# L'ÉDUCATION MATHÉMATIQUE COMME CHAMP DE RECHERCHE ET CHAMP DE PRATIQUE:

## Résultats et défis

**Michèle Artigue**
LDAR, Université Paris Diderot-Paris 7 – Paris - França
artigue@math.jussieu.fr

**Résumé**

Dans ce texte, considérant l'éducation mathématique à la fois comme un champ de recherche et un champ de pratique, nous nous interrogeons sur les résultats obtenus et les défis à affronter. Nous insistons plus particulièrement sur les évolutions du champ résultant du développement des approches socio-culturelles et anthropologiques, et en particulier sur certains apports de la théorie anthropologique du didactique. Concernant les défis, nous insistons sur ceux qui relèvent de notre ambition partagée d'assurer à tous les élèves une éducation mathématique de qualité, en nous référant notamment à un document récemment publié par l'UNESCO sur les défis de l'éducation mathématique dans la scolarité de base auquel nous avons contribué.

**Mots clefs :** mathématique, recherche en éducation, didactique, théorie anthropologique, défis éducatifs

## I. INTRODUCTION

Nous célébrons à ce colloque les cinquante ans de la CIAEM. C'est là une excellente occasion pour se demander où en est cinquante ans après la naissance de cette organisation l'éducation mathématique, vue à la fois comme champ de recherche et comme champ de pratique. C'est une réflexion sur ce thème que je souhaiterais partager avec vous dans cette contribution. Je ne chercherai pas à être exhaustive, je m'appuierai plutôt sur ma propre expérience pour repérer des acquis, des évolutions qui me semblent importants et pointer des défis que nous devons relever.

Il y a cinquante ans, l'éducation mathématique comme champ de recherche commençait simplement à émerger. Rappelons-nous que si nous célébrons les cinquante ans de la CIAEM, le premier congrès ICME n'a eu lieu qu'en 1969 et que c'est en 1968 qu'a été créée, à l'initiative de Hans Freudenthal alors président de l'ICMI, la revue Educational

Studies in Mathematics. Au début des années soixante, comme l'a bien montré l'important travail historique qui a accompagné la célébration de son centenaire (Menghini, Furinghetti, Giacardi & Arzarello, 2008), l'ICMI était encore enfermée dans la tradition des études et rapports qui s'était mise en place à sa création en 1908. C'est une tradition qu'allait bouleverser Hans Freudenthal, renouvelant les ambitions de cette vénérable institution, et mettant en avant la nécessité de constituer l'éducation mathématique non seulement comme un champ de pratique et de réflexion sur la pratique mais aussi comme un champ de recherche. Au fil des années, cette ambition s'est effectivement réalisée et même si certains mettent toujours en doute sa légitimité à se prétendre un champ scientifique, ce champ de recherche s'est progressivement institutionnalisé. Laboratoires et centres de recherche, programmes de master et doctorat, revues spécialisées, ouvrages et colloques, associations et réseaux se sont ainsi multipliés dans le monde. Le cas de l'Amérique latine est, à ce titre, particulièrement instructif. Aujourd'hui, il est impossible à un chercheur en éducation mathématique de pouvoir prétendre connaître ce champ de recherche dans sa globalité, maîtriser la multiplicité des concepts et cadres théoriques qui y ont été développés. Comme dans tout champ scientifique se sont créés des domaines et des sousdomaines, et les « Handbooks » fleurissent permettant à chacun de se faire une idée de la façon dont la connaissance avance au-delà de son champ personnel d'expertise.

Mon champ d'expertise est, comme celui de tout un chacun, limité. Mes travaux, commencés à l'école élémentaire dans les années 70 au sein de l'IREM (Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques) de l'université Paris 7, ont pourtant concerné par la suite les différents niveaux de la scolarité jusqu'à l'université et des domaines mathématiques divers : nombres et géométrie au départ, puis analyse et algèbre. Ils ont été portés par des problématiques elles aussi diverses : étude de conceptions, développement d'ingénieries didactiques, questions relatives à l'intégration des outils technologiques à l'enseignement des mathématiques, problèmes de transitions institutionnelles, et, plus récemment, de rapports et connexions entre cadres théoriques et praxéologies de recherche. Mon expérience s'est de plus enrichie au fil des années des apports de mes étudiants, de collaborations multiples, et mon engagement au sein de l'ICMI m'a aidée à dépasser les frontières de la culture d'enseignement et de recherche où j'avais grandi. Pourtant, lorsque j'y réfléchis, ma vision des acquis de ce champ me semble de plus en plus partielle.

Assumant ces limites, dans ce qui suit, je voudrais insister dans une première partie sur quelques acquis de la recherche qui m'ont personnellement marquée parce qu'ils m'ont obligée à penser différemment, à questionner des visions répandues, y compris dans le monde de la recherche lui-même. J'en viendrai ensuite dans une seconde partie à la question, tout aussi cruciale, des défis.

## II. LE CHAMP DE L'ÉDUCATION MATHÉMATIQUE COMME CHAMP DE RECHERCHE : dês acquis importants

Au congrès ICME-11, Jeremy Kilpatrick et moi-même partagions une conférence plénière où déjà une question proche nous était posée : "What do we know that we did not know 15 years ago in mathematics education, and how have we come to know it?" Dans ma réponse à cette question (Artigue & Kilpatrick, 2011), je faisais d'abord un constat qu'il me semble important de reprendre ici. Ce qui nous apparaît comme des avancées récentes de ce champ était généralement en germe bien longtemps auparavant et donc, en un sens, la seule réponse que l'on peut apporter à la question posée est : « Rien ». Ceci étant, si l'on se situe au niveau de la communauté d'éducation mathématique, avec ce que cela impose en termes de partage dês connaissances et de niveau de consensus, de triangulation de résultats de recherches empiriques, il ne fait aucun doute que nous avons collectivement substantiellement progressé.

### II.1. Des consolidations évidentes et des domaines nouveaux investis

Le champ a en effet consolidé les connaissances acquises dans des domaines mathématiques depuis longtemps travaillés : domaines numérique, algébrique et géométrique, comme le montrent bien les plus récents « Handbooks » (cf. par exemple (Lester, 2007), (English, 2008)). Il a aussi assuré leur adaptation nécessaire à l'évolution des contextes culturels et sociaux, à l'évolution des moyens de l'enseignement, notamment celle due aux avancées technologiques. Car, comme le soulignait également Jeremy Kilpatrik dans la conférence mentionnée ci-dessus, dans le domaine de l'éducation, les réponses que peut apporter la recherche ne sont jamais des réponses définitives. Elles sont situées dans le temps comme dans l'espace. Chaque génération doit les remettre en chantier. Comme le montrait déjà bien par exemple l'étude ICMI sur l'algèbre (Stacey, Chick & Kendal, 2004), la recherche dans ce domaine a été profondément affectée par le développements des recherches sur les tableurs, mettant en évidence l'existence possible d'un monde entre l'arithmétique et l'algèbre susceptible d'atténuer les discontinuités identifiées entre ces deux domaines, les recherches sur les logiciels de calcul formel et les calculatrices symboliques qui ont amené à reconsidérer les rapports entre travail conceptuel et technique dans ce domaine, mais aussi les comparaisons internationales qui ont montré l'existence de différentes entrées et progressions possibles dans ce domaine mathématique.

