

## **Estudos brasileiros sobre o princípio da complementaridade na Educação Matemática**

### **Brazilian studies on the principle of complementarity in Mathematical Education**

**Geslane Figueiredo da Silva Santana**

Universidade Federal de Mato Grosso (UFMT)/ Instituto de Ciências Naturais, Humanas e Sociais,  
[geslanef@hotmail.com](mailto:geslanef@hotmail.com)

 <http://orcid.org/0000-0002-6281-8719>

**Gladys Denise Wielewski**

Universidade Federal de Mato Grosso (UFMT)/ Programa de Doutorado em Educação em Ciências e Matemática (PPGECM), [gladysdw@gmail.com](mailto:gladysdw@gmail.com)

 <http://orcid.org/0000-0002-2473-2957>

**Luiz Gonzaga Xavier de Barros**

Universidade Anhanguera de São Paulo (UNIAN)/ Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, [lqxbarros@hotmail.com](mailto:lqxbarros@hotmail.com)

 <http://orcid.org/0000-0002-6284-9849>

### **Resumo**

O Princípio da Complementaridade na Educação Matemática (PCEM) afirma que, para caracterizar totalmente certos conceitos ou ideias ligadas à Educação Matemática, às vezes, é necessário apresentar características desses conceitos ou ideias que, embora aparentemente contraditórias, complementam-se. O PCEM apoia-se na Semiótica de Peirce, suas raízes encontram-se na Filosofia de Immanuel Kant, sendo o termo Princípio da Complementaridade formulado pelo físico Niels Bohr. A aplicação do PCEM como metodologia de pesquisa em Educação Matemática começou por volta de 1970, com Prof. Dr. Michael Friedrich Otte, professor emérito da Universidade de Bielefeld na Alemanha, o qual mantém vínculos fortes com universidades brasileiras, tem orientado diversas teses e dissertações colaborando para a formação de uma nova geração de pesquisadores adeptos dessa metodologia. Mediante levantamento bibliográfico, objetivamos evidenciar e catalogar uma parcela da produção dos estudos brasileiros sobre o Princípio da Complementaridade na Educação Matemática. Esta pesquisa foi realizada seguindo a metodologia proposta em *Análise de Conteúdo*, de Laurence Bardin. Para tanto, foi

realizado um levantamento no Banco de Teses e Dissertações fomentado pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES). Por meio dessa coleta de dados, refletimos que, no Brasil, o PCEM configura-se como uma nova metodologia de pesquisa, a qual decididamente merece ser mais profundamente explorada e estudada, dada a multiplicidade no campo das aplicações e contribuições na e para a Educação Matemática.

**Palavras-chave:** Educação Matemática. Princípio da Complementaridade na Educação Matemática. Análise de Conteúdo.

## **Abstract**

The Principle of Complementarity in Mathematics Education (PCEM) states that, in order to fully characterize certain concepts or ideas related to Mathematics Education, it is sometimes necessary to present characteristics of these concepts or ideas that, although apparently contradictory, complement each other. The PCEM is based on Peirce's Semiotics, its roots are found in the Philosophy of Immanuel Kant, the term Principle of Complementarity being formulated by the physicist Niels Bohr. The application of PCEM as a research methodology in Mathematics Education began around 1970, with Prof. Dr. Michael Friedrich Otte, professor emeritus at the University of Bielefeld in Germany, who maintains strong ties with Brazilian universities, has guided several theses and dissertations collaborating to form a new generation of researchers adept at this methodology. Through bibliographic survey, we aim to highlight and catalog a portion of the production of Brazilian studies on the Principle of Complementarity in Mathematics Education. This research was carried out following Laurence Bardin's *Content Analysis* Methodology. To this end, a survey was carried out at the Bank of Theses and Dissertations promoted by the Coordination for the Improvement of Higher Education Personnel (CAPES). Through this data collection, we reflect that, in Brazil, PCEM is configured as a new research methodology, which definitely deserves to be further explored and studied, given the multiplicity in the field of applications and contributions in and for Mathematics Education.

**Keywords:** Mathematics Education. Principle of Complementarity in Mathematics Education. Content Analysis.

## **O Princípio da Complementaridade na Educação Matemática**

Em termos históricos, encontramos a primeira expressão filosófica da ideia do Princípio da Complementaridade na Educação Matemática (PCEM) na epistemologia de Immanuel Kant:

[...] Nosso conhecimento surge de duas fontes básicas da mente; a primeira recebe as concepções (receptividade das impressões), e a segunda é a capacidade de reconhecer um objeto por meio dessas concepções (espontaneidade dos conceitos); a primeira nos dá um objeto, a segunda nos permite pesá-lo em relação àquela concepção. Intuição e conceitos são

assim os elementos de todo o nosso conhecimento, de modo que nem conceitos sem as correspondentes intuições, nem intuições sem conceitos podem produzir conhecimento [...]. Sem o sensorial, nenhum objeto se daria para nós e, sem a razão, nenhum poderia ser pensado. Pensamentos sem conteúdo são vazios, intuições sem conceitos são cegas (KANT, 2001, B 75<sup>1</sup>).

A filosofia de Kant, de fato, decorre da confluência entre o racionalismo e o empirismo, ou seja, um ponto médio, que propõe a existência dos objetos em dependência da atividade cognitiva do sujeito. A afirmação expressa sobre a existência de duas fontes do conhecimento por meio das quais os conceitos se formam, a saber, a razão (intuição pura) e a sensibilidade (intuição empírica), exprime as primeiras noções sobre a Complementaridade.

O Princípio da Complementaridade, de um modo geral, afirma que, para caracterizar fenômenos ou conceitos, faz-se necessário apresentar características desses conceitos ou ideias as quais, embora aparentemente contraditórias, complementam-se. Esse princípio foi formulado pela primeira vez pelo físico Niels Bohr, em torno de 1930, ao tentar descrever a natureza da luz. Bohr percebeu que somente a teoria ondulatória (a luz como uma onda contínua) não seria suficiente para explicar esse fenômeno. Em certas situações, a teoria da massa (a luz como um conjunto enumerável de fótons) também se fazia necessária. Bohr compreendeu que existe uma complementaridade entre situações contínuas e enumeráveis para explicar um fenômeno e notou que essa abordagem poderia ser também aplicável em diversos campos do conhecimento.

[...] chamei a atenção para a analogia muito estreita, no tocante à análise e à síntese da experiência, com a situação encontrada em muitos outros campos do conhecimento e do interesse humano. [...] muitas das dificuldades da psicologia originam-se no posicionamento diferente das linhas de separação entre o objeto e o sujeito, na análise de vários aspectos da experiência psíquica. Na verdade, palavras como “pensamentos” e “sentimentos” [...] são usadas de um modo complementar, semelhante ao da coordenação espaço-temporal e das leis de conservação dinâmicas na física atômica (BOHR, 1995, p. 64, grifo do autor).

A partir da década de 70, diversos autores começaram a utilizar esse princípio buscando capturar aspectos essenciais do desenvolvimento cognitivo e epistemológico dentre os conceitos matemáticos e científicos. Otte; Steinbring (1977), Kuyk (1977), Otte; Keitel; Seeger (1980), Otte (1990; 1993a; 1993b; 2003), Douady (1991) e Sfard (1991) são exemplos de artigos que exploram esse princípio na Educação Matemática.

Michael Friedrich Otte foi um dos introdutores e é o principal pesquisador que utiliza o PCEM como metodologia de trabalho. É professor emérito da Universidade de Bielefeld, na Alemanha, e mantém vínculos com universidades brasileiras, junto a programas de pós-graduação, formando uma nova geração de pesquisadores adeptos dessa metodologia.

