

## O USO DE MANIPULÁVEIS NA PARTICIPAÇÃO DOS ALUNOS EM UMA AULA DE MATEMÁTICA

**Jamille Vilas Boas**

Mestre em Ensino, Filosofia e História das Ciências  
Instituto Federal da Bahia  
jamille@ifba.edu.br

**Jonei Cerqueira Barbosa**

Doutor em Educação Matemática  
Universidade Federal da Bahia  
jonei.cerqueira@ufba.br

### Resumo

Neste artigo, analisamos como alunos participam de uma aula de matemática usando materiais manipuláveis. Uma aula do nono ano do ensino fundamental de uma escola da rede pública de Salvador, na qual alunos utilizaram materiais manipuláveis, foi observada e analisada. Utilizamos algumas noções teóricas sobre a aprendizagem situada, tal como formulada por Jean Lave e Etienne Wenger, para analisar os dados coletados. Concluímos que os alunos podem participar de uma aula desta natureza, reconhecendo manipuláveis como objetos matemáticos, definindo elementos de objetos matemáticos nos manipuláveis, além de justificar algoritmos matemáticos por meio de manipuláveis.

**Palavras-chave:** Participação. Materiais manipuláveis. Ensino de matemática.

## USE OF MANIPULATIVES IN STUDENTS' PARTICIPATION ON MATHEMATICS CLASSES

### Abstract

In this paper, we analyze how students participate in a mathematics class by using manipulatives. A ninth grade class that used manipulatives in its mathematics classes at a public school in the city of Salvador was observed and analyzed. Following Jean Lave and Etienne Wenger, we use some theoretical notions about situated learning to analyze the collected data. We conclude that students may participate in a mathematics lesson with manipulatives by recognizing mathematical objects and their elements at manipulatives, and by justifying mathematical algorithms with manipulatives.

**Key words:** Participation. Manipulative materials. Teaching Mathematics.

### Introdução

O uso de materiais didáticos, isto é, materiais especialmente concebidos para fins educativos, como livros e apostilas, tem sido foco de algumas investigações sob a perspectiva da Educação Matemática (GELLERT, 2004; HERBEL-EISENMANN; WAGNER, 2005; LORENZATO, 2006). Gellert (2004), por exemplo, apresenta um breve caso, mostrando a

divergência de interesses que pode ocorrer ao usar materiais didáticos em uma aula de matemática. Neste estudo, uma professora de matemática de uma escola primária lê um texto para seus alunos. Este texto é uma história envolvendo cinco pássaros e um gato, a qual suscita nos alunos questionamentos em relação à cor e ao gênero dos pássaros, questões que não se referem às tarefas matemáticas propostas pelo autor do material didático.

Segundo o autor, os alunos ainda não sabiam que, na aula de matemática, histórias, perguntas, desenhos e problemas são utilizados para desenvolver o estudo de ideias matemáticas. Porém, quando um professor de matemática do ensino médio encontra-se em sala de aula com certo material, os alunos parecem ter a certeza de que eles são esperados a focarem nas ideias e procedimentos matemáticos (GELLERT, 2004). Esta análise nos leva a reconhecer que as ações dos alunos em relação aos materiais didáticos dependem não apenas das experiências prévias em matemática dos alunos, mas também das normas sociais que regulam as interações na sala de aula. Convergindo com Gellert (2004), Lorenzato (2006) argumenta que o uso do material didático é estreitamente ligado ao contexto escolar, de modo que seu uso pode estar à disposição do professor e do aluno e, como tal, o uso dado depende destes atores sociais.

Lorenzato (2006) delimita o que ele chama de material didático manipulável concreto, afirmando que este possui um papel na aprendizagem matemática do aluno. Na maioria das vezes, Lorenzato (2006) refere-se aos materiais didáticos manipuláveis concretos apenas como materiais manipuláveis. Da mesma forma, utilizaremos a expressão “materiais manipuláveis” e assumimos que estes são objetos que podem ser tocados, sentidos e movimentados pelas pessoas (REYS, 1971 apud MATOS; SERRAZINA, 1996). Palitos de picolé, folhas de papel, bolas de isopor são exemplos destes materiais<sup>1</sup>. Para fins analíticos, a escolha desta definição é útil por capturar a especificidade da unidade de análise focalizada neste artigo, não incluindo a manipulação, por exemplo, de objetos virtuais.

