REnCiMa
Revista de Ensino de Ciências e Matemática

10.26843/rencima.v11i6.1958 eISSN **2179-426X**
Recebido em 10/10/2018 / Aceito em 20/08/2020 / Publicado em 01/10/2020

Atividades Experimentais e teóricas: um caminho trilhado por estudantes do quinto ano no estudo dos quadriláteros

Experimental and Theoretical activities: a path taken students of the fifth year in quadrilateral studies

Rosele Alves Amâncio

Universidade Federal de Minas Gerais, e-mail roseleneamancio@yahoo.com.br

http://orcid.org/0000-0001-9118-528X

Eliane Sheide Gazire

Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, e-mail: egazire@terra.com.br

http://orcid.org/0000-0002-4798-2326

Resumo

Geralmente, nos anos iniciais do Ensino Fundamental, privilegiam-se atividades de percepção das formas geométricas e nos anos finais, o ensino de Geometria tende a ser mais teórico. No entanto, é importante que as atividades experimentais e a conceituação estejam presentes em qualquer nível de ensino. Assim, neste artigo apresenta-se e discute-se uma sequência de atividades relativa ao estudo dos quadriláteros que foi realizada por estudantes do quinto ano do Ensino Fundamental. Eles obtiveram as figuras que representavam cada tipo de quadrilátero por meio de dobraduras e recortes, fizeram trabalhos artísticos com essas figuras, exploraram suas propriedades a partir da obtenção dos eixos de simetria, socializaram suas descobertas, depois construíram quadriláteros no geoplano e representaram as construções realizadas no papel pontilhado. A pesquisa evidenciou que é possível e necessário que, desde os anos iniciais, a manipulação, a construção e os desenhos sejam trabalhados de forma articulada com o conhecimento teórico da geometria. Constatou-se, ainda, que as interações e negociações de significados têm papel fundamental no processo de aprendizagem.

Palavras-chave: Geometria. Quadrilátero. Conceito. Atividades experimentais.

Abstract

Generally, at the elementary school early years, activities focused at the perception of geometric forms and in the final years and teaching of geometry tends to be more theoretical. However, it is important that experimental activities and conceptualization be present at any level of education. Thus, in this article we present and discuss a sequence of activities related to the study of quadrilaterals that was carried out by fifth year students of elementary school. They have obtained the figures that represented each type of quadrilateral by means of folds and cutouts, made artistic works with these figures, explored their properties from the symmetry axes, socialized their discoveries, then built quadrilaterals in the geoplan and represented the constructions realized on dotted paper. The research has achieved that manipulation is possible and necessary since the earliest years, so the construction and the drawings be worked in an articulated way with the theoretical knowledge of the geometry. It was also verified that interactions and negotiations of meanings play a fundamental role in the learning process.

Keywords: Geometry. Quadrilateral. Concept. Experimental Activities.

Introdução

Este artigo tem como objetivo principal, a partir da análise da aplicação de uma sequência de atividades, mostrar que é possível e necessário romper com a polarização que geralmente acontece no ensino de Geometria, no qual se privilegia, nos anos iniciais do Ensino Fundamental, atividades experimentais e, nos anos finais, o conhecimento teórico da Geometria.

A pesquisa aqui relatada foi desenvolvida de forma colaborativa pelas autoras. Para sua realização, inicialmente fizemos estudos que visaram um aprofundamento teórico sobre o ensino e a aprendizagem de geometria. A partir da teoria sobre o desenvolvimento do conhecimento geométrico proposta por Pais (1996), da teoria de Fischbein (1993) acerca dos conceitos matemáticos e da proposta de Machado (2011) sobre o ensino da Geometria, foi possível elaborarmos e aplicarmos uma sequência de atividades sobre quadriláteros que buscou promover atividades experimentais aliadas a reflexões que favorecessem a construção dos conceitos geométricos. Porém, para que fosse possível essa elaboração, foi aplicada uma atividade diagnóstica a fim de verificar a aprendizagem dos alunos com relação à identificação dos quadriláteros.

Para tanto, a investigação foi realizada em duas turmas de 5º ano do Ensino Fundamental de um colégio de aplicação de uma universidade federal, sendo uma composta por 22 alunos e a outra por 24. Nas duas turmas os alunos gostavam de atividades desafiantes e, também, de exporem as suas ideias. Nas aulas de Matemática, costumavam trabalhar em duplas ou em pequenos grupos, e já haviam vivenciado algumas investigações antes de realizarem as atividades que compõem a sequência descrita neste artigo. Para o desenvolvimento das atividades, foram necessárias nove aulas de 80 minutos, cada uma sendo composta de dois horários geminados de 40 minutos.

Os dados foram obtidos a partir dos registros dos estudantes, das gravações em áudio e também do diário de campo produzido por uma das pesquisadoras, que é, também, professora das turmas. Nesse trabalho, os alunos foram identificados por suas iniciais.

Durante a realização das atividades, os estudantes tiveram a oportunidade de desenhar, construir, manipular figuras que representavam os diferentes quadriláteros e explorar suas propriedades. Nesses momentos, eles comparavam suas descobertas com as dos seus colegas para verificar se as propriedades eram válidas para uma classe de quadriláteros ou apenas para algum exemplo específico, além de serem incentivados a buscar explicações matemáticas para as propriedades percebidas por meio da manipulação. A análise dos dados nos permite afirmar que as atividades experimentais foram trabalhadas de forma articulada com reflexões que contribuíram para o desenvolvimento do pensamento geométrico dos estudantes.

Ensino e aprendizagem da geometria

Considerando que todos os estudantes precisam ter a oportunidade de desenvolver o pensamento geométrico, entende-se que esse processo é complexo e, por isso, é necessário que este se desenvolva ao longo da escolaridade, de modo que os conceitos geométricos venham a ser construidos, ampliados e refinados a partir de diversas experiências em contextos variados. Assim, concorda-se que “Nem todas as pessoas pensam sobre as ideias geométricas da mesma maneira. Certamente, nós não somos todos iguais, mas somos todos capazes de crescer e desenvolver nossa habilidade de pensar e raciocinar em contextos geométricos”. (VAN DE WALLE, 2009, p.439).

A teoria proposta por Pais (1996) mostra a importância do objeto concreto, do conceito, do desenho e das imagens mentais no processo de ensino e aprendizagem da Geometria, ao considerar que o trabalho experimental com objetos e desenhos tem forte influência no connhecimento geométrico.