---

<sup>1</sup> Para citação da *Crítica da Razão Pura*, seguiremos a paginação do original alemão, sendo A para a indicar a primeira edição, de 1781, assim como B indicará a segunda edição, de 1787, conforme o modelo (KrV: A ou B), em que após as letras A ou B aparece a paginação original.

Seu livro *O Formal, o Social e o Subjetivo: uma introdução à filosofia e à didática da matemática* (1993a, 1993b) é um marco nessa área, e, em seu artigo de 2003, “Complementarity, Sets and Numbers”, o PCEM foi rerepresentado de maneira atualizada. Juntamente com a Semiótica e a Filosofia, tem-se mostrado como uma metodologia científica e filosófica eficaz para a interpretação de fatos ou conceitos da Matemática, História da Matemática e Filosofia da Matemática, os quais sejam ligados a aspectos da construção do conhecimento matemático.

O PCEM consolida-se com a Semiótica de Charles Sanders Peirce, conforme afirma a famosa frase de Alfred Korzybski (1995, p. 58), “O mapa não é o território”; no entanto, o mapa fornece uma ideia do território. Por conseguinte, a *semiosis* estende-se em ambas as direções, tanto em direção ao objeto que não possui referência definitiva, assim como em direção à interpretação, a julgar que também não há uma interpretação absolutamente definida, pois esta é apenas uma tradução ou desenvolvimento do signo original. O signo representa alguma coisa – o seu *objeto* –, representa-o não em todos os seus aspectos, mas com referência a um tipo de ideia que Peirce (1977) denomina por “fundamento do *representamen*”.

Especialmente em Matemática, sentimos a indispensabilidade de bons símbolos e representações. Imagine calcular sem os números decimais (por exemplo, com números romanos) ou resolver equações algébricas sem os símbolos habituais,  $a$ ,  $b$ ,  $x$ ,  $y$ ,  $z$  etc. Mesmo os objetos desconhecidos podem ser simbolizados e, assim, tornam-se objetos da atividade matemática. A título de exemplo, podemos afirmar: “Se as vacas são castanhas e os cavalos são castanhos, significa que as vacas e os cavalos são castanhos!”. Essa frase pode ser traduzida, na lei distributiva da Álgebra e da Aritmética, como “ $xa + ya = (x + y)a$ , onde  $x$ ,  $y$ ,  $a$  são variáveis”, e isso se torna uma proposição universal.

Otte (1993b) tem apresentado diversas complementaridades, tratadas em suas obras, como *Meio e Objeto*, *Sentido e Referência*, *Objeto e Representação*, *Descoberta e Criação*, *Contínuo e Discreto*, *Álgebra e Geometria*, entre outros. Esses são exemplos de conceitos presentes tanto na Matemática quanto na Educação Matemática, os quais se amoldam na perspectiva do PCEM.

Em relação à Complementaridade entre *Meio e Objeto*:

[...] trata-se efetivamente de uma verdadeira complementaridade, e não de uma mera dualidade, porque nenhum dos dois elementos, meio e objeto, pode ser determinado sem o outro, apesar de eles desempenharem, num determinado momento de um certo ato epistemológico individual, um papel complementarmente assimétrico. Pela expressão “meio do conhecimento”, designamos qualquer coisa que produz uma intermediação entre o sujeito e o objeto do conhecimento. De fato, aquilo que se entende normalmente por meio, como meios linguísticos e as ferramentas e instrumentos experimentais, só se tornam efetivamente um meio quando eles produzem relações do sujeito para um objeto. Se isto não ocorre, pense-se por exemplo numa língua que não se domina, então, o que ocorre é mais uma barreira ou resistência. Um meio sem objeto constitui-se para o sujeito apenas num horizonte limitado. Os meios do conhecimento são de fato para

serem diferenciados dos objetos do conhecimento, mas não para serem definidos sem o seu concurso (OTTE, 1993b, p. 224, grifo do autor).

Então, existe uma relação paradigmática entre sujeito, objetos e meios do conhecimento matemático, pela qual esses se conectam, mas também se opõem; e, nessa relação, percebe-se o PCEM. De maneira análoga, um fato científico caracteriza-se quando relacionado a uma perspectiva teórica. Mesmo na prática da educação, não é suficiente ensinar a resolução de problemas se antes o educando não visualizar, entender e identificar o problema. Alves e Tatsch destacam a importância desses requisitos em:

[...] produzir um conjunto reflexões que haverão de subsidiar os professores, tanto em formação continuada quanto inicial. [...] em desenvolver uma provocação sobre a importância do conhecimento e da exploração de aspectos históricos e epistemológicos para que se conquiste um processo de ensino que contemple a formação humana do aluno, preparando-o para sua vida em sociedade. [...] a relevância do conhecimento científico como instrumento fundamental para se despertar a condição crítico-reflexiva (2017, p. 79).

De outro modo, professores podem ensinar métodos e técnicas sem relacioná-los a problemas e, depois, discutem entre si a questão que versa sobre a falta de motivação dos estudantes.

Pesquisas sobre o PCEM têm se desenvolvido por meio de trabalhos acadêmicos em algumas universidades brasileiras, contribuindo para a formação de recursos humanos. Mediante um levantamento bibliográfico, objetivamos evidenciar e catalogar uma parcela da produção dos estudos brasileiros sobre o Princípio da Complementaridade na Educação Matemática. Neste ínterim, perguntamos “Como o PCEM tem-se apresentado em estudos brasileiros?”.

O número de pesquisas denominadas estado da arte ou estado do conhecimento floresce no meio acadêmico. Segundo Costa e Cury:

[...] são alicerces para a construção de novas investigações, pois disponibilizam o que já foi produzido em uma determinada área. Mesmo trazendo uma visão menos abrangente, com foco apenas em um tema, período ou instituição, são fundamentais para a definição de um problema de pesquisa, de objetivos ou mesmo das fundamentações teóricas que vão embasar a pesquisa (2016, p. 64).

Pretendemos evidenciar e catalogar uma parcela da produção dos estudos acadêmicos brasileiros, dos últimos 20 anos, que abordam o PCEM, bem como verificar quais nomenclaturas foram utilizadas, como a Complementaridade foi apresentada e quais aspectos complementares entre os pares foram estudados. Após um refinamento criterioso, selecionamos cinco teses para efetuar nossas análises, as quais apresentam no título a palavra “Complementaridade”.

## Metodologia e Procedimentos da Análise de Conteúdo

Este estudo foi realizado mediante um levantamento bibliográfico no Banco de Teses e Dissertações fomentado pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), com base na metodologia proposta em *Análise de Conteúdo* (2016), de Laurence Bardin. Para a análise, recorreremos à abordagem qualitativa e quantitativa, conforme Bardin (2016), e investigamos de que forma os estudos sobre a Complementaridade têm-se apresentado nesses trabalhos acadêmicos.

A abordagem quantitativa e a qualitativa, não têm o mesmo campo de acção. A primeira obtém dados descritivos através de um método estatístico. Graças a um desconto sistemático, esta análise é mais objectiva, mais fiel e mais exacta, visto que a observação é mais bem controlada. Sendo rígida, esta análise é, no entanto, útil, nas fases de verificação das hipóteses. A segunda corresponde a um procedimento mais intuitivo, mas também mais maleável e mais adaptável, a índices não previstos, ou à evolução das hipóteses. Este tipo de análise deve ser então utilizado nas fases de lançamento das hipóteses, já que permite sugerir possíveis relações entre um índice da mensagem e uma ou várias variáveis do locutor (ou da situação de comunicação) (Ibid., p.115).

A análise qualitativa consistiu em identificar a presença da palavra “Complementaridade” no título da tese e do capítulo selecionados, bem como a manifestação dos aspectos complementares entre os pares. Entendemos que “[...] o que caracteriza a análise qualitativa é o facto de a «inferência --sempre que é realizada - ser fundada na presença do índice (tema, palavra, personagem, etc.), e não sobre a frequência da sua aparição, em cada comunicação individual»”(Ibid., p. 115-116).