La recherche a aussi sérieusement investi des domaines qui, encore considérés il y a 15 ans comme marginaux, sont aujourd'hui reconnus comme des composants indispensables de la formation mathématique que nos systèmes éducatifs devraient assurer aux élèves dont ils ont la charge, parce que leur place au sein des sciences mathématiques n'est aujourd'hui en rien marginale et parce qu'ils jouent un rôle essentiel dans les interactions entre sciences mathématiques et société. C'est le cas notamment des probabilités et statistiques, et ce n'est pas un hasard si nous célébrons aussi, à l'occasion de ce colloque, la publication de l'ouvrage associé à la première étude ICMI consacrée à l'éducation statistique (Batanero, Burrill & Reading, 2011). C'est aussi le cas de la modélisation, à laquelle une étude ICMI a déjà été consacrée (Blum, Galbraith, Henn & Niss, 2007) et dont le groupe emblématique ICTMA est devenu en 2003 groupe d'étude affilié de l'ICMI.

## II.2. La décentration des recherches de l'élève vers l'enseignant

La recherche aussi, et c'est un constat unanime, qui s'était à ses débuts, centrée sur l'élève, la compréhension de son fonctionnement cognitif, et l'élaboration d'organisations didactiques respectueuses à la fois de l'épistémologie de la discipline et de ce fonctionnement cognitif, s'est déplacée vers l'enseignant, le considérant lui aussi comme un acteur problématique de la relation didactique. Elle s'est intéressée à ses croyances, ses connaissances et ses pratiques. Elle a cherché à mieux identifier les connaissances nécessaires à l'exercice de ce métier, à comprendre leurs spécificités, leurs imbrications, la façon dont elles se forment et se développent (Even & Ball, 2008). La distinction faite dès 1986 entre « content knowledge », « pedagogical content knowledge » et « pedagogical knowledge » (Schulmann, 1986) a été ainsi retravaillée pour aboutir à des constructions comme celles proposées par exemple par Deborah Ball et ses collègues (Ball, Hill & Bass, 2005). Des constructions théoriques spécifiques se sont aussi développées, comme celle dénommée double approche des pratiques enseignantes (Robert & Rogalski, 2002) combinant les apports de la didactique des mathématiques et de l'ergonomie cognitive pour penser la complexité du métier enseignant ou la théorie de l'action conjointe (Sensevy & Mercier, 2007). La recherche s'est aussi intéressée aux pratiques de formation des enseignants et à leurs effets, analysant l'existant et ses limites, mais cherchant aussi à comprendre les raisons de la réussite de certaines pratiques. Est emblématique de cet intérêt le travail qui s'est internationalement développé autour de la pratique japonaise des « Lesson studies » (Isoda, Stephens, Ohara & Miyakawa, 2007). Les connaissances acquises dans ce domaine ont, en retour, fait substantiellement évoluer la vision des rapports entre recherche et pratique, entre chercheurs et enseignants, et plus généralement entre formateurs et formés. Elle nous conduisent aujourd'hui à questionner le langage uni-directionnel le plus souvent utilisé pour penser les rapports entre le monde de la recherche et son environnement : diffusion, dissémination… Elles nous conduisent à repenser l'idée de ressource éducative, en concevant ces dernières comme le soulignent Ghislaine Gueudet et Luc Trouche comme des objets dont la conception va nécessairement se prolonger dans l'usage, qui doivent être pensées pour permettre ce travail continu de conception et pour supporter les genèses instrumentales qui l'accompagnent (Gueudet & Trouche, 2010). Le travail que nous avons mené collectivement, il y a presque deux ans maintenant, lors de la dernière Ecole d'été de didactique des mathématiques en France, revisitant le concept d'ingénierie didactique qui a, pour notre communauté depuis le début des années 80 exprimé les liens consubstantiels existant entre recherche fondamentale et design didactique, analysant ses fondations, son usage et ses évolutions, pensant son futur possible, illustre particulièrement bien, me semble-t-il, ce questionnement permis par les avancées de la recherche (Margolinas & al., 2011). C'est aussi de telles évolutions dont témoignent des constructions originales comme celle de « Community of Inquiry » (Jaworski, 2007) combinant les apports de la théorie des communautés de pratiques et de la théorie de l'activité pour penser les interactions entre chercheurs et enseignants, ainsi que les dynamiques qui sont susceptibles de s'y nouer dans les communautés qu'ils constituent.

### II.3. Le renforcement des approches socio-culturelles

Mais si ces avancées sont essentielles, elles ne sont pas les seules. Elles se combinent avec des avancées qui se situent à un niveau plus méta-didactique et affectent globalement la recherche. Dans notre exposé commun avec Jeremy Kilpatrick, nous en avions évoqué plus particulièrement deux : la consolidation des approches socio-culturelles d'une part (Sriraman & English, 2010), l'attention croissante portée à la dimension sémiotique de l'activité mathématique d'autre part (Saenz-Ludlow & Presmeg, 2006). Je me centrerai plus particulièrement ici sur la première et j'évoquerai la seconde lors de la table ronde dédiée à l'impact de la technologie sur les curricula car c'est dans ce contexte de recherche, et via les collaborations engagées avec différents chercheurs, que cette dimension est devenue pour moi essentielle. On ne peut nier en effet que les technologies informatiques ont contribué à cette avancée, comme l'attestent par exemple les numéros spéciaux de la revue Educational Studies in Mathematics (Nemirovsky & Borba, 2004) et (Edwards, Radford & Arzarello, 2009) ou la récente étude ICMI (Hoyles & Lagrange, 2010). Elles l'ont fait, d'une part en modifiant spectaculairement les moyens sémiotiques du travail mathématique et donc en faisant de l'étude sémiotique une dimension incontournable de l'étude des potentialités offertes par ces technologies à l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques, d'autre part en nous fournissant les moyens techniques d'une analyse fine des médiations sémiotiques, prenant en compte leur multimodalité sans se restreindre au langage naturel et aux registres de représentation sémiotiques institués.