Segundo o autor, a primeira forma de representação a se considerar é o objeto, que se refere a modelos ou materiais didáticos que representam algum conceito geométrico. Pais (2000) salienta que é importante que os alunos tenham oportunidade de manipular objetos para construir os conceitos geométricos. No entanto, a manipulação não deve limitar-se ao nível sensitivo. O material didático deve ser usado como um instrumento para a aquisição de conhecimentos geométricos e não com um fim em si mesmo. Assim, a manipulação deve estar associada a uma atividade intelectual para que o aluno possa estabelecer relação entre a prática e a teoria.

A segunda forma de representação é o desenho. A ilustração dos conceitos por esse meio é um dos recursos mais utilizados nas aulas de Geometria. Pais (1996) considera que os desenhos também possuem natureza particular e concreta, sendo que, na Geometria plana, os desenhos tendem a ser confundidos com os próprios conceitos, porém, estes possuem natureza abstrata. O autor ainda afirma que essa correlação entre o particular e o geral, o concreto e o abstrato, envolvendo a representação conceitual, é o principal desafio da atividade didática, visto que a necessidade de transpor o próprio desenho é primordial.

Entende-se que um conceito geométrico pode ser representado por uma infinidade de desenhos, mas, na prática, há uma predominância de algumas figuras particulares, encontradas com frequência em livros, cadernos ou desenhadas na lousa pelo professor. Segundo Pais (2000), há uma especie de tradição dessas formas particulares de representação. Em geral, os losangos aparecem desenhados com as diagonais paralelas às bordas das páginas ou da lousa; os retângulos são desenhados com seus lados paralelos às bordas e o lado maior na horizontal e os quadrados são frequentemente desenhados com os lados paralelos às bordas.

A terceira forma de representação dos conceitos geométricos são as imagens mentais. Pais (1996) relata que não é fácil definir imagem mental, mas considera que "uma pessoa tem uma dessas imagens quando ela é capaz de enunciar de forma descritiva, propriedades de um objeto ou de um desenho na ausência desses elementos." (PAIS, 1996, p.70). Para o autor, a formação das imagens mentais é consequência da experiência com objetos e com desenhos. Cada pessoa possui uma série de imagens mentais associadas a um determinado conceito. É importante que, ao longo da escolaridade, o conjunto das imagens mentais seja enriquecido nos aspectos quantitativo e qualitativo.

Assim, a construção da objetividade passa, necessariamente, pelo estágio subjetivo da concepção individual do estudante. Esse processo é influenciado pelas experiências que cada pessoa tem com as diferentes formas de representação do conceito geométrico: os objetos, os desenhos e as imagens mentais. Para Pais (1996, p.71):

> É evidente que, do ponto de vista científico, o conceito não pode ser algo susceptível a modificações subjetivas que permitam diferentes significados. Mas, enquanto conhecimento que é construido pelo homem, existe uma série de particularidades que acabam determinando níveis de conceitualização diferentes

Na teoria proposta por Fischbein (1993), os entes geométricos possuem dupla natureza, pois apresentam duas componentes: uma conceitual e outra figural. A conceitual está associada ao fato de que no raciocínio matemático não nos referimos a objetos materiais, mas sim, às construções mentais. O que caracteriza um conceito é o fato de que ele expressa uma ideia, uma representação ideal de uma classe de objetos, baseada em suas caracterísitcas comuns. Os objetos materiais – sólidos ou desenhos – são representações de um conceito, pois somente os conceitos possuem perfeição absoluta.

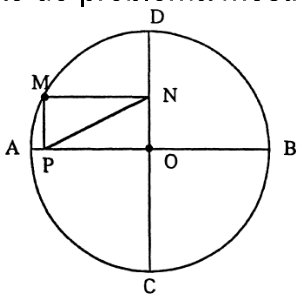
Um ente geométrico pode ser descrito por suas propriedades conceituais, mas não são simplesmente conceitos, também são imagens. Quando há o raciocínio em termos de compor, decompor e mover, refere-se, também, a imagens e não unicamente a conceitos.

Os entes geométricos, como pontos, lados, vértices, polígonos, e as operações com eles, são de natureza conceitual, entretanto, possuem uma natureza figural intrínseca. Ainda de acordo com Fischbein (1993), os objetos de investigação e manipulação da Geometria são entidades mentais chamadas de conceitos figurais, que refletem propriedades espaciais (forma, posição, tamanho), e, ao mesmo tempo, possuem qualidades conceituais (idealidade, abstração, generalidade, perfeição).

A componente conceitual, através da linguagem escrita ou falada, expressa propriedades de uma certa classe de objetos. Já a componente figural corresponde à imagem mental a que uma pessoa associa ao conceito, uma vez que a harmonia entre esses dois é que determina a noção correta sobre o ente geométrico. O conceito figural é, portanto, uma construção conduzida por um raciocínio matemático. Por exemplo, o círculo, em Geometria, não pode ser reduzido a um conceito. Ele é uma imagem controlada por uma definição.

Fischbein (1993, p.142) enfatiza que todas as figuras geométricas representam construções mentais que possuem, simultaneamente, propriedades conceituais e figurais. Para exemplificar, apresenta o seguinte problema: "Em um círculo com centro em O, desenham-se dois diâmetros perpendiculares AB e CD, escolhe-se um ponto M qualquer e desenham-se os segmentos perpendiculares aos diâmetros MN e MP conforme a figura. Qual a medida de PN?”

Figura 1: Ilustração do problema mostrado por Fischbein



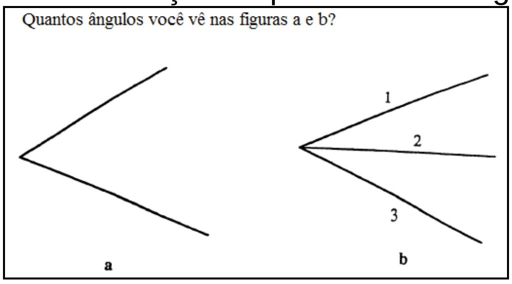
Fonte: Fischbein (1993, p. 142).

À primeira vista, parece que o problema não pode ser resolvido porque as medidas de MN e MP dependem da posição de M. Entretanto, ao notar que MNOP é um retângulo, e o segmento PN é a diagonal desse retângulo, conclui-se que PN = MO, e MO é o raio da circunferência.

Fischbein (1993) observa que as igualdades das medidas das diagonais e dos raios não são questionadas porque essas relações são impostas por definições ou teoremas. O aspecto essencial desse exemplo é mostrar que a resolução do problema sustenta a ideia de que a figura considerada não é somente uma imagem, mas uma estrutura logicamente controlada. Dessa maneira, a fusão entre conceito e imagem, nesse caso, tende a ser completa.