Por outro lado, as análises quantitativas foram orientadas para a quantificação dos indicadores em relação à quantidade de utilização dos principais teóricos do PCEM, nomenclaturas expressas, instituições onde as pesquisas foram desenvolvidas, orientadores e quantidade de aspectos complementares entre os pares. Essa orientação justifica-se por se ter em vista que “A abordagem quantitativa funda-se na frequência de aparição de certos elementos da mensagem.” (BARDIN, 2016, p. 114).

Para a referida autora, a análise de dados pode ser dividida em três fases subsequentes – “As diferentes fases da análise de conteúdo, tal como o inquérito sociológico ou a experimentação, organizam-se em torno de três polos cronológicos:1) a pré-análise; 2) a exploração do material; 3) o tratamento dos resultados, a inferência e a interpretação.” (Ibid., p. 125).

A pré-análise é a fase da organização e sistematização das ideias iniciais, tem por objetivo a organização, embora ela própria seja composta por atividades não estruturadas e se divida em: escolha dos documentos a serem submetidos à análise, formulação das hipóteses e dos objetivos, e elaboração de indicadores que fundamentem a interpretação final (BARDIN, 2016).

As atividades a serem cumpridas, nesta etapa, para a organização do material, compreendem cinco fases: *leitura flutuante*, *escolha dos documentos*, *formulação da*

hipótese e do objetivo da pesquisa, referência dos índices e elaboração de indicadores e, por fim, preparação do material (BARDIN, 2016).

Em adesão à proposta de análise de dados (BARDIN, 2016), primeiramente, foi feita a escolha dos documentos, por meio do seguinte roteiro:

1. Opção pelo Banco de Teses e Dissertações da CAPES, disponível no site <<http://catalogodeteses.capes.gov.br/catalogo-teses/#!>>, como fonte de pesquisa para a obtenção dos dados:
  - a) Na ferramenta *busca*, ao inserir a palavra “Complementaridade”, foram encontrados 1.480 trabalhos cadastrados; após a leitura dos títulos, constatou-se que muitos não se referem à Educação, Educação Matemática e Ensino em Ciências e Matemática.
  - b) Na utilização de filtros para o critério *Nome do Programa*, ao se definirem *Educação, Educação Matemática e Ensino em Ciências e Matemática*, surgiram 124 resultados.
2. Seleção de teses e dissertações que apresentam a palavra “Complementaridade” no título:
  - a) Coleta de 9 títulos, após a leitura de todos os títulos das teses e dissertações localizadas anteriormente, e seleção dos que continham a palavra “Complementaridade” no título.
  - b) Elaboração do Quadro 1, que apresenta os critérios de seleção.

Quadro 1: Critérios para o processo de seleção.

Fonte	Descritor	Programa	Pesquisas disponíveis
Banco de Teses e Dissertações da Capes	Complementaridade	Educação, Educação Matemática e Ensino em Ciências e Matemática	Teses e dissertações

Fonte: Dados da pesquisa

- c) Construção do Quadro 2, com os nove trabalhos selecionados nesta etapa.

Quadro 2: Trabalhos que apresentam o termo “Complementaridade” no título.

Autor/ Ano	Título
FRANÇA, Sávio Mendes (2017)	UM ESTUDO SOBRE COMPLEMENTARIDADES PRESENTES NA CONSTRUÇÃO DA TEORIA DOS NÚMEROS COMPLEXOS.
BARBOSA, Everaldo Fernandes (2016)	A COMPLEMENTARIDADE ENTRE A GEOMETRIA E ÁLGEBRA: UM CAMINHO PARA À BUSCA DE SIGNIFICADOS MATEMÁTICOS
PAULA, Jacqueline Borges de (2014)	O TERMO ‘AXIOMA’ NO TEMPO, CONSIDERANDO A RELAÇÃO ENTRE A FILOSOFIA E A MATEMÁTICA ALICERÇADA NO PENSAMENTO SOBRE COMPLEMENTARIDADE ‘OTTEANO’
NASCIMENTO, Demilson Benedito do (2013)	HERMANN GÜNTER GRASSMANN (1809-1877) E O DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO GEOMÉTRICO: A COMPLEMENTARIDADE ENTRE ALGUNS ASPECTOS DA DIE LINEALE AUDEHNUNGSLEHRE (1844)
FONSECA, Rogério Ferreira da (2010)	A COMPLEMENTARIDADE ENTRE OS ASPECTOS INTENSIONAL E EXTENSIONAL NA CONCEITUAÇÃO DE NÚMERO REAL PROPOSTA POR JOHN HORTON CONWAY

Fonte: Dados da pesquisa

<b>Dissertações</b>	AQUINO PEREIRA, Marcos Jose de (2015)	NOVAS PERSPECTIVAS DA COMPLEMENTARIDADE ENTRE EDUCAÇÃO NÃO FORMAL E FORMAL - VISLUMBRES DO "PROGRAMA EDUCACIONAL GIRASSOL" EM ÁGUAS DE SÃO PEDRO.'
	DUARTE, Samuel Gomes (2014)	A COMPLEMENTARIDADE ENTRE ANÁLISE E SÍNTESE NOS PROCESSOS DE ENSINO E DE APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA
	CORRÊA, Isabella Moreira de Paiva (2008)	COMO SE FALA MATEMÁTICA? UM ESTUDO SOBRE A COMPLEMENTARIDADE ENTRE REPRESENTAÇÃO E COMUNICAÇÃO NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
	BUENO, Miriam Lara Piloni Borges (2003)	ORALIDADE E ESCRITA: UMA RELAÇÃO DE COMPLEMENTARIDADE

3. Eleição de cinco trabalhos, os quais reservaram pelo menos um capítulo para discutir sobre fundamentação teórica da *Complementariedade* e cujo aporte teórico está alicerçado no PCEM.
- a) Leitura do *Resumo*, *Sumário* e das *Referências* dos trabalhos. Foi possível identificar, após análise do *Resumo* e *Referências*, que as produções dos autores Pereira (2015), Duarte (2014) e Bueno (2003) não dizem respeito ao PCEM e, posteriormente, ao examinar o *Resumo* e *Sumário* da dissertação de Corrêa (2008), constatou-se que a autora não desenvolve um capítulo específico sobre "Complementaridade".
- b) Produção do Quadro 3, com as teses selecionadas e os títulos dos capítulos.

Quadro 3: Capítulos das teses selecionadas.

<b>Título/ Autor (Ano) - Capítulos</b>
UM ESTUDO SOBRE COMPLEMENTARIDADES PRESENTES NA CONSTRUÇÃO DA TEORIA DOS NÚMEROS COMPLEXOS. França (2017) 1. Noções de Filosofia da Matemática 2. Noções de Semiótica 3. O conceito de Complementaridade 4. História dos Números Complexos
A COMPLEMENTARIDADE ENTRE A GEOMETRIA E ÁLGEBRA: UM CAMINHO PARA À BUSCA DE SIGNIFICADOS MATEMÁTICOS. Barbosa (2016) 1. Construção teórica da pesquisa: o princípio da Complementaridade 2. As construções em <i>Os Elementos</i> de Euclides 3. A transformação estrutural da matemática nos séculos XVI e XVII 4. Gênese da Análise Vetorial
O TERMO 'AXIOMA' NO TEMPO, CONSIDERANDO A RELAÇÃO ENTRE A FILOSOFIA E A MATEMÁTICA ALICERÇADA NO PENSAMENTO SOBRE COMPLEMENTARIDADE 'OTTEANO'. Paula (2014) 1. Palavras no Tempo: um estudo interpretativo de abordagem histórica, filosófica e semiótica do ponto de vista da relação entre a Linguagem e a Matemática sobre a relevância da Filosofia e da Matemática no desenvolvimento do Conhecimento Matemático 2. O Pensamento 'Otteano': o fenômeno da Complementaridade na/para interpretação do desenvolvimento do Conhecimento Matemático e sobre seus fundamentos