### **Materiais manipuláveis no ensino de matemática**

Referindo-se à utilização de materiais manipuláveis no ensino da matemática, estudos desafiam a ideia de que esses materiais possuem uma potencialidade em si (KAMII; LEWIS; KIRKLAND, 2001; PAIS, 2001; LORENZATO, 2006). Para os autores citados, a potencialidade dos manipuláveis depende do ambiente social em que o material é inserido.

---

<sup>1</sup> Para evitar repetições, utilizaremos, por vezes, o termo materiais manipuláveis ou manipulativos referindo-se aos materiais manipuláveis.

Pais (2001, p. 2) chama atenção para o “empirismo desprovido de significado” que pode ocorrer em relação a estes materiais: professores podem assumir que os alunos aprendem conceitos matemáticos por, simplesmente, tocar e mover objetos. O autor relembra o movimento da Escola Nova, que defendia os chamados métodos ativos, os quais envolviam, quase sempre, o uso de manipulativos. Para ele, o princípio do aprender fazendo, implícito nessa tendência, por vezes, foi interpretado equivocadamente como uma exclusiva manipulação de objetos, sendo menosprezada a estreita relação que deve haver entre a atividade empírica e a apropriação dos conceitos.

Clements (1999) também apresenta críticas em relação à afirmação da “eficácia” dos manipuláveis pelo motivo de serem objetos que os alunos podem tocar, pegar. O autor sustenta o argumento que, embora os manipulativos tenham um lugar importante na aprendizagem matemática, seu caráter físico não a garante.

Geralmente, a expectativa dos professores quanto ao uso de manipuláveis é de reduzir as dificuldades no ensino da matemática (SANTANA, 2008). Entretanto, no estudo realizado por Moyer (2001), professores utilizaram manipuláveis para entreter os alunos nas suas aulas e não para ensinar conceitos matemáticos. Neste estudo, dez professores receberam um *kit* contendo dez manipuláveis para serem aplicados em suas aulas durante um ano. Foi observado que os professores usavam pouco este material, e quando fizeram uso deste, foi apenas para tornar a aula mais divertida, uma vez que durante o ensino de conteúdos matemáticos foi realizado sem o uso do *kit*.

O estudo de Moyer (2001), portanto, corrobora o reconhecimento de que o modo como os professores utilizam os materiais na aula de matemática não é determinado pelo manipulável em si, mas pelo contexto em que este é inserido, pelo modo que se deu a opção de uso e, ainda, pelo modo como se realizou a socialização do material.

Mas o que podemos relatar sobre o envolvimento dos alunos? Como pode variar este envolvimento quando o professor utiliza manipuláveis no ensino de matemática? Para gerar uma compreensão sobre estas questões, propomos, neste estudo, *investigar a participação<sup>2</sup> dos alunos na aula de matemática ao utilizar os materiais manipuláveis*. Como suporte para esta discussão, foram analisadas as participações dos alunos em uma aula de matemática em que estes materiais estavam presentes. Nas seções que seguem, apresentamos os conceitos teóricos que embasaram este estudo, seu contexto e a metodologia utilizada, assim como a análise de dados.

---

<sup>2</sup> Este termo será esclarecido na seção que segue.

## Participação e prática social

No presente estudo, entendemos participação como uma experiência social de viver no mundo em termos de um grupo de pessoas que compartilham uma mesma prática (WENGER, 1998). É um complexo processo que combina fazer, falar, pensar, sentir e pertencer. Desta perspectiva, os alunos deixam de serem vistos como alunos singulares e passam a ser entendidos como participantes na prática que se desenvolve na sala de aula (e que tem sido desenvolvida historicamente). Nesta visão relacional, o que alunos e professores fazem é entendido em termos relacionais à prática que é desenvolvida no contexto social em que participam. Nela, podemos identificar os alunos envolvidos nas ações consideradas legítimas à prática, com menor ou maior grau de engajamento (FERNANDES, 2008).