Muitas vezes, as representações por meio de desenhos ou objetos podem impor interpretações que são figurativamente consistentes, porém, não são coerentes com a definção dos conceitos. Por exemplo, embora o aluno conheça a definição de paralelogramo, pode ser difícil para ele visualizar várias formas correspondentes a essa definição, pois a imagem mental que uma pessoa tem de um objeto pode enfraquecer o seu aspecto conceitual. Nesse sentido, Fischbein (1993, p. 152) relata que “muitas vezes, sob o impacto da figura, a imagem pode desprender-se e escapar do controle da definição”. Para entender melhor essa situação, o autor descreve o seguinte problema que foi colocado para uma adolescente (FIGURA 2):

Figura 2: Ilustração do problema de ângulos



Fonte: Fischbein (1993, p. 152).

A adolescente responde da seguinte forma à questão:

> Sempre que vejo duas linhas que se cruzam, eu sei que o espaço entre as duas linhas é um ângulo. Eu acho que, em ambas as figuras, há apenas um ângulo, mesmo que num primeiro momento eu pensei que na segunda figura havia dois ângulos. Eu posso explicar a minha suposição. Primeiro, pensei que a linha 1 e a linha 2 formam um ângulo e a linha 2 e a linha 3 formam um segundo ângulo. No entanto, agora eu pensei que as linhas que se cruzam (1, 3) formam um ângulo, e a linha 2 é a bissetriz desse ângulo. (FISCHBEIN, 1993, p. 151).

Fischbein (1993) considera que a dificuldade é gerada pelo fato de que o conceito é incapaz de controlar a figura. E isto, não porque ela não possui o conceito correto, mas porque a figura carrega consigo características inspiradas pela prática. A adolescente ainda não possui completa simbiose entre o conceito figural e o conceito definição. A primeira interpretação dessa aluna pode ser associada ao fato de que, se você cortar um pedaço de bolo em duas metades, você obterá dois pedaços, e não três. De acordo com a segunda interpretação, a linha 2 é a bissetriz do ângulo. Para essa aluna, a bissetriz não poderia ser um lado do ângulo. Logo, o conceito de ângulo não controla totalmente a interpretação da figura, pois a figura ainda depende, em parte, de restrições não-formais.

O mesmo autor enfatiza que a integração das componentes conceituais e figurais em uma estrutura mental unitária, com predominância do aspecto conceitual, não é um processo natural, e, nesses termos, deve constituir uma preocupação contínua do professor. Portanto, devem ser criadas situações didáticas nas quais sistematicamente solicita-se a cooperação entre esses dois aspectos até atingir a fusão de um objeto mental.

De acordo com Machado (2011), é muita difundida a ideia de que o processo de conhecimento ocorre numa ascenção do concreto ao abstrato, da realidade aos modelos teóricos. Nessa concepção, o conhecimento teórico é considerado como destino numa via de mão única, por meio da qual são criadas abstrações generalizadoras que se tornam cada vez mais distantes do concreto.

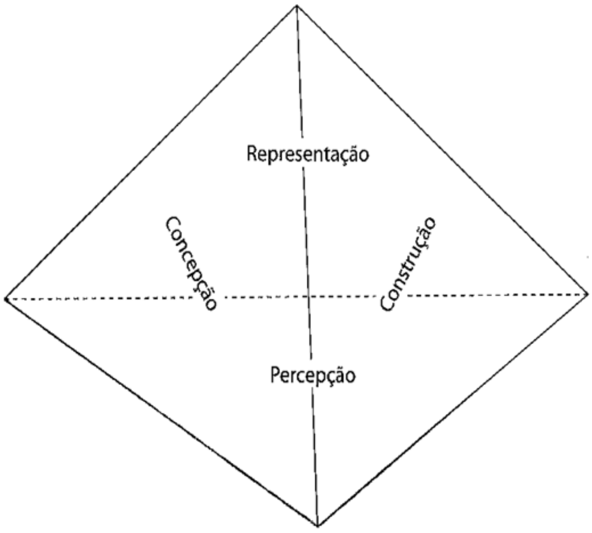
Machado (2011) ainda afirma que, no processo de construção do conhecimento, as abstrações são mediações indispensáveis e que não devem ser consideradas como ponto de partida ou de chegada. No entanto, é possível perceber que há uma forte tendência de o ensino de Geometria ser realizado de forma que haja uma polarização entre atividades empíricas e a sistematização dos conceitos geométricos. Geralmente, nos primeiros anos do Ensino Fundamental, predominam a observação e a manipulação de objetos concretos. Porém, nos anos finais do Ensino Fundamental, é dada uma ênfase às definições precisas, ao enunciado de propriedades e ao encadeamento de proposições.

Desde os anos iniciais do Ensino Fundamental, o estudo de Geometria não deve limitar-se a atividades concretas. Assim, "qualquer que seja o nível considerado, é fundamental o estabelecimento de articulações consistentes entre as atividades perceptivas e os momentos de concepção, das inter-relações entre o conhecimento empírico e a sua sistematização". (MACHADO, 2011, p. 148). Ainda para o autor, não é necessário estruturar o ensino de Geometria iniciando-se nas atividades perceptivas e culminando nas sistematizações conceituais, e sim articular a percepção e a concepção, de forma a possibilitar, entre ambas, um trânsito natural, com dupla mão de direção. Para isso, é preciso considerar as quatro faces do conhecimento geométrico: percepção, construção, representação e concepção.

A percepção está relacionada às atividades de observação e manipulação de objetos ou desenhos que representam os entes geométricos. A construção se refere à elaboração de objetos no sentido físico; a representação, por sua vez, diz respeito à elaboração de desenhos para representar objetos percebidos ou construídos.

As faces do conhecimento geométrico devem ser periódicas e articuladas entre si. Para ilustrar essa ideia, Machado (2011) usa a metáfora do tetraedro, cujas faces estão interligadas e qualquer uma delas pode servir de apoio, conforme mostra a figura 3.

Figura 3: Tetraedro representando a concepção articulada do conhecimento geométrico



Fonte: Machado (2011, p. 151).

Mesmo considerando que seja recomendável que nos anos iniciais o estudo de Geometria se apoie principalmente na percepção das formas geométricas, por meio da observação e manipulação de objetos, essas atividades devem estar relacionadas diretamente com a construção, a representação e a concepção.

