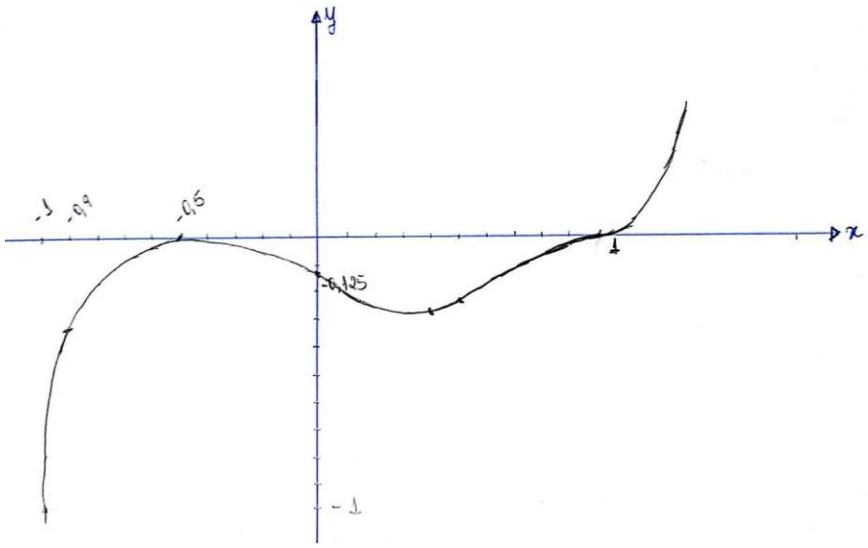
Uma aplicação desta proposição é permitir esboçar o gráfico de uma função polinomial conhecido os seus zeros e respectivas multiplicidades.

Exemplo: Esboçar o gráfico da função f definida por $f(x) = 2(x - 1)^3(x + 0{,}5)^4$.

Trata-se de uma função polinomial de grau 7 que tem raízes 1 e $-0{,}5$, a primeira com multiplicidade 3 e a segunda com multiplicidade 4. Como o coeficiente de x^7 é positivo, para valores de x menores que a menor raiz ($-0{,}5$), a função é negativa e, para valores de x maiores que a maior raiz (1), a função é positiva.

Como $x = 1$ tem multiplicidade ímpar, o gráfico atravessa o eixo das abcissas nesse ponto. Pelo fato de $x = -0{,}5$ ser uma raiz de multiplicidade par, o gráfico não vai atravessar o eixo das abcissas em $x = -0{,}5$. Assim, o gráfico vem do terceiro quadrante até $x = -0{,}5$, onde se anula, não atravessando o eixo, continua a situar-se abaixo do eixo das abcissas, até atravessar o eixo em $x = 1$ e seguir para primeiro quadrante. Um esboço a mão livre do gráfico é:

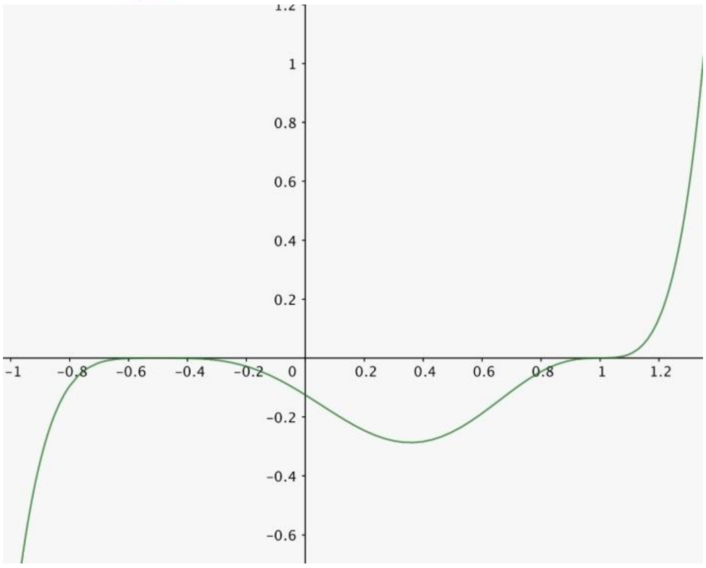
Figura 6: Esboço à mão livre do gráfico de f definida por $f(x) = 2(x-1)^3(x+0{,}5)^4$.