Le champ de l'éducation mathématique est un champ dans lequel co-existent une diversité d'approches théoriques (Sriraman & English, 2010). On ne peut cependant nier que les deux dernières décennies ont vu des déplacements théoriques importants avec une influence accrue des approches socio-culturelles. Ce déplacement théorique a pris des formes diverses et chacun, suivant les expériences qu'il a vécues, suivant ses intérêts de recherche, y est sensible de façon différente. Le champ si sujet à controverses de l'ethnomathématique dont l'ICMI a honoré le père fondateur Ubiratan D'Ambrosio de la prestigieuse médaille Felix Klein (D'Ambrosio, 2008), le champ de l'éducation mathématique critique qui place au centre de ses préoccupations la dimension morale et politique de l'éducation mathématique, tant comme champ de recherche que de pratique, les questions de justice sociale et d'équité (Skovsmose & Valero, 2008) ou les nombreux travaux relevant du champ de la socio-épistémologie (Cantoral & Farfán, 2003) publiés notamment dans la revue RELIME, sont sans aucun doute emblématiques de ce déplacement pour nombre de participants à ce colloque. Au sein de ma communauté didactique, c'est la théorie anthropologique du didactique initiée par Yves Chevallard (Chevallard, 1992, 2002) qui a concrétisé en un sens cette évolution. Il n'est pas dans mon intention de présenter ici cette théorie et je renvoie le lecteur intéressé par exemple à la synthèse (Bosch & Gascón, 2006), mais je souhaiterais faire sentir comment elle a contribué et contribue, au fil de son élaboration progressive, à modifier l'approche des questions didactiques.

## II.4. La contribution de la TAD : les transitions institutionnelles

C'est en encadrant la thèse de Brigitte Grugeon (Grugeon, 1995) que cette évolution a pour moi débuté. La TAD n'était pas alors développée comme elle l'est aujourd'hui mais son état était déjà suffisamment avancé pour montrer ce qu'elle pouvait apporter au travail didactique. A l'origine de cette recherche, se trouvait un constat d'échec : celui des classes d'adaptation créées pour permettre aux meilleurs élèves issus des lycées professionnels (LP) de rejoindre l'enseignement général technologique en France. Des élèves motivés qui devenaient en l'espace de quelques mois, pour beaucoup d'entre eux, des élèves en échec, perdant progressivement toute confiance en eux. Au centre de cet échec : l'algèbre, et au niveau des explications du dysfonctionnement, des raisonnements très tentants comme le suivant : l'orientation de ces élèves vers l'enseignement professionnel étant majoritairement due à un échec dans l'enseignement général, rien d'étonnant à ce que, quelques années plus tard, on récupère, en dépit de la réussite en LP, des élèves cognitivement incapables de suivre un enseignement général. La recherche en didactique de l'algèbre pouvait même être mise au service de ces argumentations. Elle permettait en effet de proposer aux élèves des tâches bien répertoriées, de rapporter leurs réponses à des catégories bien identifiées, de les interpréter en termes de conceptions et de niveaux de conceptualisation pour constater la faiblesse de ces derniers.

Dans la recherche de Brigitte Grugeon, l'adoption d'une approche anthropologique a permis de questionner et dépasser cette vision. Ce que cette approche a en fait changé, c'est la problématique de la recherche elle-même, en projetant le problème rencontré dans une plus grande catégorie de problèmes : les problèmes de transition institutionnelle, car ce qui était d'abord en jeu, c'était la transition entre deux institutions : le lycée professionnel et le lycée d'enseignement général. La théorie anthropologique conduisait à postuler que ces deux institutions avaient développé des rapports institutionnels différents au domaine de l'algèbre qu'elles reconnaissent toutes deux comme un domaine d'enseignement. Ces différences pouvaient être de nature diverse. Certains objets pouvaient exister dans une institution et non dans l'autre. Mais ce n'étaient pas là les différences les plus problématiques car elles étaient aisément repérables. Les différences de rapports institutionnels sur des objets communs, lorsqu'une lecture superficielle des programmes donne l'impression que l'on est passé de l'un à l'autre par une simple opération de "couper-coller" accompagnée de changements de style mineurs, étaient bien plus problématiques.

Postuler leur existence avant même d'avoir cherché à les identifier précisément, conduisait à re-problématiser la recherche. Etait-il légitime d'attribuer aux seules difficultés cognitives des élèves leur échec en algèbre dans ce processus de transition institutionnelle ? Ne pouvait-on faire l'hypothèse que cet échec était dû en partie, fortement renforcé, par des différences subtiles de rapports institutionnels ? A ceci se rajouterait une autre difficulté, elle aussi inhérente aux transitions institutionnelles. Les connaissances mathématiques que les élèves développent sont contextualisées. Seule une faible portion de ces connaissances est décontextualisée sous forme de savoirs (Brousseau, 1997). Les enseignants le savent bien, même s'ils ne l'explicitent pas, et cette connaissance se manifeste dans les stratégies qu'ils développent pour aider les élèves à mobiliser les connaissances nécessaires, en évoquant un moment, un épisode de l'histoire de la classe (Matheron, 2000). Toute transition institutionnelle met à mal ces stratégies d'évocation car il n'y a plus d'histoire à partager, et l'établissement des connections permettant la mobilisation des connaissances, passant sous la seule responsabilité de l'élève, devient bien plus aléatoire.

C'est en se situant dans cette approche que Brigitte Grugeon s'est attaquée au problème de la transition en algèbre entre lycée professionnel et lycée général, refusant de se laisser piéger par des premières interprétations trop tentantes. Cela lui a permis un autre regard sur les élèves, beaucoup plus constructif. Cela a aussi mis en évidence que, pour ces élèves issus de l'enseignement professionnel, dont la culture algébrique était organisée principalement autour du monde des formules, et non comme au lycée général autour du monde des équations, d'autres leviers étaient possibles, passant notamment par l'enrichissement du travail sur les formules, sa complexification technique progressive et sa mise en relation avec le monde fonctionnel. Mais ces leviers, la hiérarchie des valeurs scolaires les avait occultés. Il fallait, pour les rendre visibles, la mettre en évidence et la questionner. L’approche institutionnelle a permis de le faire puis de mettre en place, dans un second temps, une ingénierie didactique mieux adaptée à ces élèves et d'obtenir au bout de deux ans des résultats non pas miraculeux mais pour le moins inespérés.