Assim, de acordo com a teoria exposta, é importante que o professor promova, desde os anos iniciais do Ensino Fundamental, atividades em que a percepção das formas geométricas e de suas propriedades se dê por meio de atividades sensoriais que estejam relacionadas diretamente com a construção, a representação e a concepção dos entes geométricos. Nessa perspectiva, os objetos e desenhos são usados como elementos que favorecem a elaboração conceitual.

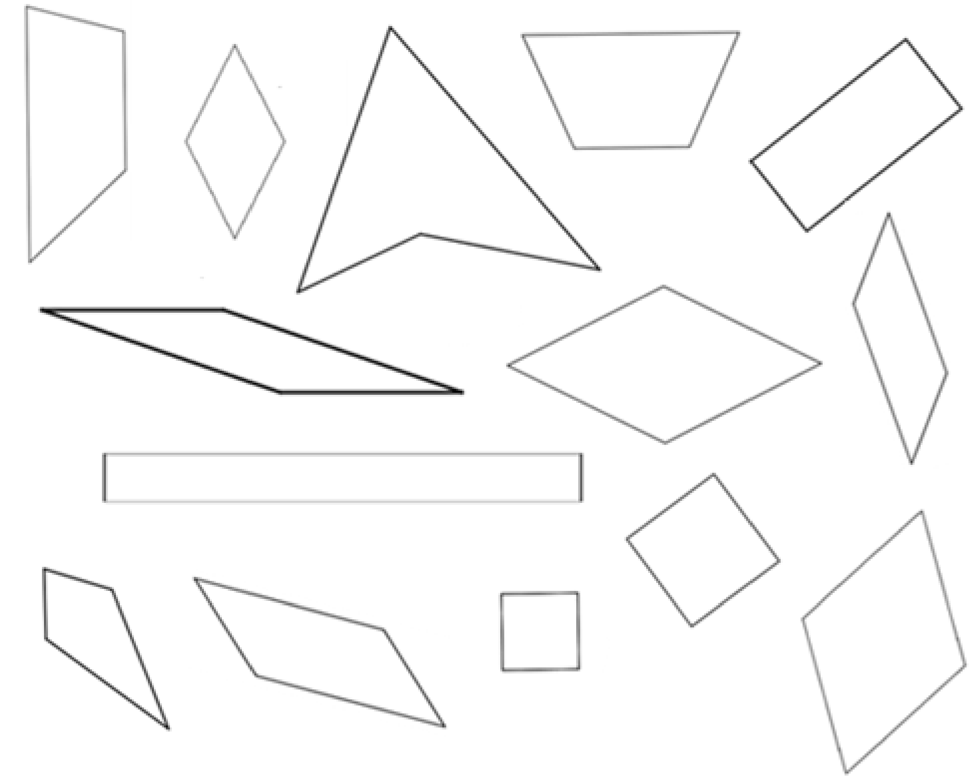
Atividade diagnóstica

Com o objetivo de verificar o conhecimento dos estudantes em relação à identificação dos quadriláteros notáveis, foi aplicada a atividade mostrada a seguir.

Figura 4: Atividade diagnóstica

Observe as figuras abaixo e identifique-as de acordo com a legenda:

Q – QUADRADO R – RETÂNGULO T – TRAPÉZIO L – LOSANGO
P – PARALELOGRAMO S – QUADRILÁTERO SEM NOME ESPECIAL



Fonte: Atividade elaborada pelas autoras.

A tabela 1 exibe os dados referentes às respostas dos 46 estudantes que realizaram a atividade diagnóstica:

Tabela 1: Respostas da atividade diagnóstica

Quadrilátero	Número de crianças que identificaram todas as figuras corretamente	Número de crianças que identificaram algumas figuras corretamente	Número de crianças que não identificaram nenhuma das figuras corretamente
Quadrados	36	10	0
Retângulos	46	0	0
Losangos	22	14	10
Paralelogramos	10	11	25
Trapézios	12	15	19

Fonte: Dados da pesquisa.

Ao analisar as respostas dos estudantes, percebe-se que todos identificaram os retângulos corretamente. A maioria deles identificou todos os quadrados corretamente, mas não sabia reconhecer paralelogramos e trapézios, e vários estudantes ainda não haviam aprendido a reconhecer losangos.

É importante destacar que os estudantes que identificaram apenas algumas das figuras corretamente geralmente acertaram as figuras que se encontravam nas posições mais usuais. Assim, pode-se constatar o que nos alerta Pais (1996) sobre a força do desenho protótico e sobre a necessidade de o professor promover experiências para que os estudantes possam ampliar as imagens mentais dos entes geométricos.

Sequência de atividades

A partir do encontrado na atividade diagnóstica e as recomendações de Pais(1996), Fischbein e Machado (2011) para o ensino de geometria, foi planejada e aplicada uma sequência de atividades com o objetivo de favorecer o reconhecimento dos diversos tipos de quadriláteros e de promover a descoberta de suas propriedades.

As atividades propostas foram desenvolvidas na seguinte ordem: estudo dos quadrados e retângulos, estudo dos losangos, estudo dos paralelogramos e estudo dos trapézios. Cada um deles foi desenvolvido de modo que os estudantes realizassem as seguintes atividades: obtenção, por meio de dobraduras e recortes direcionados pela professora, de figuras que representavam o quadrilátero a ser estudado; elaboração de trabalhos artísticos utilizando as figuras obtidas na atividade anterior; exploração dos recortes para favorecer a descoberta das propriedades dos quadriláteros e posterior socialização das descobertas pelos estudantes. Então, a partir das experiências realizadas e das discussões feitas, os estudantes elaboravam a construção das figuras estudadas naquele ínterim no geoplano de madeira e, ainda, faziam a representação das construções feitas por meio de desenhos no papel pontilhado. Apenas as figuras que tinham a forma de paralelogramos não foram obtidas por dobraduras, mas fornecidas cópias pela professora. Esses momentos são descritos a seguir com algumas exemplificações para melhor entendimento.

Obtenção dos quadriláteros por meio de dobraduras e recortes

Nesse momento, a professora orientava os estudantes sobre como deveriam proceder para obterem as figuras dos quadriláteros[1]. Por exemplo, na aula referente ao estudo dos retângulos e quadrados, os estudantes receberam meia folha de papel A4 e fizeram dobras de forma a obter linhas paralelas e depois cortaram nessas linhas. Feito isso, realizaram novas dobraduras e fizeram novos recortes para obterem figuras com a forma de retângulos e quadrados. Depois de obterem as figuras, os estudantes faziam trabalhos artísticos colando as figuras e acrescentando desenhos. A figura 5 exibe um dos trabalhos realizados com recortes.