Fonte: Dados da pesquisa

3. Semiótica como enfoque interpretativo ao processo cognitivo e ao desenvolvimento do Conhecimento Matemático e tomada como pressuposto teórico ao estabelecimento do Pensamento sobre Complementaridade 'Otteano'
4. Apontamentos sobre o desenvolvimento do pensamento conceitual: o conceito de conceito
5. Uma Reflexão sobre a Relação entre a Linguagem, o Conhecimento e a Matemática: pensamentos que conduziram à introdução de uma abordagem semiótica ao processo cognitivo e à Teoria Estruturalista da Metáfora
6. Apresentando os Significados do Termo Axioma: interpretação fundamentada em uma abordagem de cunho histórico, filosófico, semiótico e alicerçada no pensamento sobre Complementaridade 'Otteano'
7. O que nos revelam as oscilações de significado do termo Axioma do ponto de vista da relação entre a Linguagem e a Matemática sobre o relacionamento entre a Filosofia e a Matemática?

HERMANN GÜNTER GRASSMANN (1809-1877) E O DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO GEOMÉTRICO: A COMPLEMENTARIDADE ENTRE ALGUNS ASPECTOS DA DIE LINEALE AUDEHNUNGSLEHRE (1844). Nascimento (2013)

1. Hermann Grassmann e o seu Novo Ramo da Matemática – A Die Lineale Ausdehnungslehre
2. Contexto Histórico-Filosófico da Matemática do Século XVIII e XIX – Grassmann e a sua Época
3. Influência Platônica nos Estudos Matemáticos do Século XIX, sobretudo na Ausdehnungslehre (1844) de Grassmann
4. Alguns aspectos da complementaridade na Ausdehnungslehre

A COMPLEMENTARIDADE ENTRE OS ASPECTOS INTENSIONAL E EXTENSIONAL NA CONCEITUAÇÃO DE NÚMERO REAL PROPOSTA POR JOHN HORTON CONWAY. Fonseca (2010)

1. Introdução às Idéias de Conway
2. A Teoria de Conway sobre o Conceito de Número e Jogo
3. 3.1 A noção de complementaridade
4. A Natureza do Número: Correntes Filosóficas
5. Números Reais e a Noção de Complementaridade

4. Recorte dos capítulos que tecem considerações sobre conceito do PCEM, os quais são analisados de forma mais pormenorizada:

Quadro 4: Capítulos das teses selecionados para realizarmos a análise.

<b>Título/ Autor (Ano)</b>	<b>Capítulo e Subcapítulos</b>
UM ESTUDO SOBRE COMPLEMENTARIDADES PRESENTES NA CONSTRUÇÃO DA TEORIA DOS NÚMEROS COMPLEXOS. França (2017)	3 – O conceito de Complementaridade 3.1. A origem da Complementaridade 3.2. O Princípio da Complementaridade na Educação Matemática
A COMPLEMENTARIDADE ENTRE A GEOMETRIA E ÁLGEBRA: UM CAMINHO PARA À BUSCA DE SIGNIFICADOS MATEMÁTICOS. Barbosa (2016)	1- Construção teórica da pesquisa: o Princípio da Complementaridade 1.1. Noções de Complementaridade 1.2. Intensão e Extensão 1.3. Complementaridade na Matemática 1.4. Uma questão de significado 1.5. Abstração Reflexiva e Pensamento Matemático

<p>O TERMO 'AXIOMA' NO TEMPO, CONSIDERANDO A RELAÇÃO ENTRE A FILOSOFIA E A MATEMÁTICA ALICERÇADA NO PENSAMENTO SOBRE COMPLEMENTARIDADE 'OTTEANO'. Paula (2014)</p>	<p>2- O Pensamento 'Otteano': o fenômeno da Complementaridade na/para interpretação do desenvolvimento do Conhecimento Matemático e sobre seus fundamentos 2.1. O Princípio da Complementaridade 2.2. O fenômeno da Complementaridade no pensamento 'Otteano'</p>
<p>HERMANN GÜNTER GRASSMANN (1809-1877) E O DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO GEOMÉTRICO: A COMPLEMENTARIDADE ENTRE ALGUNS ASPECTOS DA DIE LINEALE AUDEHNUNGSLEHRE (1844). Nascimento (2013)</p>	<p>4 - Alguns aspectos da complementaridade na Ausdehnungslehre 4.1. O analítico e o sintético na matemática 4.2. O analítico e o sintético na Ausdehnungslehre 4.3. A complementaridade entre a intensão e a extensão na Ausdehnungslehre</p>
<p>A COMPLEMENTARIDADE ENTRE OS ASPECTOS INTENSIONAL E EXTENSIONAL NA CONCEITUAÇÃO DE NÚMERO REAL PROPOSTA POR JOHN HORTON CONWAY. Fonseca (2010)</p>	<p><sup>3</sup> 3.1. A noção de Complementaridade 3.2. A complementaridade na história da Matemática 3.3. Complementaridade e o conceito de número</p>

Fonte: Dados da pesquisa

Dessa forma, dos nove trabalhos, cinco teses foram selecionadas para realizar um estudo detalhado, as quatro dissertações não contemplaram os pré-requisitos estabelecidos. Ao se realizar uma *leitura flutuante*, procurou-se “[...] estabelecer contato com os documentos a analisar e em conhecer o texto deixando-se invadir por impressões e orientações” (BARDIN, 2016, p. 96). Nessa primeira leitura, detectaram-se algumas hipóteses que ajudam a delinear os objetivos a serem considerados na análise dos trabalhos.

Desta forma, o PCEM prefigura abordagens sobre várias perspectivas, tanto em relação ao seu referencial teórico e conceituação, bem como no que diz respeito à percepção dos aspectos complementares entre os pares explorados, e ainda se observam nas teses nomenclaturas distintas para o termo PCEM. Desse contexto, advém a importância da principal pergunta norteadora, que foi configurada já na gênese deste levantamento: “Como o PCEM tem-se apresentado em estudos brasileiros?”.

O passo subsequente diz respeito à *referenciação dos índices e à elaboração de indicadores*. Nesse momento, assumimos alguns pontos para nos auxiliarem no processo:

- investigar e catalogar aspectos complementares entre os pares estudados;
- identificar os principais teóricos abordados;
- verificar as nomenclaturas utilizadas para descrever o PCEM;
- constatar as instituições e respectivos programas;
- apontar os pesquisadores/orientadores.

<sup>2</sup> O autor não descreveu título para este capítulo.

No estágio seguinte, a tarefa foi empreender a edição e a organização das tabelas que, conforme Bardin (2016, p. 101), precisam ser preparadas e codificadas segundo as possibilidades de leitura do ordenador.

Prosseguiu-se com a *leitura flutuante*, considerando que nesta “[...] pouco a pouco a leitura vai-se tornando mais precisa, em função de hipóteses emergentes, da projeção de teorias adaptadas sobre o material e da possível aplicação de técnicas utilizadas sobre materiais análogos.” (BARDIN, 2016, p. 96).

Os aspectos complementares entre os pares, bem como o reconhecimento dos respectivos teóricos empregados, foram detectados no título, título de capítulo ou subtítulo de capítulo das teses. As categorias encontradas nos trabalhos foram: *Sentido e Referência; Representação e Objeto; Intensão e Extensão; Analítico e Sintético; Descoberta e Criação; Empirismo e Racionalismo; Álgebra e Geometria*.