A participação é mais ampla que mero engajamento em uma atividade, já que esta se caracteriza em termos de reconhecimento mútuo ou a possibilidade de que o reconhecimento ocorra (WENGER, 1998). Em uma sala de aula, por exemplo, um aluno que se mantém apático na resolução das tarefas propostas pelo professor, apesar de fisicamente presente, não será reconhecido como participante da prática. Participação refere-se, assim, não apenas a eventos locais de engajamento em certas atividades, mas a um processo mais abrangente de ser ativo em práticas sociais que possuem uma certa permanência (WENGER, 1998).

Focar na participação, então, sugere um explícito foco nas pessoas, mas nas pessoas-ativamente-no-mundo, como participantes de práticas sociais mais ou menos circunscritas (LAVE; WENGER, 1991). Prática social, nesse sentido, é um fazer inserido num contexto histórico e social (WENGER, 1998). Este conceito de prática não traz consigo a tradicional dicotomia que divide ação e conhecimento, manual e mental. Esta envolve sempre a pessoa por completo, mas não necessariamente um grupo de pessoas:

Ler um livro é [parte de] uma prática social, mesmo que feito a sós, no sentido de que estamos a interagir com ideias de outros, codificadas (socialmente) através da escrita nesse meio de comunicação, mediador numa relação entre o autor e o leitor. (...) mas há a questão central dos significados, do dar sentido àquilo que se lê. É principalmente aqui que parece reconhecer-se a prática social dado que os significados são partilhados (construídos, legitimados) por um dado grupo social (MATOS, 1999, p. 5).

Portanto, focalizar a participação dos alunos em aula de matemática que utiliza materiais manipuláveis implica em capturar os modos que os alunos se “engajam ativamente” na aula de matemática por meio de manipuláveis. Como decorrência da conceptualização teórica adotada, nossa análise tentará capturar as formas de participação em uma prática social, neste caso, aulas

de matemática, com a presença de manipuláveis.

Utilizar materiais manipuláveis na sala de aula é também parte de uma prática social, em que os sujeitos, professores e alunos, interagem uns com os outros, engajados em atividades com significados compartilhados. Imaginemos, por exemplo, uma aula em que o professor aponta para uma folha de papel e refere-se a ela como uma “figura geométrica”. Os alunos compartilham esse entendimento, legitimando a indicação feita pelo professor de que aquela folha de papel é uma “figura geométrica”. O professor, então, conduz a tarefa e encaminha os alunos ao reconhecimento de um quadrilátero na folha de papel. Eles percebem que este é o engajamento esperado pelo professor naquela prática. Porém, como discutimos em Moyer (2001), um professor pode acabar por utilizar um material manipulável para outros fins, como entreter seus alunos.

Materiais tácteis são usados não somente porque eles são reconhecíveis nas suas relações de engajamento, no contexto em que foram construídos, mas também porque eles podem ser reengajados em novas situações (WENGER, 1998). Porém, os modos de participação dos sujeitos em uma determinada prática permitem ou não determinados reconhecimentos. No caso da sala de aula de matemática, folhas de papel, palitos de picolé, tabelas de números e formas foram re-apropriados e modificados, servindo aos propósitos de ensinar e aprender matemática.

Segundo Godino e Batanero (1994), os objetos matemáticos são de natureza abstrata, no sentido de não existirem no mundo táctil. Eles podem ser considerados como símbolos culturais que emergem de um conjunto de aplicações relacionadas às atividades de resolução de problemas (GODINO; BATANERO, 1994). O número  $e=2,718\dots$ , o conjunto dos primos, o triângulo, a matriz  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$  são exemplos desses objetos. Dessa forma, a relação entre os seres humanos e os objetos matemáticos não se dá por referência ao mundo táctil, mas em termos da consistência interna na disciplina matemática (seja ela qual for). Disto decorre que os objetos matemáticos estudados na escola não estão disponíveis para serem examinados ou manipulados, pelo menos, não da mesma natureza como ocorre na Biologia, Química etc. Porém, é possível em uma sala de aula de matemática, como veremos nos dados apresentados e analisados neste artigo, observar professores e alunos utilizando manipuláveis como se fosse o próprio objeto matemático, participando de uma prática em que estes objetos são considerados palpáveis e acessíveis às mãos.

A seguir, apresentaremos o contexto e o método utilizado nesta pesquisa, e depois, os dados e sua análise.