Il est intéressant de noter que la recherche ne s’est pas arrêtée là et que la collaboration avec la communauté EIAH (Environnements informatiques d’apprentissage humain) a permis ensuite de transformer l’outil méthodologique qui avait été construit en un outil de diagnostic des compétences algébriques des élèves de la scolarité obligatoire qui a été progressivement informatisé et raffiné (Delozanne & al., 2010). Le changement de regard imprègne cet outil de diagnostic. Il est en effet pensé pour permettre de repérer les cohérences de fonctionnement des élèves et identifier, en s'appuyant sur les acquis de la recherche, des compétences en émergence à partir desquelles concevoir des progressions possibles. Les retours d'usage ont par ailleurs conduit à associer au diagnostic des profils d'élèves fournissant une vision plus synthétique et, aujourd'hui, à construire et expérimenter en fonction de ces profils des parcours d'apprentissage différenciés pour les élèves (une différenciation demandée par l'institution qui sous-estime comme souvent fortement les exigences des demandes qu'elle formule). Tout ceci s'effectue avec une vision participative de la conception de ressources pour l'enseignement qui illustre les évolutions mentionnées plus haut des rapports entre recherche et pratique. En particulier, actuellement, le projet se développe en collaboration étroite avec l'association d'enseignants Sésamat qui a implémenté le diagnostic sur sa plateforme Mathenpoche et est associée à la conception et à l'expérimentation des parcours d'apprentissage différenciés (Grugeon-Allys & al., 2011).

Après cette recherche, en quelque sorte fondatrice, la TAD a été utilisée dans divers travaux concernant les transitions institutionnelles, et notamment la transition secondaireuniversité. Fréderic Praslon, dans sa thèse consacrée à la notion de dérivée et à son environnement (Praslon, 2000), a ainsi questionné la vision usuelle à l'époque de cette transition dans le domaine de l'analyse élémentaire en termes de transition vers une pensée mathématique avancée, l'AMT (Tall, 1991), et où l'accent était mis sur le saut cognitif de représentait le passage d'un Calculus relevant du monde proceptuel à une Analyse relevant du monde formel, pour reprendre la terminologie introduite par David Tall (Tall, 2004). Il a montré que la situation était bien plus complexe. Ce qui était en jeu dans la transition était en fait un ensemble de microruptures dans les rapports institutionnels, bien moins facilement repérables par ses acteurs, mais dont l'accumulation exprimait un changement décisif de culture. Le développement de la TAD, avec la mise en place de la notion de praxéologie pour modéliser les pratiques mathématiques et didactiques, la structuration des praxéologies en praxéologies ponctuelles, locales, régionales et globales (Chevallard, 2002), a progressivement enrichi les outils conceptuels disponibles pour étudier ces rapports institutionnels et leurs discontinuités. C'est ainsi que les travaux menés sur l'enseignement des limites en Espagne ont pu mettre en évidence des ruptures de rapports institutionnels entre lycée et université s'exprimant à travers des caractéristiques praxéologiques (Bosch, Fonseca & Gascón, 2004). Selon ces auteurs, les praxéologies relatives à cette notion sont au lycée principalement ponctuelles, rigides et isolées, centrées sur leur bloc practicotechnique, tandis qu'elles sont d'emblée régionales à l'université, centrées sur leur bloc technologico-théorique, sans qu'à aucun moment ne soient mises en place des praxéologies locales relativement complètes permettant d'assurer l'interface entre ces deux types de praxéologies. Plus récemment encore, la thèse de Ridha Najar a mis en évidence d'autres ruptures institutionnelles concernant cette fois le monde fonctionnel vu dans sa dimension ensembliste (Najar, 2010). Il montre que si le monde fonctionnel ensembliste est déjà présent au lycée en Tunisie en particulier dans le contexte de l'étude des transformations géométriques, on retrouve des caractéristiques praxéologiques comparables à celles identifiées dans la recherche menée en Espagne sur les limites : prédominance de praxéologies ponctuelles et rigides au lycée, centration sur le bloc pratique, au moins pour ce qui est du « topos » de l'étudiant (ce dont il est mathématiquement responsable), praxéologies régionales au niveau universitaire et sousestimation des besoins techniques et sémiotiques que génère le travail avec les objets fonctionnels ensemblistes pour un public qui a jusqu'ici travaillé les objets fonctionnels essentiellement dans le cadre de l'algèbre élémentaire et de l'analyse. Toutes ces recherches comme la recherche initiale de Brigitte Grugeon obligent à questionner les interprétations cognitives usuelles, à percevoir les transitions institutionnelles comme des changements de culture, avec leurs dimensions explicites mais aussi largement implicites, et à questionner les stratégies développées pour aider les acteurs de ces transitions, tant enseignants qu'étudiants à y faire face.

### II.5. La contribution de la TAD : études comparatives et hiérachie de niveaux de codétermination

Dans la dernière décennie, la TAD a continué à se développer, se dotant de nouveaux outils et également d'une dimension de design didactique à travers les notions d'activité d'étude et de recherche, puis de parcours d'étude et de recherche. Je ne rentrerai pas dans ce dernier aspect de la théorie pour lequel je renvoie à (Chevallard, 2011) et aux travaux du groupe AMPERES (Matheron & Noirfalise, 2007), mais j'évoquerai brièvement une autre conceptualisation de la théorie : la hiérarchie des niveaux de co-détermination dont j'ai pu personnellement éprouver l'intérêt dans un contexte comparatif. Les études comparatives se sont multipliées ces dernières années, motivées en partie par l'impact croissant sur les politiques éducatives des évaluations internationales à grande échelle telles TIMSS et PISA. En résulte pour notre communauté d'éducation mathématique la nécessité de prendre ses responsabilités par rapport à ce phénomène en portant un regard critique sur ces évaluations, sur les interprétations qui sont faites des données recueillies et sur leur usage politique (Keitel

& Kilpatrick, 1999), en menant aussi les études qu'elle juge nécessaires pour répondre aux multiples questions qui en émergent. L'étude ICMI 13 (Leung, Graf & Lopez-Real, 2006) qui a effectué une synthèse de travaux permettant d'approfondir la comparaison entre les cultures d'éducation mathématique de pays d'Asie de tradition confucéenne et de pays de tradition occidentale est à ce titre emblématique, tout comme la Learner's Perspective Study initiée par David Clarke, qui étudie des pratiques d'enseignement considérées comme performantes dans 12 pays différents (Clarke, Keitel & Shimizu, 2006). Avec Carl Winslow, dans le cadre de la préparation d'un projet spécial pour le colloque de l'Espace Mathématique Francophone EMF2009, nous avons mené une méta-analyse de travaux comparatifs allant des études à grande échelle que sont TIMSS et PISA aux objets très locaux que sont nécessairement les thèses centrées sur ces questions (Artigue & Winslow, 2010). Il nous fallait pour développer cette méta-étude un cadre conceptuel qui permette, même pour des études visant à comparer les performances mathématiques des élèves dans des domaines précis, d'analyser comment la comparaison prenait en compte les conditions et contraintes de nature socio-culturelle qui façonnaient les apprentissages évalués. La hiérarchie des niveaux de codétermination développée dans le cadre de la TAD nous a semblé un outil conceptuel approprié. En effet, la TAD postule que l'écologie des praxéologies mathématiques et didactiques est conditionnée par des conditions et contraintes qui se situent à différents niveaux, et elle distingue 9 niveaux différents allant d'un sujet mathématique précis par exemple la résolution d'équations du premier degré jusqu'au niveau dit de civilisation. La figure 1 reprise de (Artigue , Coagri-Nassouri, Smida & Winslow, 2011) précise ces différents niveaux en interaction dialectique (d'où le terme co-détermination). La hiérarchie des niveaux sous-disciplinaires renvoie à l'organisation curriculaire dans un contexte donné, et peut-être mise en relation avec la structuration des praxéologies en praxéologies ponctuelles (niveau du sujet), locales (niveau du thème), régionales (niveau du secteur) et globales (niveau du domaine). Les niveaux surdisciplinaires expriment eux la dépendance de l'enseignement d'une discipline donnée de conditions et contraintes extérieures à cette discipline, et pour l'essentiel, difficilement modifiables par la seule volonté des acteurs de la relation didactique. Cet outil nous a conduit à envisager a priori dix catégories possibles pour des études comparatives et de situer par rapport à elles les divers travaux pris en compte dans la méta-étude, en nous interrogeant sur le(s) niveau(x) sur lesquels portai(en)t la comparaison, les moyens méthodologiques utilisés pour mener la comparaison et ceux mobilisés pour l'interprétation, la façon dont l'étude articulait relations horizontales (un même niveau dans différents contextes) et relations verticales (différents niveaux dans un même contexte) et comment étaient établies les relations causales identifiées, le cas échéant.