[1] Nesse nível de escolaridade é natural que os estudantes ainda não tenham a compreensão de que os quadrados são retângulos de lados congruentes. Para eles, retângulos e quadrados são figuras distintas.

Figura 5: Produção de um estudante com recortes que representavam trapézios

Fonte: Dados da pesquisa.

Ao elaborar os trabalhos artísticos, os estudantes observavam o aspecto global das figuras e também as visualizavam em diferentes posições. Desse modo, essas experiências tinham, como objetivo, contribuir para que, por meio da percepção, pudessem ampliar as imagens mentais dos quadriláteros, passo importante na construção dos conceitos geométricos.

Exploração das figuras

Por considerar-se que “as crianças desenvolvem um pensamento geométrico realizando ações e refletindo sobre essas ações” (ABRANTES; SERRAZINA; OLIVEIRA, 1999, p.70), os estudantes foram incentivados a explorarem as figuras que representavam os quadriláteros para identificar suas propriedades.

Em seguida à realização dos trabalhos artísticos, os estudantes obtinham novamente as figuras dos quadriláteros por meio das dobraduras e recortes. Depois que as figuras estavam prontas, a professora os orientava a obter os eixos de simetria por meio de dobraduras. A partir de então, eles faziam explorações livremente para realizarem novas descobertas, fazendo os registros.

Segundo Rancam e Giraffa (2012), as atividades com dobraduras possibilitam a descoberta de propriedades e a conceituação. Assim, a professora percorria as duplas e incentivava os estudantes a destacarem, nas figuras, o que elas descobriam. Então, eles indicavam com lápis de cor os eixos de simetria, desenhavam os ângulos retos e coloriam da mesma cor os ângulos iguais.

Em um dos momentos em que os estudantes estavam explorando as figuras na forma de losango, o estudante C perguntou à professora se podia usar o transferidor para medir os ângulos. A professora concordou e os estudantes dessa dupla começaram a medir os ângulos das figuras. Depois de algum tempo, a professora voltou a essa dupla e o estudante C disse:

Estudante C: - *A gente somou os ângulos de cada um dos quatro losangos e nós vimos que a soma vai dar 360.*

É importante observar que o estudante C falou que ele e seu colega (de dupla) verificaram a soma nos quatro losangos.

Percebe-se, portanto, que ele compreendeu que não é suficiente verificar uma propriedade em apenas uma figura, pois as descobertas têm que ser válidas para os losangos em geral, dando evidências de que está raciocinando em termos de classe de figuras, passo fundamental na construção dos conceitos (FISCHBEIN, 1993).

Também é importante relatar que a professora procurou deixar os estudantes livres para se comunicarem da maneira que eles se sentissem mais confortáveis, sem exigir que falassem ou escrevessem usando termos matemáticos ou que as descobertas listadas estivessem corretas. Ela considerou mais adequado refinar os termos e fazer as intervenções acerca das propriedades no momento de socialização. Como exemplo, pode-se citar que uma dupla, no momento em que estava registrando as descobertas dos retângulos, se referiu aos lados opostos como “os lados que estão um na frente do outro”.

Vale a pena destacar que houve situações em que pode-se perceber que alguns estudantes começaram a fazer relações entre as propriedades, como ocorreu quando eles haviam terminado de obter figuras que apresentavam a forma de trapézios escalenos, trapézios retângulos e trapézios isósceles, conforme descrito a seguir.

Estudante L: - *Professora, não precisa nem tentar encontrar eixo de simetria no trapézio escaleno porque ele não tem nenhum lado igual.*

Assim, por meio da manipulação, os estudantes puderam fazer várias hipóteses sobre as propriedades dos quadriláteros. Eles geralmente dobravam as figuras sobre seus eixos de simetria e, por sobreposição, identificavam lados e ângulos congruentes. Ao traçar os eixos de simetria, puderam perceber as formas que compunham as figuras.

É importante frisar que eles mostraram um gosto por explorar as figuras e fazer descobertas. Desse modo, pode-se verificar os benefícios de se trabalhar a Geometria de maneira investigativa, de forma que os estudantes pudessem manipular figuras e descobrir propriedades, conforme afirma Abrantes (1999, p.14):

> Fazendo apelo à intuição e à visualização e recorrendo, com naturalidade, à manipulação de materiais, a geometria torna-se, talvez mais do que qualquer outro domínio da Matemática, especialmente propícia a um ensino fortemente baseado na realização de descobertas e na resolução de problemas, desde os níveis escolares mais elementares.

Socialização das descobertas

Após os estudantes registrarem suas descobertas, a professora promovia uma discussão com toda a turma a partir das respostas das várias duplas. Nesses momentos, ela procurava incentivar a participação dos estudantes e também solicitava que todos dessem atenção às falas dos colegas. Assim, eles podiam comunicar suas observações, fazer perguntas e, também, dar contribuições para que a professora registrasse na lousa de forma mais clara o que havia sido descoberto.

Várias reflexões aconteceram no momento de socialização das descobertas. Os diálogos descritos a seguir ocorreram quando os estudantes estavam discutindo sobre as propriedades dos quadrados:

Estudante AJ: - *Nós descobrimos que os eixos de simetria formam ângulos de 45 graus.*

Professora: - *Vocês mediram os ângulos?*

Estudante AJ: - *Sim, nós usamos o transferidor.*

Estudante N: - *Professora, dá para descobrir sem fazer medida.*

Professora: - *Como você pensou?*

Estudante N: - *Se todos os ângulos juntos formam uma volta, então eles medem 360 graus e para ter cada ângulo é só dividir 360 por 8. Faz a conta que você vai ver que dá 45.*

Estudante AC*: - Eu não entendi nada.*

Então, o estudante N saiu do seu lugar e mostrou para a turma um quadrado com eixos de simetria destacados e disse:

Estudante N: - *Quantos ângulos têm aqui?*

- Vários estudantes responderam: - *Oito.*

- Estudante N continuou: - *Os ângulos juntos formam 360 graus. Então, para saber a medida de um ângulo é só dividir por oito.*

O estudante N fez o cálculo no quadro e confirmou que o resultado é 45, então todos concordaram e a professora escreveu mais essa descoberta na lousa.