Fonte: Elaborada pelos autores.

O gráfico de f obtido por recurso ao Geogebra:

Figura 7: Representação do gráfico de f definida por $f(x) = 2(x-1)^3(x+0{,}5)^4$ feita no Geogebra.



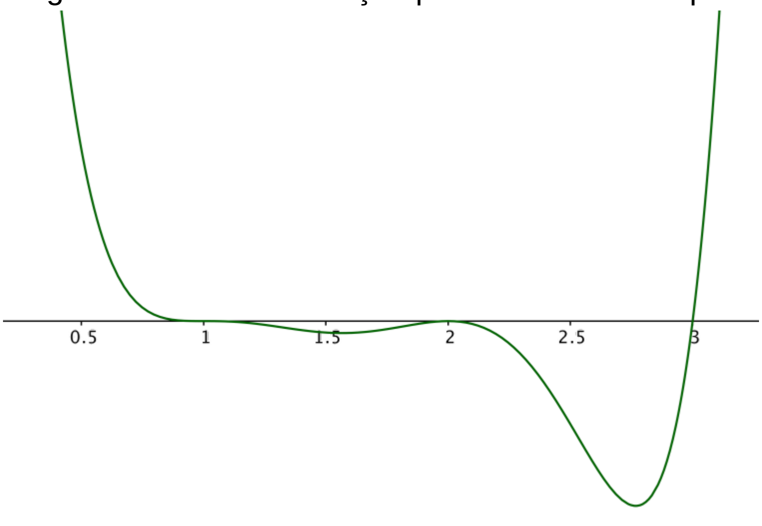
Fonte: Elaborada pelos autores.

Multiplicidade X gráfico.

Na seção anterior foi provada uma proposição que permite justificar a resolução do problema proposto na seção 4. Contudo, tal proposição será útil em outras situações envolvendo polinômios. Mais especificamente, poderá nos ajudar a esboçar gráficos de uma função polinomial conhecendo suas raízes e respectivas multiplicidades, como foi visto no exemplo anterior. Outra aplicação desta proposição consiste em, conhecido o gráfico de uma função, "descobrir" qual o polinômio que a define.

Exemplo: Na figura seguinte está parte do gráfico de uma função polinomial de grau 6, que corta o eixo das ordenadas em (0; 12) e que tem apenas os zeros reais representados.

Figura 8: Gráfico da função polinomial do exemplo.



Fonte: Elaborada pelos autores.

Quer-se escrever o polinômio que a define.

Do gráfico tem-se que a função admite zeros 1, 2 e 3. Mas as suas multiplicidades poderão ser diferentes... Atendendo a que o gráfico atravessa o eixo das abcissas em 1 e em 3, essas raízes serão de multiplicidade ímpar, enquanto que 2 terá multiplicidade par. Será que as raízes de multiplicidade ímpar têm multiplicidade igual? Para responder a esta questão é preciso observar se o comportamento da função é idêntico na vizinhança de 1 e na vizinhança de 3.

Figura 9: Visualização local do comportamento do gráfico da função próximo das raízes.

Fonte: Elaborado pelos autores.

A diferença de comportamento está relacionada com o fato de as multiplicidades dessas raízes serem diferentes. Repare-se que na vizinhança de 1 o gráfico é mais "achatado" e isso vai significar que a multiplicidade dessa raiz é maior. Assim, como a multiplicidade de 2 é par, vamos conjeturar que 2 tem multiplicidade 2, que 1 tem multiplicidade 3 e que 3 tem multiplicidade 1. Teremos, então:

$$f(x) = a(x-1)^3(x-2)^2(x-3), \text{ com } a \in IR$$

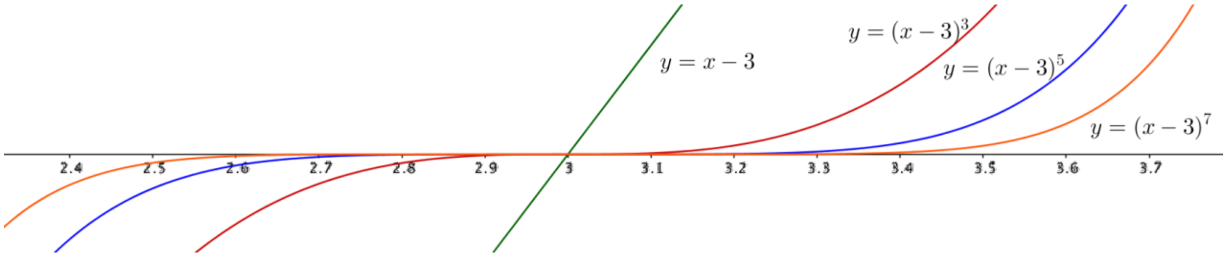
Finalmente, atendendo a que o gráfico passa por (0, 12) temos que $f(0) = a(-1)^3(-2)^2(-3)$ ou seja $12 = 12a$ pelo que $a = 1$ e

$$f(x) = (x-1)^3(x-2)^2(x-3).$$

Diante da necessidade de esboçar ou fazer uma análise mais precisa sobre funções polinomiais, podemos observar que independente da multiplicidade de uma raiz ser par ou ímpar, o gráfico tende a se achatar numa vizinhança da raiz, se a multiplicidade for maior que 1, e quanto maior for a multiplicidade, mais próximo do eixo se situa o gráfico.

Comportamento de gráficos de funções que admitem $x = 3$ como raiz de multiplicidade ímpar na vizinhança do ponto 3

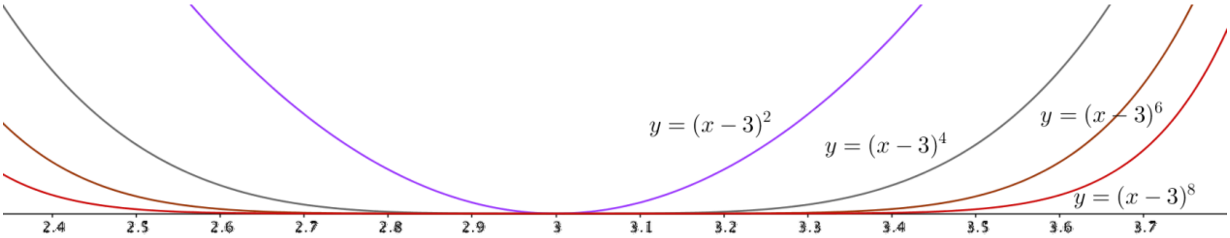
Figura 10: Comportamento local do gráfico das funções na raiz com o aumento da multiplicidade ímpar.



Fonte: Elaborada pelos autores.

Comportamento de gráficos de funções que admitem x = 3 como raiz de multiplicidade par na vizinhança do ponto 3.

Figura 11: Comportamento local do gráfico das funções na raiz com o aumento da multiplicidade par.



Fonte: Elaborada pelos autores.

Conclusão

A construção do edifício Matemático, por vezes parte de alguns conceitos, tomados sem definição, e de algumas proposições aceitas sem demonstração e a partir destes, outras propriedades são estabelecidas e teoremas são demonstrados.

É natural, portanto, que se considere de primordial importância, no processo educativo, a convivência e a prática das demonstrações por professores e estudantes. Ou seja, temos que buscar caminhos que promovam mudanças nas concepções dos professores e estudantes a respeito das demonstrações.

As demonstrações devem constituir para o aluno um instrumento a ser usado para fazer Matemática e não apenas um mero objeto de apreensão e de memorização. Dessa forma, concordamos com Freitas (2011) que sem deduções, a matemática pode tornar-se uma simples coleção de resultados úteis, mas desconexos, sem uma visão clara de quais são os pontos de partida e quais as conclusões que deles se podem tirar.

Neste artigo (re)abre-se uma discussão que rodeia os educadores de matemática: é pertinente o recurso à demonstração no EF e no EM?

O objetivo deste trabalho não é, certamente, responder de forma taxativa a tal pergunta, mas sim colocar este assunto como tema permanente de discussão. Cada professor, em contexto de sala de aula, perante os alunos de sua turma, saberá se deverá recorrer ou não ao uso dessa ferramenta poderosa que é a demonstração, ou seja, em caso de uso, a demonstração deve assumir um caráter não só pedagógico, mas também deve ser motivador para que os alunos se sintam seguros em suas argumentações matemáticas.