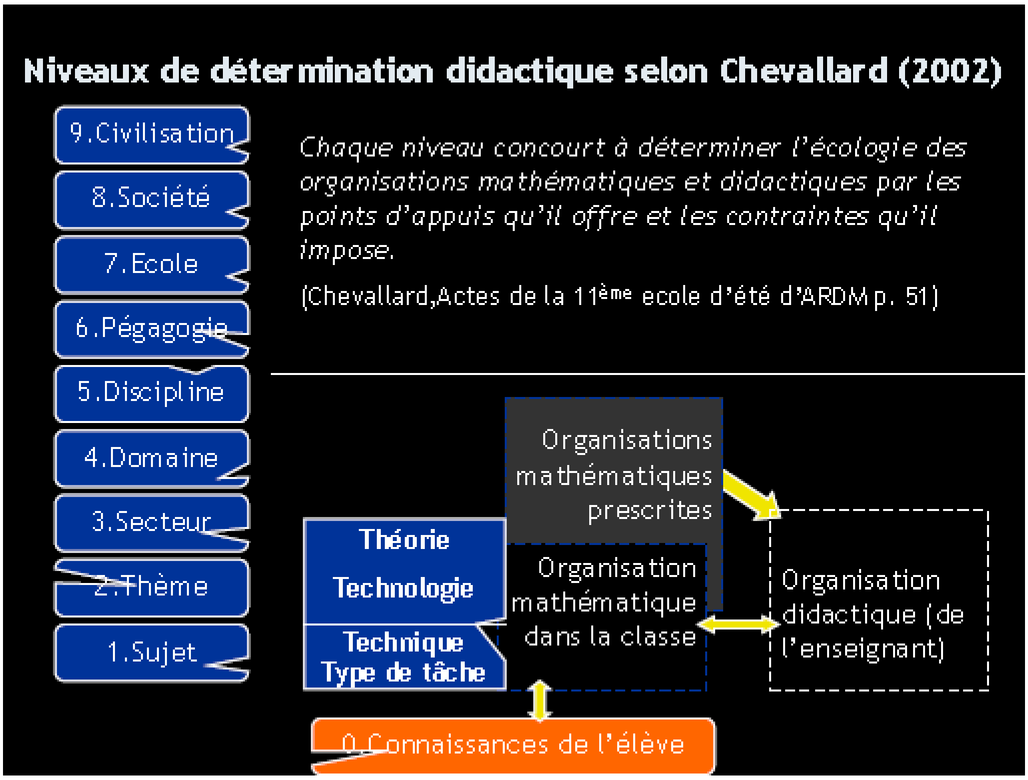


Figure 1: L'outil d'analyse construit
(Artigue, Coagri-Nassouri, Smida & Winslow, 2011, p. 50)

Cette approche s'est révélée fructueuse. Elle a permis de situer les différents travaux dans un même cadre, de mettre en lumière la diversité des types d'études et la richesse déjà accumulée, les complémentarités possibles entre travaux mais aussi certaines lacunes et dérives possibles. Elle a aussi mis clairement en évidence les problèmes méthodologiques délicats que posent ces recherches, et la vigilance dont les chercheurs doivent faire preuve pour résister à la tentation de faire parler les données au-delà de ce qu'elles permettent, que ce soit en opérant des regroupements et des moyennisations abusives, en extrapolant des résultats obtenus dans des contextes très spécifiques, ou en interprétant abusivement en termes de causalité des relations observées entre niveaux de co-détermination. Elle a montré également la vigilance à exercer par rapport au pouvoir exercé par les cultures dominantes dont les modèles culturels ne sont en rien des références neutres et, non indépendamment, la nécessité de porter une attention plus grande aux questions linguistiques.

J'ai depuis réinvesti cet outil dans le cadre d'un projet CAPES-COFECUB avec des collègues brésiliens (Alves Dias, Artigue, Jahn & Campos, 2010). Notre ambition était de développer en commun des ressources pour faciliter la transition secondaire-supérieur dans le domaine des fonctions. Il nous a semblé nécessaire dans un premier temps de comprendre ce qu'était la culture fonctionnelle dans les deux pays à la fin de l'enseignement secondaire et quelles étaient les attentes au début de l'université pour comprendre ce qui était en jeu dans cette transition. L'étude menée a mis en évidence des différences insoupçonnées entre ces deux cultures et inattendues à une époque où nous semblons tous soumis aux mêmes influences globalisantes, s'agissant d'un objet aussi central en mathématiques que l'est la notion de fonction. Pour comprendre les raisons d'être différences qui se traduisaient par des hiérarchies sujet-thème-secteur-domaine substantiellement différentes dans les deux pays, les cohérences sous-tendant chaque choix curriculaire et leur impact sur la transition secondaire-supérieur, il nous a fallu faire intervenir tous les niveaux de co-détermination. Et cette considération des différents niveaux de l'échelle de co-détermination nous a aidés aussi à comprendre les marges de manoeuvre dont nous disposions dans chaque système et en quoi pourrait réellement consister notre collaboration dans la production de ressources. Ce travail et le cadre théorique qui l'a soutenu nous ont, je crois, aidés à éviter le piège de l'imposition des valeurs d'une culture dominante, un piège que nous avons, malgré notre bonne volonté, tant de difficultés à éviter dans les relations entre centres et périphéries.