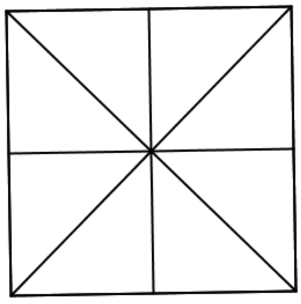
Diante disso, o estudante S disse: - *Eu estou percebendo agora que as diagonais do quadrado também formam oito triângulos.*

Estudante P: - *Esses triângulos são isósceles ou equiláteros?*

Professora: - *Vamos observar as figuras para verificar.*

Diante disso, a Professora fez um desenho na lousa semelhante à figura 6 e repetiu a pergunta: - *Os triângulos são escalenos ou isósceles?*

Figura 6: Desenho para representar um quadrado com seus eixos de simetria.



Fonte: Elaborado pelas autoras.

Alguns estudantes responderam que são escalenos; outros, que são isósceles.

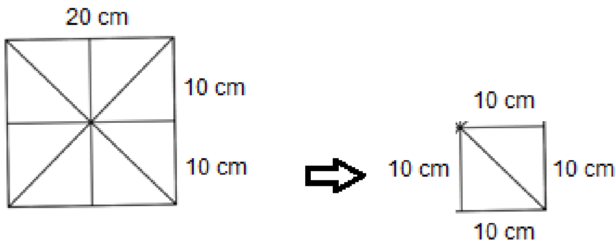
Estudante F: - *Eu acho que é escaleno porque tem um lado menor.*

Estudante M: - *Se for isósceles também pode ter um lado menor.*

Então, a professora disse: - *Vamos imaginar que o lado do quadrado mede 20 cm.*

A professora seguiu a explicação mostrando as medidas na figura e acrescentou um novo desenho ao lado para mostrar, em detalhes, as medidas de um dos quadrados menores, conforme mostra a figura 7.

Figura 7: Desenhos semelhantes aos realizados pela professora na lousa.



Fonte: Elaborado pelas autoras.

Depois, a professora fez um desenho semelhante com o lado do quadrado maior medindo 32 cm para verificar se isso aconteceria em todas as situações. Assim, a partir da explicação da professora, os estudantes demonstraram entender que os triângulos tinham dois lados iguais e por isso eram isósceles. Nesse ínterim, o Estudante F fez uma generalização acerca do que foi discutido: - *Sempre o quadrado menor vai ter a metade da medida do quadrado maior por causa do eixo de simetria.*

Outros momentos foram importantes para que a professora fizesse intervenções a fim de que os estudantes compreendessem que as descobertas deveriam ser válidas para a classe de figuras que eles estavam explorando e não somente para uma figura em particular. Sobre esse aspecto, Pais (1996) argumenta que é importante que os estudantes utilizem os desenhos ou objetos aliados a reflexões para que as atividades manipulativas favoreçam a construção dos conceitos geométricos, como mostra o diálogo a seguir:

Estudante N: - *Nós descobrimos que os losangos têm dois ângulos do mesmo tamanho.*

Estudante AR: - *Um mede 132 e outro 48.*

Professora: - *Todos os losangos irão ter ângulos com essas medidas?*

Vários estudantes: - *Não.*

Professora: - *Por quê?*

Estudante C: - *Nós vimos que a soma dos ângulos vai dar 360 graus ou um pouco mais, mas cada losango tem ângulos diferentes.*

Estudante AR: - *Eu medi só um losango e pensei que todos eram iguais, igual ao retângulo que tem todos os ângulos iguais.*

Estudante J: - *No losango é diferente, os ângulos mudam.*

Estudante AR*: - Então eu vou medir os outros losangos porque as descobertas têm que valer para todos os losangos do mundo.*

Pode-se verificar, nesta situação, que os estudantes levantaram hipóteses a partir das experimentações realizadas com algumas poucas figuras de que dispunha cada dupla. No entanto, no momento de socialização das descobertas, as várias experiências realizadas pelos estudantes da turma cooperaram para que as hipóteses fossem refutadas ou validadas.

Constatou-se, também, que, ao mencionar “todos os losangos do mundo”, o estudante evidencia que ele percebeu a necessidade de raciocinar em termos de classes de figuras, que é um passo fundamental na construção dos conceitos matemáticos. Desse modo, eles estavam partindo do particular para o geral, conforme as recomendações de Pais (1996).

Então, a professora prosseguiu, a partir da seguinte questão:

Professora: - *Quais outras duplas mediram os ângulos do losango?*

Vários estudantes foram mencionando as medidas e a professora foi registrando na lousa. Diante disso, o estudante I diz:

Estudante I: - *A gente já tinha visto que os ângulos de cima e de baixo têm a mesma medida, sem usar transferidor. Porque, quando dobramos a figura, eles ficam do mesmo tamanho.*

Estudante G: - *O que está na direita também é igual ao que está na esquerda*.

Diante das colocações dos estudantes, a professora pegou uma figura com a forma de losango e a girou de forma que os eixos de simetria não ficassem na vertical ou na horizontal e perguntou:

Professora: - *E agora, quais ângulos têm a mesma medida?*

Estudante Y: - *Eu sei quais, mas não sei explicar porque agora eles não estão em cima e em baixo.*

Vários estudantes mostraram suas figuras indicando que os ângulos opostos eram congruentes, mas não conseguiam expressar isso verbalmente. Então, a professora chamou quatro crianças à frente da sala e pediu para que elas formassem um losango. Elas uniram os braços e se posicionaram como se estivessem localizadas nos vértices do quadrilátero. Então a professora perguntou: - *Quais ângulos têm medidas iguais?*

As crianças citaram os nomes dos colegas que formavam o losango para identificar os pares de ângulos congruentes. Nessa situação, o estudante I fez a seguinte colocação:

Estudante I: - *Os ângulos iguais parecem a gente jogando queimada, um time é oponente do outro.*

Professora: - *Em Matemática usamos uma palavra muito parecida com essa que você falou. Em vez de oponente, chamamos de oposto.*

Estudante I: - *Oposto! Então escreve no quadro, que os ângulos opostos são iguais.*

Nesse momento, pode-se verificar a satisfação do estudante I, ao perceber que a sua ideia foi usada para conseguir expressar o que quase todas as crianças da turma haviam entendido, mas não encontravam uma palavra que mostrasse o que elas verificaram. Além disso, constatou-se que a utilização de termos matemáticos foi inserida gradualmente, de acordo com a necessidade de comunicar ideias durante as aulas. A esse respeito Abrantes, Serrazina e Oliveira (1999, p.73) fazem uma consideração importante: “A apropriação da linguagem e dos conceitos geométricos faz-se de um modo gradual, levando a que sejam retomados frequentes vezes em contextos diferentes, ao longo dos diferentes anos de escolaridade”. (ABRANTES; SERRAZINA; OLIVEIRA, 1999, p. 73). Cada descoberta validada era anotada, na lousa, pela professora. Ao final, os estudantes colavam as figuras em uma folha A4 e registravam as descobertas da turma (QUADRO 1).