Sabe-se que "... quando um aluno entende que é preciso justificar uma afirmação, e examinar essa justificação, ao confirmar se está certa, está a desenvolver o espírito crítico. Este tipo de atitude é crucial na formação de um cidadão..." (FREITAS, 2011, p.13).

O desenvolvimento do espírito crítico no exercício da cidadania é um dos aspectos presentes tanto nos PCN como também na BNCC. Desta forma, os norteadores da educação brasileira, deixam claro que o ensino de Matemática certamente irá prestar uma contribuição importantíssima conforme forem exploradas metodologias que priorizem diversos fatores, entre eles: a criação de estratégias, a comprovação, a justificativa, a argumentação e o espírito crítico. Além disso, tais metodologias devem favorecem a criatividade, o trabalho coletivo, a iniciativa pessoal e a autonomia proveniente da confiança construída durante o processo.

Com esse artigo quer-se mostrar que através de um mero exercício proposto, diversas discussões e provocações podem ser desenvolvidas. Quer-se reforçar a ideia de que, desde as séries iniciais, através de questionamentos direcionados pode-se estimular, mesmo que de forma intuitiva, o ato de demonstrar e de justificar. Afinal, é sabido que a compreensão de uma demonstração pode exigir tempo e capacidade de atenção demorada, mas sabe-se também que o ato de demonstrar pode ser extremamente prazeroso.

Sendo assim, pode-se perceber que a demonstração é, e sempre será, um patrimônio da Matemática. Através dela dá-se clareza, certeza e coerência a alguns resultados que não podem ser obtidos de qualquer outra forma. Outrossim, desfaz a ideia de que a Matemática é apenas um conjunto desconexo de fórmulas, através das relações entre conceitos necessários para se desenvolver uma justificativa.

Referências

ALMOLOUD, S. A. FUSCO, C. A. S. **Provas e demonstrações em Matemática: uma questão problemática nas práticas docentes no ensino básico**. Em: X Encontro Nacional de Educação Matemática, 2010, Salvador – BA.

BRASIL, **Base Nacional Comum Curricular** – BNCC para Ensino Fundamental, 2017, MEC.

BRASIL, **Base Nacional Comum Curricular** – BNCC para Ensino Médio, 2018, MEC.

BRASIL, **Parâmetros Curriculares Nacionais** - PCN, 1998, MEC.

COELHO, M. NASCIMENTO, A. A. LIMA, M. L. S. MACEDO, H. F. L LINS, A. F. **Provas e Demonstrações Matemáticas: Crenças e Concepções de Alunos do 3º ano do Ensino Médio**, 2015, Comunicação Oral - II CONEDU.

COBB, P., WOOD, T., YACKEL, E. **Discourse, mathematical thinking, and classroom practice**. In: FORMAN, E. A.; MINICK, N.; STONE E C. A. (Ed.). Contexts for learning: Sociocultural dynamics in children development**.** New York: Oxford University Press, 1993, p. 91-119.

FREITAS, P. J. **A Demonstração Matemática no Ensino Básico e Secundário**. EM: Encontro ProfMat, 2011, Lisboa.

FUSCO, C. A. S. SILVA, M. J. F. ALMOLOUD, S. A. **O comportamento de um professor do ensino básico frente a uma situação de demonstração em matemática**. Em: IX Encontro Nacional de Educação Matemática, 2007, Belo Horizonte – MG.

IEZZI, G. **Fundamentos da Matemática Elementar**, Vol.6, 1993, Atual.

MALTA, I. PESCO, S. LÓPES, H. **Cálculo a uma Variável: Uma introdução ao Cálculo**, Vol.1, 2015, Puc/Rio – Elsevier.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS, NCTM, **Princípios e Normas para a Matemática Escolar**, Lisboa - 2008, Associação de Professores de Matemática.

PIETROPAOLO, R. C. (**Re)Significar a demonstração nos currículos da educação básica e da formação de professores de matemática**, 2005. 388 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Programa de Pós-graduação em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2005.

PONTE, J.; MATOS, J.; ABRANTES, P. **Investigação em educação matemática: Implicações curriculares.** Lisboa: IIE, 1998.

ROMAN, H. **Demonstrações de Fórmulas Matemáticas no Ensino Médio**, UTFP - Curitiba, 2016, Profmat.