Para identificar os principais teóricos, fixamos como categorias os teóricos Kant, Bohr, Peirce e Otte, tendo em vista serem esses os principais autores que embasam o conceito do PCEM; contudo, avaliamos ser relevante assinalar os teóricos apontados pelos pesquisadores em foco.

Nas pesquisas, percebemos que, na busca por apresentar de forma coesa a perspectiva teórica em relação ao PCEM, os autores nomearam em suas pesquisas diferentes termos para expressar o mesmo conceito; sendo assim, admitimos como categoria a palavra “Complementaridade”, objetivando encontrar qual nomenclatura cada autor utilizou.

Outrossim, consideramos importante catalogar em quais instituições e respectivos programas estas pesquisas foram desenvolvidas, bem como quais os pesquisadores que têm estudado sobre o PCEM. Assim, as categorias apuradas foram, respectivamente, o nome da instituição onde a pesquisa foi desenvolvida e o do professor orientador.

Desse modo, a análise foi conduzida segundo a categorização que é apresentada no Quadro 5.

Quadro 5: Categorização dos índices estabelecidos para a análise dos capítulos.

<b>Índice</b>	<b>Categoria</b>
1. Aspectos complementares entre os pares (Teórico)	Sentido e Referência/ Representação e Objeto Intensão e Extensão/ Analítico e Sintético Descoberta e Criação/ Empirismo e Racionalismo Álgebra e Geometria
2. Principais Teóricos do PCEM	Kant / Bohr / Peirce / Otte
3. Principais Teóricos das Teses	Apresentar os teóricos utilizados pelos autores
4. Nomenclatura	Complementaridade
5. Instituição e programa	Nome da instituição e do respectivo programa, onde a pesquisa foi desenvolvida
6. Orientador	Nome do professor orientador

Fonte: Dados da pesquisa

O passo seguinte da análise consistiu no *tratamento dos resultados* obtidos e *interpretação* dos dados por meio de uma *codificação*, realizada a partir de *escolha dos recortes* (os capítulos das teses a serem analisados), *enumeração* (quantidade da utilização dos principais teóricos do PCEM, instituições onde as pesquisas foram desenvolvidas, nomenclaturas expressas para o PCEM e quantidade dos aspectos complementares entre os pares), *classificação* e *agregação* (escolhas das categorias). Esta “[...] codificação é o processo pelo qual os dados brutos são transformados sistematicamente e agregados em unidades, as quais permitem uma descrição exata das características pertinentes do conteúdo.” (HOLSTI, 1969 *apud* BARDIN, 2016, p. 133).

Conforme o Quadro 6, no trabalho de Barbosa (2016), é veemente a presença da autora Santaella que auxilia na compreensão da teoria dos signos de Peirce; já Paula (2014) faz uso de De Broglie que também se constitui em outra fonte para entender o Princípio da Complementaridade em Bohr.

Quadro 6: Principais teóricos citados nos capítulos selecionados.

<b>França 2017</b>	<b>Barbosa 2016</b>	<b>Paula 2014</b>	<b>Nascimento 2013</b>	<b>Fonseca 2010</b>
Bohr; Otte	Bohr; Otte; Peirce; Santaella	Kant; Bohr; Otte; De Broglie	Kant; Bohr; Otte	Kant; Bohr; Otte

Fonte: Dados da pesquisa

Outro fator importante a se analisar refere-se à quantidade de aparição dos principais teóricos do PCEM, a saber, Kant, Bohr, Peirce e Otte. Ao se observar o Quadro 7, é possível constatar que Peirce é pouco utilizado; nos capítulos recortados, apenas Barbosa (2016) o aplica. Kant aparece em segundo lugar mencionado por três autores, ao passo que Bohr e Otte são empregados por cinco autores. Disso interpretamos a necessidade de se trabalhar mais a Semiótica Peirceana nos capítulos que se referem à fundamentação teórica sobre o PCEM.

Julgamos relevante informar que, embora esses autores do PCEM não tenham sido utilizados especificamente nesses capítulos, outra análise mais detalhada poderá constatar que eles são trabalhados em outros capítulos das teses; contudo, isso não consta catalogado aqui por não descreverem no título de um capítulo a palavra “Complementaridade” e/ou não tratarem explicitamente da fundamentação teórica do PCEM.

Quadro 7: Quantidade da utilização dos principais teóricos do PCEM.

	<b>França 2017</b>	<b>Barbosa 2016</b>	<b>Paula 2014</b>	<b>Nascimento 2013</b>	<b>Fonseca 2010</b>	<b>Total</b>
<b>Kant</b>			x	x	x	3
<b>Bohr</b>	x	x	x	x	x	5
<b>Peirce</b>		x				1
<b>Otte</b>	x	x	x	x	x	5

Fonte: Dados da pesquisa

Conforme os autores, o PCEM pode ser exemplificado e observado entre *Sentido e Referência*, *Representação e Objeto*, *Intensão e Extensão*, *Analítico e Sintético*,

*Descoberta e Criação, Empirismo e Racionalismo, Álgebra e Geometria.* Essa distribuição está catalogada no Quadro 8.

Quadro 8: Aspecto complementar entre os pares.

<b>Título Autor (Ano)</b>	<b>Aspecto complementar entre os pares (Teórico)</b>
UM ESTUDO SOBRE COMPLEMENTARIDADES PRESENTES NA CONSTRUÇÃO DA TEORIA DOS NÚMEROS COMPLEXOS. França (2017)	Sentido e Referência (Frege); Representação e Objeto (Peirce); Intensão e Extensão (Abbagnano); Analítico e Sintético (Kant); Descoberta e Criação (Amoroso); Empirismo e Racionalismo (Kant; Bolzano)
A COMPLEMENTARIDADE ENTRE A GEOMETRIA E ÁLGEBRA: UM CAMINHO PARA À BUSCA DE SIGNIFICADOS MATEMÁTICOS. Barbosa (2016)	Intensão e Extensão (Abbagnano; Arnould; Hamilton); Álgebra e Geometria
O TERMO 'AXIOMA' NO TEMPO, CONSIDERANDO A RELAÇÃO ENTRE A FILOSOFIA E A MATEMÁTICA ALICERÇADA NO PENSAMENTO SOBRE COMPLEMENTARIDADE 'OTTEANO'. Paula (2014)	Ausente no capítulo investigado <sup>3</sup>
HERMANN GÜNTER GRASSMANN (1809-1877) E O DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO GEOMÉTRICO: A COMPLEMENTARIDADE ENTRE ALGUNS ASPECTOS DA DIE LINEALE AUDEHNUNGSLEHRE (1844). Nascimento (2013)	Analítico e o Sintético (Kant; Boutroux; Otte); Analítico e o Sintético na Ausdehnungslehre (Otte; Kant; Grassmann); Intensão e a Extensão na Ausdehnungslehre (Grassmann; Otte & Panza).
A COMPLEMENTARIDADE ENTRE OS ASPECTOS INTENSIONAL E EXTENSIONAL NA CONCEITUAÇÃO DE NÚMERO REAL PROPOSTA POR JOHN HORTON CONWAY. Fonseca (2010)	Intensional e Extensional (Kuyk; Otte)