Quadro 1: Registro das descobertas de uma turma sobre losangos

Descoberta de uma turma de quinto ano sobre losangos
• Possuem 2 eixos de simetria. • Os ângulos opostos têm medidas iguais. • Os eixos de simetria são perpendiculares. • São formados 4 triângulos de mesma área. • Os 4 lados têm medidas iguais. • Os eixos de simetria dividem os ângulos ao meio. • Os losangos possuem 2 pares de lados paralelos (um na frente do outro) • A soma dos ângulos do losango é 360 graus.

Fonte: Dados da pesquisa.

Construção das figuras no geoplano de madeira e desenho no papel pontilhado

Um dos recursos didáticos que permite um trabalho manipulativo é o geoplano. O estudante pode, facilmente, construir formas e desfazê-las, favorecendo a exploração de figuras geométricas. Para construir as figuras, utilizam-se gominhas (elásticos do tipo para amarrar dinheiro).

Assim que as crianças construíam um quadrilátero no geoplano, elas o desenhavam em um papel pontilhado para que a construção estivesse articulada com representação do quadrilátero. Nesses momentos, percebe-se que o desenho foi importante para que as crianças desenvolvessem a visualização das figuras, pois várias vezes elas tinham que observar a forma construída e contar os pregos para conseguir fazer a representação no papel.

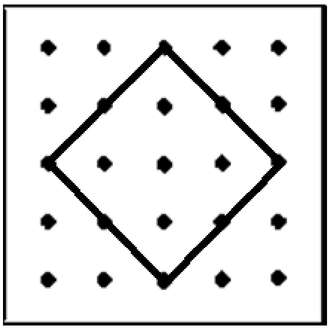
Além disso, a construção dos quadriláteros no geoplano foi primordial para que os estudantes tivessem a oportunidade de visualizar os quadriláteros em posições não usuais, favorecendo a ampliação das imagens mentais, de acordo com as ideias de Pais (1996). A utilização do geoplano também foi propícia para que algumas crianças começassem a raciocinar, levando em conta a possibilidade de uma figura pertencer a mais de um grupo de figuras. Noutras palavras, as crianças começaram a refletir sobre a inclusão de classes dos quadriláteros, conforme mostrado no diálogo a seguir:

Estudante D: - *Eu construí um losango e quando viro, parece que ele é um quadrado. Agora não sei, eu fiz um quadrado ou um losango?*

A professora, então, colocou o outro estudante da dupla na discussão, com a seguinte pergunta: - *O que você acha, estudante A?*

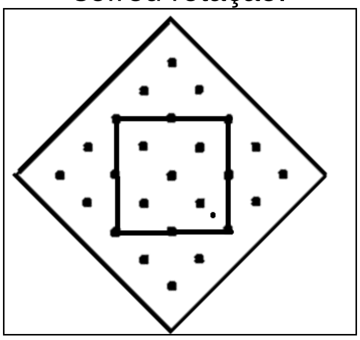
O estudante A pegou o geoplano (FIGURA 8), rotacionou-o (FIGURA 9) e disse: - *Eu estou achando que é um losango (pausa) e também é um quadrado. Parece que o quadrado virado é um losango.*

Figura 8: Losango na posição inicial.



Fonte: Desenho das autoras.

Figura 9: Losango na posição depois que sofreu rotação.



Fonte: Desenho das autoras.

O estudante S, da dupla ao lado, disse: - *Eu também fiquei confuso, fiz um losango e quando virei parecia um quadrado.*

Diante dessa dúvida, a professora se posicionou à frente da turma, mostrou o geoplano e perguntou: - *Turma, vocês acham que essa figura que o estudante D construiu é um losango?*

Vários alunos: - *Sim.*

Então, a professora, girou o geoplano e perguntou novamente: - *A figura construída é um quadrado?*

Estudante F: - *Parece, mas o quadrado tem todos os ângulos retos.*

Então, a professora pegou uma folha de papel e a usou para mostrar que os ângulos eram retos.

O estudante A disse: *Eu acho que o quadrado é um tipo de losango.*

Vários estudantes disseram que a figura tem que ser losango ou quadrado. Mas, alguns pareciam aceitar com naturalidade que o quadrado também fosse um losango, conforme mostra o comentário do estudante G:

Estudante G: - *Eu fiz um losango direitinho e deu quadrado, então o quadrado também é losango.*

Após, a professora perguntou: - *Quem acha que o quadrado pode ser considerado um losango?*

Os alunos que concordaram levantaram a mão e, visualmente, a professora percebeu que quase metade das crianças aceitou o fato de que o quadrado pode ser considerado um losango.

Professora: - *Então, quem considera que o quadrado é um losango pode considerar que essa construção está correta.*

É importante também relatar outra situação que evidenciou que alguns estudantes precisaram raciocinar sobre as propriedades dos quadriláteros para fazerem algumas construções e que favoreceu para que pudessem refletir sobre a inclusão de classes dos quadriláteros.

Já no momento da construção no geoplano dos paralelogramos, alguns estudantes mostraram dificuldades em identificar por que suas construções não estavam com a forma adequada. Diante disso, a professora lembrou-lhes que uma das características principais dos paralelogramos é que eles têm dois pares de lados paralelos e escreveu essa informação na lousa. Assim, ao observar essa propriedade, os estudantes alteravam suas construções e obtinham a figura desejada.

A partir da observação que a professora fez sobre os paralelogramos, o estudante F disse: - *Professora, então os retângulos também são paralelogramos*?

Professora: - *Explique o que você pensou.*

Estudante F: - *Nós vimos que os retângulos têm lados paralelos e os paralelogramos também têm. Então, acho que o retângulo também é um paralelogramo.*
Professora: - *Você está pensando muito bem! Vamos trazer essa discussão para turma?*

Professora: - *Atenção! Parem só um pouquinho de fazer as construções porque o estudante F trouxe uma ideia que eu acho importante ver a opinião de vocês!*

Estudante F: - *Nós descobrimos que os paralelogramos têm os lados opostos paralelos. Mas os retângulos também têm. Então, eu fiquei pensando que os retângulos também são paralelogramos.*

Estudante S: - *Mas os retângulos têm todos os ângulos iguais e os paralelogramos não. Eles são figuras diferentes*.