J'arrêterai là cette partie. J'ai essayé d'y expliquer comment une approche spécifique, celle de la TAD, m'avait aidée à prendre en charge la dimension sociale et culturelle inhérente à tout projet ou réalité d'apprentissage, d'enseignement. Ce n'est bien sûr qu'une approche parmi celles multiples que la recherche en éducation mathématique nous offre pour prendre en charge cette dimension. Elle m'est plus accessible parce qu'elle a été développée au sein de ma propre culture et parce que la communauté à laquelle j'appartiens fait l'effort d'en penser les relations avec les autres composantes de cette culture, notamment la théorie des situations didactiques (Brousseau, 1997). Au fil des années, elle est devenue pour moi un outil opérationnel que j'utilise et combine avec d'autres lorsque c'est possible en respectant les cohérences internes à chaque cadre, comme le montre par exemple l'approche instrumentale de l'intégration des technologies informatiques que j'évoquerai dans la table ronde sur l'impact curriculaire de ces technologies (Artigue, 2002), (Guin, Ruthven & Trouche, 2005). Certains pourront s'étonner que je lui aie consacré une telle place dans mon exposé. Mais prendre en compte sérieusement la dimension socio-culturelle de l'éducation mathématique, c'est aussi prendre en compte le fait que nos praxéologies de recherche sont, elles-mêmes, socialement et culturellement situées (Artigue, Bosch & Gascón, 2011). J'espère que l'itinéraire dont j'ai décrit quelques épisodes aidera à mieux appréhender la TAD dans son caractère situé, tout en montrant la possibilité d'engager le dialogue avec des approches et constructions théoriques qui, pour être différentes, admettent ce que, dans nos travaux visant à l'articulation de cadres théoriques, nous appelons des systèmes de « key concerns » proches (Artigue, 2009). C'est, me semble-t-il, un travail essentiel pour notre communauté si nous voulons dépasser l'image fragmentée et faiblement cohérente que donne trop souvent la recherche en éducation mathématique, et une condition nécessaire à la communication de notre communauté avec l'extérieur.

## III. LES DÉFIS DE L'ÉDUCATION MATHÉMATIQUE

J'en viendrai maintenant à la question des défis. Comme pour tout champ scientifique, certains de ces défis sont plutôt internes, résultant des questions posées par le développement même du champ, d'autres plutôt externes, liés aux relations que ce champ entretient avec le monde extérieur, même si la distinction entre défis internes et externes n'est pas toujours facile à faire comme le montre le paragraphe précédent.

Ils sont nombreux et peuvent être formulés de façon diverses. Ainsi, ayant à se prononcer sur les défis à relever par l'ICMI lors du Symposium célébrant son centenaire, Morten Blomhøj identifiait et déclinait, de façon très pertinente, les dix défis suivants (Blomhøj, 2008):

- The challenge of keeping the meta-reflections on mathematics education research alive
- The challenge of defining and strengthening the relations to the supporting sciences
- The challenge of avoiding isolation among sub-paradigms
- The challenge of supporting the interplay between research and development of practices
- The challenge of integrating mathematics in general liberal education for democracy
- The challenge of defining evidenced based practices of mathematics teaching
- The challenge of mathematics education for all
- The challenge of improving teacher education and teacher professional development

- The challenge of integrating ICT in mathematics education
- The challenge of integrating mathematical modeling in mathematics education."

Dans un document publié récemment par l'UNESCO concernant les défis de l'enseignement des mathématiques dans l'éducation de base à la préparation duquel j'ai été étroitement associée (UNESCO, 2011), le défi premier qui est posé est celui d'assurer à tous une éducation mathématique de qualité, en cohérence avec le « Millenium goal » adopté par l'Organisation des Nations Unies en 2000. Dans le texte, une fois clarifié ce que l'on entend par une éducation mathématique de qualité et les rapports entre cette dernière et le concept de plus en plus utilisé de « littéracie mathématique », il est affirmé que l'on ne peut espérer relever ce défi sans en relever divers autres. Le premier est, bien sûr, celui de l'accessibilité car l'accès à l'éducation est aujourd'hui dénié à plus de 75 millions d'enfants et car beaucoup de ceux qui commencent à suivre une éducation de base ne peuvent la terminer. Mais même lorsque l'accès à la scolarité de base est assuré à tous, l'accessibilité de tous à une éducation de qualité est loin d'être acquise. Parmi les nombreux défis à relever pour changer cette situation, le document en identifie et décline un certain nombre sans les hiérarchiser. Nous en reproduisons la liste ciaprès, renvoyant le lecteur pour plus de détail au document accessible en ligne:

- Le défi de faire face aux demandes d'une littéracie mathématique dont les exigences vont croissant dans nos sociétés.
- Le défi de la tension entre la satisfaction des besoins d'éducation pour tous et d'éducation de qualité, deux ambitions souvent considérées comme impossibles à satisfaire simultanément.
- Le défi de l'élaboration de constructions curriculaires combinant de façon cohérente et équilibrée progression dans les contenus mathématiques et développement de competences plus transversales.
- Le défi de l'évolution vers des pratiques d'enseignement plus efficaces et plus stimulantes et de la production de ressources adaptées à ces évolutions.
- Le défi de la mise en cohérence des pratiques d'évaluation avec les valeurs que porte le concept d'éducation mathématique de qualité tel que compris dans le texte.
- Le défi de la formation initiale des enseignants et de leur développement professionnel, mais aussi celui de leur recrutement et de leur rétention hautement dependant de leur statut.

- Le défi des complémentarités à assurer entre éducation formelle et informelle.
- Le défi du pilotage et de la régulation des évolutions curriculaires, dont les forms usuelles sont si souvent à juste titre dénoncées.
- Le défi technologique, en prenant notamment en compte ce que peuvent apporter aujourd'hui les technologies numériques pour développer les collaborations, mutualiser les ressources, renforcer les solidarités.
- Le défi de l'organisation de synergies productives entre les différentes communautés impliquées dans l'éducation mathématique: mathématiciens, didacticiens, formateurs d'enseignants, enseignants, institutionnels et communautés éducatives au sens large.
- Le défi des diversités sociales, culturelles, linguistiques et de genre, en voyant dans ces diversités une richesse et non seulement une source de problèmes.
- Le défi enfin de la recherche, en rendant cette recherche plus à même de répondre aux attentes légitimes de la société.