## O contexto da pesquisa

Esta pesquisa teve como contexto de coleta de dados uma sala de aula do 9º (nono) ano do Ensino Fundamental, de uma escola da rede pública da Bahia. Nesta, estavam matriculados trinta e cinco alunos, os quais frequentavam com regularidade as aulas.

Nilda<sup>3</sup>, a professora desta turma, foi convidada a participar da pesquisa durante um curso de formação continuada, ministrado pela primeira autora deste artigo. Neste curso, a autora informou aos professores sobre a pesquisa e solicitou a colaboração deles referente à coleta dos dados nas salas em que eles lecionavam. A professora Nilda, então, mostrou-se bastante disposta a colaborar. Além disso, ela ensinava nos anos finais da educação fundamental na rede pública, o que foi um requisito para a escolha do educador ou educadora participante desta pesquisa.

A escolha da turma foi indicação da professora pautada na disponibilidade e desejo de cooperar dos alunos envolvidos. Esta foi observada durante as aulas de matemática em um período de quarenta e um dias, que abrangeu dezoito aulas. Durante toda a coleta, os alunos frequentemente apresentavam questões e sempre respondiam às indagações da professora, que também se mostrava bastante interessada em discutir os questionamentos deles e estimular os alunos nas atividades.

Para este artigo, escolhemos trazer a análise de dados de uma aula que durou aproximadamente cem minutos, sendo observado um grupo de seis alunos escolhido no momento da coleta, por indicação da professora. Adotamos como critério de escolha do grupo a indicação da professora, por perceber que qualquer um dos grupos na sala poderia ser o grupo observado, dado que eles pareciam suficientemente heterogêneos (tal como tínhamos planejado, para fazer jus ao método de pesquisa, conforme apontado na próxima seção). A professora justificou a escolha dos alunos por apresentarem diferentes desempenhos escolares no que se refere à matemática, além de serem bastante falantes, o que julgamos apropriado à natureza desta pesquisa.

Os alunos que participaram do grupo observado foram Lucas, Leo, Paulo, Carla, João e Fernando. Lucas e Leo apresentavam bom desempenho escolar em matemática, enquanto Paulo e Carla apresentavam desempenho escolar regular. Já João e Fernando apresentavam um baixo desempenho escolar em matemática. Eles mostraram-se atentos às atividades e descontraídos no momento da coleta de dados.

---

<sup>3</sup> O nome da professora e os nomes citados nas transcrições das falas são pseudônimos.

## O método da pesquisa

Os dados desse estudo foram coletados no cenário da sala de aula, na tentativa de dar sentido e/ou interpretar o fenômeno focalizado nesta pesquisa em termos dos significados que as pessoas trazem para eles. Desse modo, o estudo classifica-se como sendo de natureza qualitativa (DENZIN; LINCOLN, 2005).

Referente à coleta de dados, o procedimento utilizado foi a observação, que, segundo Adler e Adler (1994), consiste em coletar impressões do mundo por meio de todas as faculdades humanas importantes. Este procedimento possibilitou identificar e registrar as ações dos participantes, investigando de que maneira os alunos participam das aulas em que são utilizados manipuláveis.

Para registrar estas observações, a gravação somente em áudio não seria suficiente, pois registraria as formas de participações dos alunos de forma limitada. Desse modo, a gravação em vídeo foi a mais indicada, já que permite o registro das ações de modo mais amplo (como gestos, por exemplo). Durante as gravações, buscou-se intervir o mínimo possível, não interagindo verbalmente com os alunos e mantendo uma distância que permitisse filmar o grupo, mas que não incomodasse os mesmos.

A análise de dados foi inspirada nos guias analíticos da *Grounded Theory*, o que não significa nossa concordância com sua posição paradigmática. Apenas nos apropriamos dos procedimentos de análise de dados tal como apresentado por Charmaz (2006). Dessa forma, a análise foi realizada em três etapas. A primeira consistiu em selecionar partes importantes nas gravações. Os vídeos foram assistidos diversas vezes e foram transcritos trechos das aulas em que os alunos interagem com os manipuláveis. A segunda etapa correspondeu à codificação dos dados, em que as transcrições foram lidas e cada fala ou ação dos alunos, quando relacionadas aos manipuláveis, ainda que indiretamente, foram reduzidas a códigos através de uma pequena frase (CHARMAZ, 2006). Por exemplo, na fala dos alunos “Um quadrilátero” que se refere a uma folha de papel A4, o código gerado foi “Reconhece um elemento matemático no manipulável”.