Fonte: Dados da pesquisa

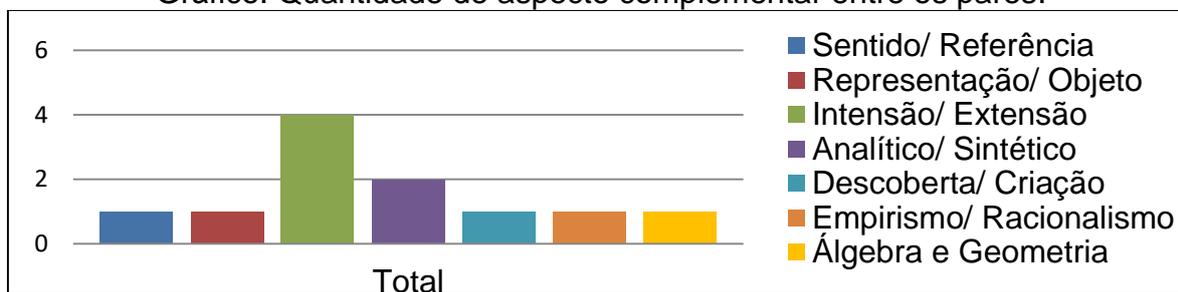
Consideramos importante ressaltar que esse estudo sobre o aspecto complementar entre os pares, descrito no Quadro 8, compôs-se apenas do capítulo selecionado, no qual foi possível identificar o par complementar no título, título de um capítulo ou subtítulo do capítulo das teses. Para os pares referidos, houve uma cuidadosa construção teórica com exemplos e aplicações na Educação Matemática. Por exemplo, em França (2017), observou-se o par *Analítico* e *Sintético* no estudo das noções de conjuntos e de números; em Barbosa (2016), a *Intensão* e *Extensão* em vetores, construções geométricas etc. Já Nascimento (2013) discorre sobre os aspetos *Intensão* e *Extensão* para o conceito da

<sup>3</sup> Paula (2014) não explora a Complementaridade entre pares no capítulo selecionado, a isso se deve a ocorrência do total ser o valor zero.

derivada de uma função, além de conceitos sobre Álgebra Linear; e Fonseca (2010) evidencia o *Intensional* e *Extensional* na conceituação de Número Real, usando os jogos de Conway.

No Gráfico, verificamos que o aspecto complementar entre *Álgebra e Geometria*, *Empirismo e Racionalismo*, *Descoberta e Criação*, *Representação e Objeto* e por fim *Sentido e Referência*, foram estudados por apenas um autor. Quatro autores registram o par intensão e extensão, apresentando maior decorrência; contudo, é importante destacar que alguns o desenvolvem mais detalhadamente que outros. Assim, um novo estudo poderá apontar em qual grau (muito ou pouco) esse assunto foi explorado entre os pesquisadores.

Gráfico: Quantidade de aspecto complementar entre os pares.



Fonte: Dados da pesquisa

Notamos que alguns autores escreveram de forma superficial sobre a Complementaridade entre o *Contínuo e Discreto*, *Intuição e Lógica*, *Abstração e Generalização*; além disso, não dedicaram um subtítulo para delinear e descrever de forma mais fundamentada e pormenorizada.

Na busca por apresentar de forma coesa a perspectiva teórica desenvolvida e estudada por Michael Otte em relação ao PCEM, os autores nomearam diferentes termos para expressar o mesmo conceito. No Quadro 9, destacamos como cada autor o nomeou.

Quadro 9: Nomenclaturas expressas para o PCEM.

Autor (Ano)	Nomenclatura
<b>França (2017)</b>	Princípio da Complementaridade na Educação Matemática (PCEM)
<b>Barbosa (2016)</b>	Princípio da Complementaridade
<b>Paula (2014)</b>	Pensamento sobre Complementaridade Otteano
<b>Nascimento (2013)</b>	Complementaridade
<b>Fonseca (2010)</b>	Complementaridade

Fonte: Dados da pesquisa

Em 1977, Otte e Steinbring publicaram o artigo “Probleme der Begriffsentwicklung – zum Stetigkeitsbegriff”, que discorre sobre a Complementaridade; entretanto, a *Semiótica Peirceana* não foi abordada neste escrito inicial. O artigo “Complementarity, Sets and Numbers” (2003) expressa com mais clareza e de modo mais completo o PCEM. Isso conduz à interpretação de que o PCEM não é uma teoria que está pronta e acabada, mas sim algo em metamorfose.

Essa hipótese é reforçada ao analisarmos o Quadro 9, pelo qual se observa serem apenas dois autores, Nascimento (2013) e Fonseca (2010), que utilizam o mesmo termo “Complementaridade” ao se referirem ao PCEM.

Com base nos Quadros 9 e 10, há três universidades e três pesquisadores que investigaram sobre o PCEM, obviamente esse fato não discrimina outras possíveis instituições e pesquisadores.

Quadro 10: Instituições onde as pesquisas foram desenvolvidas.

<b>Autor (Ano)</b>	<b>Instituição</b>	<b>Programa</b>
França (2017)	Universidade Anhanguera de São Paulo	Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática
Barbosa (2016)	Universidade Anhanguera de São Paulo	Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática
Paula (2014)	Universidade Federal de Mato Grosso	Programa de Pós-Graduação em Educação
Nascimento (2013)	Universidade Federal de Mato Grosso	Programa de Pós-Graduação em Educação
Fonseca (2010)	Pontifícia Universidade Católica de São Paulo	Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática

Fonte: Dados da pesquisa

Quadro 11: Orientadores.

<b>Autor (Ano)</b>	<b>Orientador</b>
França (2017)	Prof. Dr. Luiz Gonzaga Xavier de Barros
Barbosa (2016)	Prof. Dr. Luiz Gonzaga Xavier de Barros
Paula (2014)	Prof. Dr. Michael Friedrich Otte
Nascimento (2013)	Prof. Dr. Michael Friedrich Otte
Fonseca (2010)	Prof <sup>a</sup> . Dr <sup>a</sup> . Sonia Barbosa Camargo Iglioni.

Fonte: Dados da pesquisa

Para estudos futuros em relação ao PCEM, essas informações são substanciais, porquanto o pesquisador poderá iniciar suas buscas pelas bibliotecas dessas instituições, bem como procurar por outras orientações, trabalhos e projetos desenvolvidos pelos professores orientadores.

No que tange aos resultados alcançados nas pesquisas, apresentamos um texto panorâmico que mostra resumidamente os resultados alcançados pelos autores, contudo, não separadamente e sim unindo as falas, com a perspectiva de sintonizar as escritas em um único texto. Conforme Melo (2016 *apud* LOPES, 2018), esse ato se constitui em um *estado do conhecimento* ou uma *síntese integrativa do conhecimento* em relação às considerações tecidas nas teses.

## Os Estudos sobre o PCEM

Para descrever o PCEM, todos os autores iniciam expondo o conceito sobre o Princípio da Complementaridade, de Niels Bohr. Paula (2014) afirma que esse pesquisador foi um dos primeiros no meio acadêmico e científico a utilizar o termo “Complementaridade”, em 1927, e relacioná-lo à perspectiva interpretativa e explicativa de um fenômeno. Para Bohr, a Complementaridade “[...] implica a impossibilidade de qualquer separação nítida entre o comportamento dos objetos atômicos e a interação com os instrumentos de medida que servem para definir as condições em que os fenômenos aparecem.” (BOHN *apud* NASCIMENTO, 2013, p. 124).

O PCEM apoia-se e solidifica-se na Semiótica de Peirce com raízes profundas em Kant, por meio de quem os objetos da Matemática podem ser melhor compreendidos e estudados ao assumir a perspectiva semiótica. França ressalta que:

O interesse na obra de Peirce está no desenvolvimento da noção de signo através da tríade: objeto, representação e interpretante. Na linguagem da Matemática, os objetos são abstratos e são conhecidos através das suas representações, quer sejam algébricas ou geométricas, e também através das suas propriedades. Desta forma existe uma relação dinâmica entre objeto e representação no contexto das teorias matemáticas (FRANÇA, 2017, p. 35).