Même si les formulations sont différentes tout comme les audiences a priori visées, les deux discours me semblent profondément cohérents. Ce que nous ambitionnons tous, c'est bien en effet de contribuer à faire de l'idée d'éducation de qualité pour tous plus qu'un slogan, une réalité, et nous nous retrouvons également sans aucun doute dans la vision globale que nous avons de ce qu'est une éducation mathématique de qualité aujourd'hui et dans l'appréciation de la distance qui nous en sépare. Les convergences n'ont donc rien d'inattendu. Mais s'il y a convergence, la question de savoir comment relever efficacement ces défis reste une question largement ouverte. Nous n'y arriverons certainement pas sans l'aide d'une recherche de qualité, respectueuse de nos diversités mais aussi capable de formuler clairement ses acquis et de montrer comment ils peuvent servir l'éducation mathématique comme champ de pratiques, nourrir la formation des enseignants et leur développement professionnel, en s'adaptant à la diversité des contextes et à l'évolution des besoins en termes de formation mathématique. Pour cela, il nous faut trouver les moyens d'affronter théoriquement comme pratiquement la question des changements d'échelle, trouver des équilibres plus satisfaisant entre méthodologies qualitatives et quantitatives, convaincre que nous sommes capables de construire des formes d'évidence crédibles pour pouvoir résister efficacement à celles, inadaptées, que l'on cherche à nous imposer. De plus, même si notre contribution en tant que chercheurs est essentielle, nous ne pouvons agir seuls, et la tentation de l'isolement est aujourd'hui, face aux pressions multiples subies par le champ de l'éducation, une tentation particulièrement dangereuse. Des améliorations substantielles et durables ne seront possibles que si se mettent en place les synergies nécessaires entre les différentes communautés concernées par l'éducation mathématique, si se développent et renforcent les collaborations nécessaires et les solidarités, aux niveaux local, régional et international. C'est notamment dans cet esprit que l'ICMI, l'IMU (International Mathematical Union), en connexion avec l'UNESCO et l'ICIAM (International Council for Industrial and Applied Mathematics), ont récemment lancé le projet CANP (Capacity and Networking Project) dont l'ambition est de promouvoir et soutenir le développement de réseaux régionaux de mathématiciens, didacticiens et enseignants de mathématiques pour accroître les capacités et développer les synergies et solidarités en matière de formation d'enseignants. Ce projet est structuré autour de la réalisation d'écoles ou séminaires de deux semaines visant, sans distinction, tous ceux engagés dans la formation des enseignants et, de façon coordonnée, la réponse à la fois aux besoins mathématiques et didactiques de cette formation dans le contexte régional considéré. La première réalisation, soutenue également par le CIMPA (Centre International de Mathématiques Pures et Appliquées), et co-organisée à parité par mathématiciens et didacticiens doit avoir lieu au Mali en septembre 2011 et concernera l'Afrique occidentale francophone. La seconde devrait avoir lieu l'an prochain en Amérique centrale avec le soutien fort, je l'espère, de la CIAEM.

## RÉFÉRENCES

ALVES DIAS, M., ARTIGUE, M., JAHN, A.P., CAMPOS, T. (2010) A comparative study of the secondarytertiary transition. In: Pinto M.F. & Kawasaki T.F. (Eds.), **Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education**. Vol. 2, pp. 129-136. Belo Horizonte, Brazil: PME, 2010.

ARTIGUE, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. **International Journal of Computers for Mathematical Learning**, 7, 245–274.

ARTIGUE, M. (Ed.) (2009). Connecting Approaches to Technology Enhanced Learning in Mathematics : The TELMA Experience. **International Journal of Computers for Mathematical Learning,** 14.3

ARTIGUE, M., WINSLOW, C. (2010) International comparative studies on mathematics education : a viewpoint from the anthropological theory of didactics. **Recherche en Didactique des Mathématiques**, 30/1, 47-82.

ARTIGUE, M., COAGRI-NASSOURI, C., SMIDA, H., WINSLOW, C. (coord.) (2011). Projet Spécial 2. Evaluations internationales : Impacts politiques, curriculaires et place des pays francophones. In A. Kuzniak et M. Sokhna (Eds.) Actes du Colloque International

Espace Mathématique Francophone 2009, Enseignement des mathématiques et développement, enjeux de société et de formation, **Revue Internationale Francophone**, N° Spécial 2010, pp. 1-65. http://fastef.ucad.sn/EMF2009/colloque.htm

ARTIGUE, M., KILPATRICK, J. (2008). What Do We Know? And How Do We Know It? **Proceedings of the 11th International Congress of Mathematics Education**, Monterrey, Mexico, Juillet 2008.

ARTIGUE, M., BOSCH, M., GASCON, J. (2011). Research praxeologies and networking theories**. Proceedings of the CERME 7 Conference,** Rzeszow, Pologne, Février 2011.

BALL, D.L., HILL, H.C., BASS, H. (2005). Knowing mathematics for teaching. Who knows mathematics well enough for teach third grade, and how can we decide? American Educator, Vol. 29, No. 3., 2005, p. 14-17, 20-22, 23-46.

BATANERO, C., BURRILL, G., READING, C. (Eds.) (2011). Joint ICMI/IASE Study: Teaching Statistics in School Mathematics. **Challenges for Teaching and Teacher Education**. New York : Springer.

BLOMHØJ, M. (2008). ICMI's challenges and future, In M. Menghini, F. Furinghetti, L. Giacardi, F. Arzarello (Eds.), **The first century of the International Commission on Mathematical Instruction (1908-2008). Reflecting and shaping the world of mathematics education,** pp. 169-180. Istitturo della enciclopedia Italiana. Roma.

BLUM, W., GALBRAITH, P., HENN, H.W., NISS, M. (Eds.) (2007). **Modelling and Applications in Mathematics Education. The 14th ICMI Study**. New York : Springer.

BOSCH, M., FONSECA, C., GASCÓN, J. (2004). Incompletitud de las organizaciones matemáticas locales en las instituciones escolares. **Recherches en Didactique des Mathématiques,** 24/2.3, 205-250.

BOSCH, M., GASCÒN, J. (2006) 25 years of the didactic transposition. **ICMI Bulletin 58**, 51–65.

BROUSSEAU, G. (1997). **Theory of didactical situations in mathematics: Didactique des mathématiques, 1970–1990**. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

CANTORAL, R., FARFÁN, R.M. (2003). Mathematics education : A vision of its evolution. **Educational Studies in Mathematics**, 53(3), 255-270.

CHEVALLARD, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, 12(1), 77-111.

CHEVALLARD, Y. (2002). Organiser l'étude. In J.L. Dorier y al. (Eds), **Actes de la 11e Ecole d'été de didactique des mathématiques,** pp. 3-22 & 41-56. Grenoble : La Pensée Sauvage.

CHEVALLARD, Y. (2011). La notion d'ingénierie didactique, un concept à refonder. Questionnement et éléments de réponse à partir de la TAD. In Margolinas, C., Abboud-Blanchard, M., Bueno-Ravel, L., Douek, N., Fluckiger, A., Gibel, P., et al. (Eds.). (2011**). En amont et en aval des ingénieries didactiques**. Grenoble: La pensée sauvage.