Para cada código, então, foram feitas algumas considerações. No caso do código acima, a consideração foi “Os alunos, com o apoio da professora, reconheceram um elemento matemático no material utilizado”. Na terceira etapa de análise, com o auxílio das considerações, os códigos foram comparados e agrupados em categorias mais abrangentes, cada uma possuindo uma propriedade, que articula os códigos entre si. Foram geradas três categorias: reconhecimento de objetos matemáticos no manipulável, definição de objetos matemáticos utilizando o material e justificativa de algoritmos matemáticos utilizando manipuláveis. Por

fim, confrontaram-se os resultados obtidos com a literatura, a fim de gerar compreensões teóricas e/ou confirmar/revisar aquelas já existentes.

### **Os alunos da Professora Nilda utilizando manipuláveis**

A atividade utilizada na aula analisada neste artigo foi elaborada pela professora Nilda, que pesquisou na Internet atividades que utilizavam manipulativos na sala de aula e que introduziam o tópico “Áreas e Superfícies”, adaptando-as de acordo com seus interesses e necessidades. Seu objetivo, com esta atividade, foi que os alunos “inferissem” as fórmulas utilizadas para o cálculo das medidas de áreas do triângulo e do trapézio.

Através dos dados coletados, é possível perceber que os alunos já conheciam as fórmulas para o cálculo das áreas desses polígonos, o que pôde ser confirmado pela professora, que informou que as fórmulas já tinham sido estudadas no oitavo ano do ensino fundamental. Os alunos, entretanto, desconheciam alguma justificativa para elas.

No início da aula em que foi realizada essa tarefa, a professora retomou o conceito de área, deduzindo através de desenhos de quadrados (de lado unitário) a fórmula para cálculo da área do retângulo. Também entregou aos alunos uma régua, uma tesoura e uma folha de papel A4 amarela. Inicialmente, os alunos foram incentivados a calcular a área daquela folha de papel e justificar, utilizando a mesma fórmula para o cálculo da área do triângulo. Após os alunos justificarem esta fórmula, a professora solicitou para eles, que novamente utilizando a folha de papel, inferissem a fórmula para o cálculo da área do trapézio.

A seguir, são apresentados, em ordem cronológica, quatro trechos selecionados dessa aula. Estes trechos foram escolhidos, pois são representantes das nossas categorias de análise. A cada trecho, faremos uma análise inicial, para então fazer uma discussão mais abrangente sobre a maneira como os alunos participam de aulas de matemática em que utilizam os materiais manipuláveis.

#### **Trecho 1: Reconhecendo o manipulável como objetos matemáticos**

A professora Nilda apresentou, inicialmente, o material entregue aos alunos, como é indicado nas transcrições abaixo:



Participante	O que foi dito	O que foi feito (ação)
1.1 Nilda	Gente, olha: nós vamos começar inicialmente... Que figura vocês têm na mão aí? Que figura geométrica é essa aí? Em amarelo, é o quê?	Indica a folha de papel utilizada.
1.2 Alunos	Um quadrilátero.	
1.3 Nilda	Um quadrilátero! Bia disse que é um quadrilátero... Oh... O papel que tá na mão é um quadrilátero. É parecido com esse que eu fiz? (referindo-se ao “retângulo” que havia desenhado na lousa)	Aponta para a lousa.
1.4 Alunos	É!	
1.5 Nilda	Vocês vão medir aí e vão me dizer qual é a área desse quadrilátero. Vocês estão com a régua na mão, vão medir e dizer qual é a área do quadrilátero.	
1.6 Lucas	Não é exata a folha de papel (referindo-se ao valor da medição)	Mede uma dimensão da folha.

Pelo exposto acima, verifica-se que, na fala 1.1, a professora, após apresentar o material, indica ser esta uma “figura geométrica”, os alunos indicam ela como um “quadrilátero”, na fala 1.2. Na fala 1.3, a professora legitima o que é dito pelos alunos sobre aquela “figura geométrica”.