Segundo Nascimento (2013), quando Kant afirma que o conhecimento surge de duas fontes – a percepção (receptividade das impressões) e a razão (a espontaneidade dos conceitos) –, temos então a primeira manifestação da Complementaridade na Filosofia. Kant possibilita a análise de que “[...] Intuição e conceitos são assim os elementos de todo o nosso conhecimento, de modo que nem conceitos sem as correspondentes intuições, nem intuições sem conceitos podem produzir conhecimento.” (KANT, 2001, B 75).

Em relação às considerações, França (2017) explica que o Princípio da Complementaridade na Educação Matemática, desenvolvido por Michael Otte, apresenta-se como uma teoria adequada para a interpretação de aspectos históricos e filosóficos envolvidos no desenvolvimento de um conceito, e considera seu trabalho como ponto de partida, visto que novos aspectos complementares poderão ser identificados no contexto histórico-filosófico do desenvolvimento da Matemática, devido à grande riqueza do processo de descoberta e de criação do conhecimento humano.

Já Barbosa (2016) enfatiza a importância, no ensino de Matemática, em explorar tanto o aspecto aritmético quanto o aspecto geométrico e ainda considerar a relação complementar entre a intensão e a extensão na Matemática, pois em geral o ensino de Matemática tem-se apresentado muito mais aritmético e as preocupações estão mais voltadas à extensão da Matemática, contudo, não podemos pensar em extensão discordando da intenção.

Neste sentido, Paula (2014) afirma que devemos evitar considerar polarizadas essas forças dinamizadoras da mente humana, as quais entendemos serem sempre inseparáveis pela nossa própria natureza humana. O Pensamento sobre Complementaridade Otteano é

relevante ao nos conduzir e embalar no e pelo movimento, no qual o pensamento não acontece apenas na cabeça, mas numa perspectiva semiótica que ocorre em nível das representações nos signos.

De forma mais prática, Fonseca (2010) indica como desdobramentos de sua pesquisa um projeto que verse sobre a possibilidade de desenvolver um programa computacional para o jogo Hackenbush, com o objetivo de subsidiar a construção dos números por meio dos jogos, e também a organização de uma sequência didática fundamentada na teoria de Conway para abordar os números de forma única (dos naturais aos reais); ambas as propostas são para o Ensino Superior.

Nascimento (2013) vislumbra a importância do PCEM no que tange aos encaminhamentos necessários para a análise das dificuldades encontradas pelos alunos no curso de Licenciatura em Matemática, da UFMT. Sua hipótese é de que o uso exclusivo da abordagem sintética (regras de construções, algoritmos e cálculos), presente no ensino das disciplinas iniciais do curso, mostra-se como um obstáculo à aprendizagem dos conceitos algébricos que, por sua vez, exigem também um foco analítico. Sinaliza que a abordagem analítica e a sintética devem ser utilizadas complementarmente desde os primeiros momentos da formação inicial do futuro professor. E finaliza, observando que as contribuições de sua tese para a Educação Matemática evidenciam-se nas possibilidades de reflexão que podem ser realizadas sobre a formação inicial do professor de Matemática.

De modo mais amplo, os trabalhos sugerem a importância do PCEM na Educação Matemática. Eles não fornecem uma receita, uma sequência, mas apresentam novas complementaridades, múltiplos olhares para a Educação Matemática, conjecturando que o ensino de Matemática é uma atividade e uma relação entre os objetos e os questionamentos sobre os objetos da Matemática, como por exemplo:

[...] “Qual a realidade dos objetos matemáticos?”, “Como são conhecidos os objetos matemáticos e quais os critérios que sustentam a veracidade das afirmações matemáticas?”, “Os objetos e as leis matemáticas são inventados (construídos), descobertos, revelados, apreendidos?”. [...] são relevantes para a compreensão e para a metacompreensão da Matemática e necessários para a definição de propostas curriculares, por determinar escolhas de conteúdos, atitudes de ensino, expectativas de aprendizagem, indicadores de avaliação (BICUDO; GARNICA, 2011, p. 40).

Neste viés, compreendemos a importância do pensar sobre como as teses pesquisadas buscam estudar e explicar a riqueza dos objetos matemáticos, os quais, em geral, não podem ser tocados ou vistos. Essa peculiaridade sobre os objetos matemáticos e a construção, estrutura e atividade da própria Matemática gera vários obstáculos epistemológicos; e essas barreiras podem ser quebradas ou suavizadas com uma perspectiva complementar.

## Considerações Finais

Por intermédio da coleta de dados, refletimos que, no Brasil, o PCEM configura-se como uma nova metodologia de pesquisa, a qual decididamente merece ser mais profundamente explorada e estudada, dada a multiplicidade no campo das aplicações e contribuições na e para a Educação Matemática.

Podemos incorporar o conceito da Complementaridade entre vários pares de termos. Nos trabalhos averiguados, encontramos a discussão sobre sete pares. São eles: *Sentido e Referência*, *Representação e Objeto*, *Intensão e Extensão*, *Analítico e Sintético*, *Descoberta e Criação*, *Empirismo e Racionalismo*, *Álgebra e Geometria*. Todavia, ainda há outros pares que podem ser estudados de forma a contribuir com a socialização do conhecimento em Educação Matemática, entre os quais destacamos: *Significado e Informação* de uma mensagem, *Intuição e Lógica*, *Conceito e Algoritmo*, *Teoria e Prática*, *Discreto e Contínuo*, *Dedução e Indução*, *Indivíduo e Sociedade*, *Pensamento Simbólico e Objetos Matemáticos*, *Abstração e Generalização*, entre outros.

Nas teses analisadas, a fundamentação teórica está alicerçada, principalmente, em Bohr e Otte. Para futuras pesquisas, indicamos, nos capítulos que se referem à fundamentação teórica sobre o PCEM, um estudo mais aprofundando sobre os teóricos Kant e Peirce. Como o PCEM está em fase de desenvolvimento e implantação no Brasil, verificamos que nas pesquisas brasileiras analisadas ainda não há estabelecida uma uniformidade em relação à utilização da nomenclatura. Encontramos quatro termos para designá-lo: Princípio da Complementaridade na Educação Matemática (PCEM), Princípio da Complementaridade, Pensamento sobre Complementaridade Otteano e Complementaridade.

Os trabalhos acadêmicos observados foram desenvolvidos em três universidades brasileiras, ou seja, pela Universidade Anhanguera de São Paulo, Universidade Federal de Mato Grosso e Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. Os professores orientadores foram Prof. Dr. Luiz Gonzaga Xavier de Barros, Prof. Dr. Michael Friedrich Otte e Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Sonia Barbosa Camargo Iglori.

Consideramos importante fundamentar melhor a metodologia do PCEM, visto que essas pesquisas, embora sejam teóricas, bibliográficas, históricas, documentais etc., vão além de apresentar as teorias e estudos realizados. A proposta é olhar o passado com as lentes e olhares do pesquisador, ou seja, nós homens somos produto e autores da história, não a lemos e a escrevemos de forma desassociada de nossas próprias percepções e atividades. O PCEM é uma pesquisa teórica complementar, em seu âmago busca a Complementaridade entre sujeito, objeto e meios do conhecimento. Assim, nesse tipo de pesquisa, o sujeito, o objeto e o pesquisador estão relacionados e também separados.

## Referências

ALVES, Marcos Alexandre. TATSCH, Karla Jaqueline Souza. Epistemologia, História e Ensino de Matemática: Reflexões sobre formação e aprendizagem significativa. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, Cruzeiro do Sul, v. 8, n.3, p. 78-93, 2017. Disponível em: <http://revistapos.cruzeirosul.edu.br/index.php/rencima/article/view/1258/897>. Último acesso em: 29 set. 2020.