CLARKE, D. J., KEITEL, C., & SHIMIZU, Y. (Eds.) (2006). **Mathematics classrooms in twelve countries: The insider's perspective**. Rotterdam: Sense Publishers.

D'AMBROSIO, U. (2008). **Etnomatemática. Eslabón entre las tradiciones y la modernidad.** Mexico : Limusa.

DELOZANNE, E., PREVIT, D., GRUGEON-ALLYS, B., CHENEVOTOT-QUENTIN, F. (2010). Vers un modèle de diagnostic de compétences, **Revue Technique et Sciences Informatiques** , Vol 29/8-9, 899-938, Editions Lavoisier Hermès Sciences.

EDWARDS, L., RADFORD, L., ARZARELLO, F. (Eds.) (2009). Gestures and Multimodality in the Construction of Mathematical Meaning. Educational Studies in Mathematics, 70.2. English, L.D. (Ed.) **Handbook of International Research in Mathematics Education** (2nd edition). London: Routledge, Taylor & Francis.

EVEN, R., & BALL, D. L. (Eds.) (2008). **The professional education and development of teachers of mathematics: The 15th ICMI Study.** New York: Springer.

GRUGEON, B. (1995). **Etude des rapports institutionnels et des rapports personnels des élèves dans la transition entre deux cycles d'enseignement**. Thèse de Doctorat. Université Paris 7.

GRUGEON-ALLYS, B., PILET, J., DELOZANNE, E., CHENEVOTOT, F., VINCENT, C., PRÉVIT, D., EL KECHAI, N. (2011). PepiMep : différencier l'enseignement du calcul algébrique en s'appuyant sur des outils de diagnostic, **MathémaTICE** n°24, http://revue.sesamath.net/spip.php?article338

GUEUDET, G., TROUCHE, L. (Eds.) (2010) **Ressources vives. Le travail documentaire des professeurs, le cas des mathématiques.** Rennes : Presses Universitaires de Rennes.

GUIN, D., RUTHVEN, K., TROUCHE, L. (2005). **The Didactical Challenge of Symbolic Calculators. Turning a Computational Device into a Mathematical Instrument.** New York : Springer.

HOYLES, C., & LAGRANGE, J. B. (Eds.). (2010). **Digital technologies and mathematics education. Rethinking the terrain: The 17th ICMI Study.** New York: Springer.

ISODA, M., STEPHENS, M., OHARA, Y., MIYAKAWA, T. (2007). **Japanese Lesson Study in Mathematics. Its impact, diversity and potential for educational improvement**. Singapore : Word Scientific.

JAWORSKI, B. (2007). Theory in developmental research in mathematics teaching and learning: Social practice theory and community of inquiry as analytical tools. In D. Pitta-Panzani & G. Philippou (Eds**.), Proceedings of the Vth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education**, pp. 1688-1697. Larnaca, Cyprus: Department of Education, University of Cyprus.

KEITEL, C., & KILPATRICK, J. (1999). The rationality and irrationality of international comparative studies. In G. Kaiser, E. Luna, & I. Huntley (Eds.), **International comparisons in mathematics education** (pp. 241–256). London: Falmer.

LESTER, F. (Ed.), **Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning**. Information Age Publishing, Inc., Greenwich, Connecticut.

LEUNG, F. K. S., GRAF, K.-D., & LOPEZ-REAL, F. J. (Eds.). (2006). **Mathematics education in different cultural traditions: A comparative study of East Asia and the West** (New ICMI Study Series 13). New York: Springer.

MATHERON, Y. (2000). **Une étude didactique de la mémoire dans l'enseignement des mathématiques au collège et au lycée. Quelques exemples.** Thèse de doctorat. Université d'Aix-Marseille 1.

MATHERON, Y., NOIRFALISE, R. (2007**) Une recherche de la Commission inter-IREM (CII) Didactique soutenue par l'INRP : « Dynamiser l'étude des mathématiques dans l'enseignement secondaire (collège et lycée) par la mise en place d'AER et de PER** http://educmath.inrp.fr/Educmath/ressources/cdamperes/matheron_noirfalise.pdf

MENGHINI, M., FURINGHETTI, F., GIACARDI, L., ARZARELLO, F. (Eds.) (2008). **The first century of the International Commission on Mathematical Instruction (1908-2008). Reflecting and shaping the world of mathematics education.** Istittuto della enciclopedia Italiana. Roma.

NAJAR, R. (2010). **Effet des choix institutionnels d'enseignement sur les possibilités d'apprentissage des étudiants. Cas des notions ensemblistes fonctionnelles dans la transition Secondaire/Supérieur.** Thèse de Doctorat. Université Paris 7.

NEMIROVSKI, R., BORBA, M. (Eds.) (2004). PME Special Issue : Bodily Activity and Imagination in Mathematics Learning. **Educational Studies in Mathematics**, 57.3

PRASLON, F. (2000). **Continuités et ruptures dans la transition terminale S / DEUG Sciences en analyse: Le cas de la notion de dérivée et son environnement**. Thèse de Doctorat. Université Paris 7.

ROBERT, A., ROGALSKI, J. (2002). Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques : une double approche, **Revue Canadienne de l'Enseignement des Sciences, des Mathématiques et des Technologies,** 2.4, 505-528.

SAENZ-LUDLOW, A., & PRESMEG, N. (Eds.). (2006). Semiotic perspectives in mathematics education: A PME special issue. **Educational Studies in Mathematics**, 61(1–2).

SENSEVY, G., MERCIER A. (2007). **Agir ensemble. L'action conjointe du professeur et des élèves. Rennes :** Presses Universitaires de Rennes.

SHULMAN, L. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. **Educational Researcher**, 15(2), 4–14.

SKOVSMOSE, O., VALERO, P. (2008). Democratic access to powerful mathematics ideas. In L.D. English (Ed.), **Handbook of International Research in Mathematics Education (2nd edition)**, pp. 383-408. London: Routledge, Taylor & Francis.

SRIRAMAN, B., ENGLISH, L. (Eds.) (2010). **Theories of Mathematics Education**. Seeking New Frontiers. New-York : Springer.

STACEY, K., CHICK, H., & KENDAL, M. (Eds.). (2004). **The future of the teaching and learning of algebra: The 12th ICMI Study**. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

TALL, D. (Ed.) (1991). **Advanced mathematical thinking.** Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

TALL, D. (2004). Thinking through three worlds of mathematics. In M. Holmes & A. Fuglestead (Eds.), **Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,** Vol. 4, pp. 281-288. Bergen, Norway: Bergen University College.

UNESCO (2011). **Les défis de l'enseignement des mathématiques dans l'éducation de base.** Paris : UNESCO. http://unesdoc.unesco.org/images/0019/001917/191776F.pdf