A atividade segue, referindo-se àquela folha de papel como um “quadrilátero” e, em algumas vezes, como um “retângulo”. O quadrilátero e o retângulo são objetos matemáticos já conhecidos pelos alunos, eles já estudaram estes objetos matemáticos em anos escolares anteriores. Nesta atividade, no entanto, *os alunos reconhecem o manipulável como sendo estes objetos matemáticos.*

## **Trecho 2: Definindo um elemento de um objeto matemático no manipulável**

No trecho 2, os alunos calcularam a área da folha do papel. Eles indicam para a professora o valor calculado e ela quer saber como eles fizeram o cálculo.

Participante	O que foi dito	O que foi feito (ação)
2.1 Nilda	Vocês calcularam como isso (referindo-se ao cálculo da área do retângulo) aí?	
2.2 Paulo	Pegou e multiplicou.	
2.3 Nilda	Pegou o quê? O que é isso e isso?	Aponta para dois lados da folha com dimensões diferentes.
2.4 Alunos	A área!	
2.5 Nilda	Não! Isso aqui... Oh... Que é que vocês acham que mede 21? É esse aqui ou esse aqui?	Aponta para dois lados da folha com dimensões diferentes.
2.6 Paulo	A altura (referindo-se ao menor lado do papel)	Aponta para o papel que estava na posição horizontal.
2.7 Nilda	Esse! Mas se eu colocar assim?	Aponta para um lado de menor medida do papel e vira o papel, colocando-o na vertical.
2.8 Alunos	Ah!	Riem.
2.9 Nilda	Quem é a altura agora?	
2.10 Alunos	O maior!	
2.11 Nilda	Como é que a altura é essa e não é essa?	Aponta para dois lados com dimensões diferentes da folha.
2.12 Lucas	Porque é a parte do horizonte!	Balança a mão no sentido horizontal.
2.13 Nilda	Gente, presta atenção. A gente faz o que? A gente nomeia a altura... a gente viu altura ano passado... E a gente viu que altura é sempre um segmento perpendicular a uma base, não foi isso? Se o papel tá assim, a altura é essa... Se ele tá assim, a altura passa a ser essa...	Aponta para o lado de menor medida do papel e vira o papel, colocando-o na vertical.

Nas falas 2.4 e 2.6, os alunos relacionam novamente o material manipulável a objetos


matemáticos. Já nas falas 2.10 e 2.12, os alunos, além de reconhecerem a altura do quadrilátero no manipulável, indicando ser “a altura do retângulo” uma lateral do papel, *definem a altura de uma figura geométrica utilizando o material*. Eles enunciam características específicas desse objeto. Os alunos indicam que a altura do retângulo é “o maior”, o maior lado do papel e, na fala 2.12, um aluno indica, ainda, que a altura do retângulo não é um dos lados “porque [o lado] é a parte do horizonte”, ou seja, define a altura do quadrilátero como o lado não horizontal. Dessa forma, os alunos definem este elemento do objeto matemático utilizando o manipulável.

### **Trecho 3: Justificando a fórmula para o cálculo da área do triângulo utilizando manipuláveis**

Após finalizar as questões relativas à área do retângulo, a professora inicia a parte da atividade correspondente à justificativa da fórmula para o cálculo da área do triângulo.

Participante	O que foi dito	O que foi feito (ação)
3.1 Nilda	Quantos triângulos eu posso fazer com esse papel?	
3.2 Paulo	Um milhão, professora!	
3.3 Nilda	Um milhão? Ah, gostei da resposta de Paulo. Olhem a pergunta que eu fiz: quantos triângulos eu posso fazer com esse papel? Ele disse um milhão. Vai depender do tamanho do triângulo. Agora eu quero que vocês me deem a menor quantidade de triângulo que caiba nesse papel.	
3.4 Lucas	Dois, se for o papel todo.	