AQUINO-PEREIRA, Marcos Jose de. **Novas perspectivas da complementaridade entre educação não formal e formal**: vislumbres do “Programa Educacional Girassol” em Águas de São Pedro. 2015. 228f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Centro Universitário Salesiano (UNISAL), Americana, 2015. Disponível em: [https://unisal.br/wp-content/uploads/2016/03/Disserta%C3%A7%C3%A3o\\_Marcos-Jose-de-Aquino.pdf](https://unisal.br/wp-content/uploads/2016/03/Disserta%C3%A7%C3%A3o_Marcos-Jose-de-Aquino.pdf). Último acesso em: 29 set. 2020.

BARBOSA, Everaldo Fernandes. **A Complementaridade entre a Geometria e Álgebra: Um Caminho para à Busca de Significados Matemáticos**. 2016. 218f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Universidade Anhanguera de São Paulo, São Paulo, 2016. Disponível em: <http://repositorio.pgsskroton.com.br/bitstream/123456789/21799/1/EVERALDO%20FERNANDES%20BARBOSA.pdf>. Último acesso em: 29 set. 2020.

BARDIN, Laurence. **Análise de Conteúdo**. Tradução de Luís Antero Reto e Augusto Pinheiro. Lisboa, Portugal: Edições 70, 2016.

BICUDO, M. A. V. GARNICA, A. V. M. **Filosofia da Educação Matemática**. Coleção Tendências em Educação Matemática, 2 ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2011.

BOHR, Niels Henrik David. **Física atômica e conhecimento humano**: ensaios 1932 – 1957. Tradução Vera Ribeiro. Rio de Janeiro: Contraponto, 1995.

BUENO, Miriam Lara Piloni Borges. **Oralidade e Escrita: Uma Relação de Complementaridade**. 2003. 90f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2003. Disponível em: [http://repositorio.unicamp.br/bitstream/REPOSIP/253192/1/Bueno\\_MiriamLaraPiloniBorges\\_M.pdf](http://repositorio.unicamp.br/bitstream/REPOSIP/253192/1/Bueno_MiriamLaraPiloniBorges_M.pdf). Último acesso em: 29 set. 2020.

CORRÊA, Isabella Moreira de Paiva. **Como se fala matemática?** Um estudo sobre a complementaridade entre representação e comunicação na educação matemática. 2008. 154f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Federal de Mato Grosso, Cuiabá, 2008.

COSTA, Denise Kriedte da; CURY, Helena Noronha. Mapeamento de pesquisas interdisciplinares no Rio Grande do Sul: contribuição ao diálogo entre disciplinas. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, Cruzeiro do Sul, v. 7, n. 1, p. 59-73, 2016. Disponível em: <http://revistapos.cruzeirosul.edu.br/index.php/rencima/article/view/1084/810>. Último acesso em: 29 set. 2020.

DOUADY, Regine. Tool, Object, Setting, Window: Elements for Analysing and Constructing Didactical Situations in Mathematics. *In*: BISHOP, A. J.; van DORMOLEN; and MELLIN-OLSEN, S. (ed.). **Mathematical knowledge: Its growth through teaching**. Dordrecht: Reidel, 1991. p.109-103.

DUARTE, Samuel Gomes. **A complementaridade entre análise e síntese nos processos de ensino e de aprendizagem da Matemática**. 2014. 98 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade de São Paulo, São Paulo, 2014. Disponível em: [https://teses.usp.br/teses/disponiveis/48/48134/tde-06032015-162652/publico/SAMUEL\\_GOMES\\_DUARTE\\_rev.pdf](https://teses.usp.br/teses/disponiveis/48/48134/tde-06032015-162652/publico/SAMUEL_GOMES_DUARTE_rev.pdf). Último acesso em: 29 set. 2020.

FONSECA, Rogério Ferreira da. **A Complementaridade entre os aspectos intensional e extensional na conceituação de número real proposta por John Horton Conway**. 2010. 182 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2010. Disponível em: <https://sapientia.pucsp.br/bitstream/handle/10843/1/Rogério%20Ferreira%20da%20Fonseca.pdf>. Último acesso em: 29 set. 2020.

FRANÇA, Sávio Mendes. **Um Estudo Sobre Complementaridades Presentes na Construção da Teoria dos Números Complexos**. 2017. 181 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Universidade Anhanguera de São Paulo, São Paulo, 2017. Disponível em: <https://repositorio.pgsskroton.com/bitstream/123456789/12175/1/S%C3%A1vio%20Mendes%20Fran%C3%A7a%281%29.pdf>. Último acesso em: 29 set. 2020.

KANT, Immanuel (1787). **Crítica da razão pura**. Tradução de Manuela Pinto dos Santos, 5. ed. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 2001.

KORZYBSKI, Alfred. [1941] **Science and sanity**. 5. ed. New York: Institute of General Semantics, 1995.

KUYK, Willem. **Complementarity in mathematics**. Dordrecht: Reidel Publishing, 1977.

LOPES, Thiago Beirigo; WIELEWSKI, Gladys Denise; SÁ, Pedro Franco de. Levantamento da produção acadêmica em teses e dissertações brasileiras sobre ensino e aprendizagem de números decimais no período de 1995 a 2015. **Revista de Ensino de Ciências e de Matemática**. Cruzeiro do Sul, v. 8, n.3, p. 78-93, 2018. Disponível em: <http://revistapos.cruzeirosul.edu.br/index.php/rencima/article/view/1538/1030>. Último acesso em: 29 set. 2020.

NASCIMENTO, Demilson Benedito. **Hermann Günter Grassmann (1809-1877) e o Desenvolvimento do Pensamento Geométrico: A Complementaridade entre alguns aspectos da Die Lineale Audehnungslehre (1844)**. 2013. 189 f. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Federal de Mato Grosso, Cuiabá, 2013. Disponível em: <https://www1.ufmt.br/ufmt/unidade/userfiles/publicacoes/babcb22751bbf65fbb3af0f82a0db e16.pdf>. Último acesso em: 29 set. 2020.

OTTE, Michael Friedrich. Arithmetic and Geometry - Some Remarks on the Concept of Complementarity. **Studies in Philosophy and Education**, [S.l.], v. 10, p. 37–62, 1990.

OTTE, Michael Friedrich. **Das Formale, das Soziale und das Subjektive : eine einföhrung in die Philosophie und Didaktik der Mathematik**. Frankfurt: Suhrkamp Verlag, 1993a.

OTTE, Michael Friedrich. **O Formal, o Social e o Subjetivo: uma introdução à Filosofia e à Didática da Matemática**. São Paulo: Editora da Unesp, 1993b.

OTTE, Michael Friedrich. Complementary, Sets and Numbers. **Educational Studies in Math**, [S./], v. 53, p. 203-228, 2003.

OTTE, Michael Friedrich; STEINBRING, Heinz. Probleme de Begriffsentwicklung. *In: Didaktik der Mathematik*, [Eggenstein-Leopoldshafen], v.1, p. 16-25, 1977.

OTTE, Michael Friedrich; KEITEL, Christine; SEEGER, Falk. **Text, Wissen, Tätigkeit**. Königstein: Scriptor, 1980.

PAULA, Jacqueline Borges de. **O termo ‘Axioma’ no tempo, considerando a relação entre a Filosofia e a Matemática, alicerçada no pensamento sobre Complementaridade ‘Otteano’**. 2014. 539f. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal de Mato Grosso, Cuiabá, 2014. Disponível em: <https://www1.ufmt.br/ufmt/unidade/userfiles/publicacoes/775cf1027e664149888b3a10df0fc80c.pdf>. Último acesso em: 29 set. 2020.

PEIRCE, Charles Sanders. **Semiótica**. Trad. José Teixeira Coelho Neto. São Paulo: Editora Perspectiva, 1977.

SFARD, Anna. On the dual nature of mathematical conceptions. **Educational Studies in Mathematics**, [S./], v. 22, p. 1-36, 1991.