Estudante N: - *Eu acho que os retângulos podem ser paralelogramos, igual os quadrados que podem ser um tipo de losango.*

Estudante C: - *As figuras podem ter mais de um nome, professora?*

Professora: - *Sim, mas por enquanto, nós estamos discutindo essas ideias apenas para vocês começarem a pensar. Porque vocês ainda irão estudar os quadriláteros em outros anos e, a cada ano, irão aprender mais. Eu já estou admirada com as descobertas que vocês fizeram!*

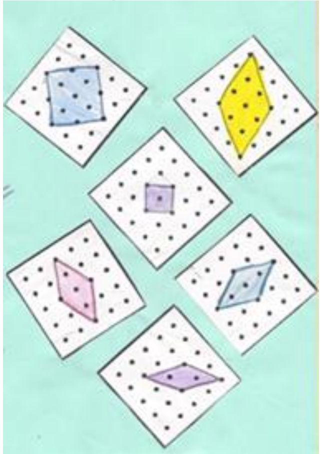
Estudante F: - *Até os quadrados podem ser paralelogramos, porque eles também têm dois pares paralelos.*

Estudante S: - *Um quadrado pode ser losango, agora um quadrado também pode ser paralelogramo, parece que nós estamos misturando as figuras.*

Esse episódio mostra que a professora procurou estimular o raciocínio dos estudantes, mas não esperou que todos raciocinassem em termos da inclusão de classes

lento e complexo, conforme afirma Pais (1996). Ao final, os estudantes colavam os desenhos feitos na folha pontilhada em um papel colorido conforme mostra a figura 10.

Figura 10: Imagem dos losangos construídos no geoplano e desenhados em folha pontilhada por um estudante.



Fonte: Dados da pesquisa.

Para finalizar esse estudo dos quadriláteros, todo o material produzido por cada estudante, foi encadernado e entregue a eles.

Considerações finais

Na pesquisa aqui apresentada, busca-se evidenciar a importância das atividades experimentais estarem aliadas a reflexões que favoreçam o conhecimento teórico da Geometria, desde os anos iniciais do Ensino fundamental.

Ficou evidente, no material aqui apresentado, que as atividades desenvolvidas contribuíram para que os estudantes aprendessem a identificar os diferentes tipos de quadriláteros, bem como compreendessem várias de suas propriedades e também pudessem refletir sobre alguns conceitos que permearam as explorações, como: lados, ângulos, classificação dos triângulos, paralelismo e perpendicularismo.

Outro ponto a considerar é que manipular figuras é muito diferente de vê-las desenhadas. A possibilidade de movimento, aliada ao tato e à visão contribuem para a formação de imagens mentais diversificadas dos entes geométricos. Além disso, a manipulação das figuras também possibilitou aos alunos fazerem dobraduras para identificarem os eixos de simetria, lados e ângulos congruentes.

As hipóteses levantadas por cada dupla, a partir da exploração de alguns recortes que representavam os quadriláteros, depois puderam ser discutidas com toda a turma no momento de socialização e foram aceitas ou refutadas. Assim, mesmo que inicialmente os alunos explorassem poucas figuras individualmente, ao fazerem a socialização das descobertas, o material se tornava amplo, favorecendo a compreensão de que as propriedades observadas precisavam ser válidas para toda uma classe de figuras, raciocínio que é fundamental para a construção dos conceitos matemáticos.

Outro aspecto a se considerar é a necessidade de os estudantes construírem modelos materiais e também de representarem as construções realizadas por meio de desenhos. O processo de construção de diferentes quadriláteros no geoplano evidenciou que, para que os alunos possam fazer as construções, eles precisaram pensar nas propriedades de cada tipo de quadriláteros. Logo, essas atividades também contribuíram para o processo de conceituação. Portanto, ao construírem as figuras no geoplano, alguns alunos começaram a pensar em termos da inclusão de classes dos quadriláteros.

Além disso, a pesquisa mostrou a importância dos momentos de socialização dos trabalhos realizados, de forma que os estudantes pudessem fazer perguntas, expor suas ideias e ter oportunidades para complementar as ideias de seus colegas. Nesses momentos, as intervenções da professora foram importantes para refinar e sistematizar conceitos.

Vale, ainda, considerar que em um ambiente em que a comunicação Matemática, escrita e oral é incentivada, os alunos sentem necessidade de se expressar usando termos corretos. Assim, a linguagem matemática foi introduzida e/ou ampliada a partir da necessidade de comunicar ideias durante as aulas e por meio da negociação de significados.

Por fim, considera-se que as análises realizadas dão fortes evidências de que as aulas foram desenvolvidas de forma que houve articulação entre atividades perceptivas e momentos de concepção que envolveram tanto a componente figural como a conceitual dos entes geométricos.

Referências

ABRANTES, P. Investigações em Geometria na Sala de Aula. In: VELOSO, E.; FONSECA, H.; PONTE, J. P.; ABRANTES, P. (Org.). **Ensino da Geometria no Virar do Milénio**. Lisboa: DEFCUL, 1999. Disponível em: http://www.prof2000.pt/users/j.pinto/textos/texto1.pdf. Acesso em: 5 abr. 2016.

ABRANTES, P.; SERRAZINA, L.; OLIVEIRA, I. **A Matemática na educação básica**.

Lisboa: Editora Colibri. 1999.

FISCHBEIN, E. The Theory of Figural Concepts. In: **Educational Studies in Mathematics**. v.24, n.2, p.139-162. Dordretch: Publishedby: Springer, 1993.

MACHADO, N. J. **Matemática e Língua Materna:** Análise de uma impregnação mútua. São Paulo: Cortez Editora, 6ª ed., 2011.

PAIS, L C. Intuição, Experiência e Teoria Geométrica. **Revista Zetetiké**. v. 4, n. 6, p. 65-74, jul./dez. 1996.

PAIS, L. C. Uma análise do significado da utilização de recursos didáticos no ensino da Geometria. Reunião da ANPED, 23. **Anais**… Rio de Janeiro: UFRRJ, 2000. Disponível em: http://www.ufrrj.br/emanped/paginas/conteudo_producoes/docs_23/analise_significado.pdf Acesso em: 4 ago. 2015.

RANCAN, G; GIRAFFA, L. M. M. Utilizando manipulação, visualização e tecnologia como suporte ao ensino de geometria. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, v. 3, n. 1, p. 15-27, jan/jul 2012.

VAN DE WALLE, J. A. O pensamento e os conceitos geométricos. In: VAN DE WALLE, J A. **Matemática no Ensino Fundamental:** formação de professores e aplicação em sala de aula. São Paulo: Papirus, 2009. p. 438-484.