Na fala 3.2, um aluno assume que o papel pode formar um milhão de triângulos. Porém, para seguir a tarefa, é necessário “fazer triângulos” que tenham a mesma medida da base e a mesma medida da altura do retângulo, o que permitiria formar apenas dois triângulos. A professora não explicita isto, mas solicita a menor quantidade de triângulos formados com aquele papel, outro aluno indica “dois”. Ele reconhece e indica que o “triângulo” pode ser formado por ele com aquele papel. Após todos os alunos entenderem que a professora queria que eles recortassem o papel para formar dois “triângulos” sem sobrar nenhuma área do papel, a atividade seguiu:

Participante	O que foi dito	O que foi feito (ação)
3.21 Lucas	Tô cortando a diagonal para formar dois triângulos. Não é base vezes altura, dividido por dois?	Ele dobra a folha, como indicado na foto abaixo, e aponta para a “diagonal”: 
3.22 Nilda	Porque você tá dizendo isso?	
3.23 Lucas	Por que você pega o retângulo e divide em dois triângulos. A do retângulo é base vezes altura (se referindo a fórmula para o cálculo da área do retângulo)... e divide por dois.	Ele aponta para a folha de papel dobrada.

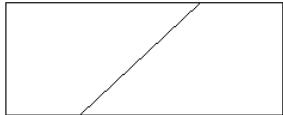

Na fala 3.21, o aluno indica a “diagonal” no manipulável e acredita poder cortá-la. Foi estabelecido naquela prática que a folha de papel representa um retângulo. Dessa forma, o aluno indicou um corte de uma extremidade à outra não consecutiva como uma diagonal. Podemos perceber, desse modo, que o aluno, a partir do significado dado ao manipulável, reconhece no contexto da atividade outro elemento do objeto matemático no manipulativo: a diagonal.

Ainda nesta fala, o aluno apresenta a fórmula para o cálculo da área do triângulo. A professora, na fala 3.22, questiona o aluno o porquê daquela afirmação. Ela sabia que o aluno já conhecia esta fórmula e queria ter certeza de que ele, nesta prática, deduziu-a a partir da atividade. O aluno explica, na fala 3.23, como *deduziu a fórmula, indicando que foi realizado a partir das observações feitas com o manipulável*. Ou seja, o material ofereceu subsídios para que o aluno justificasse a fórmula.

Após a maioria dos alunos chegar à conclusão referente a esta fórmula, a professora finaliza esta etapa e inicia a parte da atividade voltada para a dedução da fórmula para o cálculo da área do trapézio. Ela pede para que os alunos construam um trapézio a partir das outras duas

figuras conhecidas (o triângulo e o retângulo).

#### Trecho 4: Justificando a fórmula para o cálculo da área do trapézio utilizando manipuláveis

Participante	O que foi dito	O que foi feito (ação)
4.1 Leo	Ah rapaz! Aqui oh... Esse vai dar esse (junta dois trapézios congruentes para formar um retângulo), porque esse é igual a esse (aponta para a base maior dos dois trapézios). Aí soma esse (aponta para a base do retângulo).	Recorta duas representações de trapézios retângulos congruentes e coloca-os um recorte ao lado do outro formando a representação de um retângulo, como na figura abaixo:
		 <p>Indica os elementos no papel, como na foto abaixo, e depois sobrepõe os dois recortes:</p> 
4.2 Lucas	E esse é igual a esse... <i>Agora faz sentido!</i> Porque como multiplica pela altura vai dar esse todo (se referindo à área do retângulo) e aí divide por dois... Professora (Gritando)!	Aponta para os dois recortes que representam os trapézios.
4.3 Nilda	Eu quero que vocês façam um desse.	Mostra o recorte que representa um trapézio.
4.4 Lucas	Aqui ó.	
4.5 Nilda	Mas vocês não usaram o triângulo!	Olha o recorte que representa o retângulo formado pelos dois, o recorte que representa o trapézios e sai para ver outro grupo.
4.6 Lucas	Volta professora!	
4.7 Leo	Aqui ó (Fala para a professora). Você juntando essa base com essa base, vai dar isso, essa linha (aponta para a base do retângulo)... Multiplica pela altura vai dar esse retângulo (referindo-se à área do retângulo), aí dividindo por dois dá o trapézio (referindo-se à área do trapézio).	O aluno coloca os dois recortes que representam os dois trapézios retângulos um ao lado do outro formando um retângulo. Indica os elementos: base, altura, retângulo, e sobrepõe os dois recortes que representam os trapézios para mostrar que são congruentes.
4.8 Nilda	Ah, agora entendi!	

Os alunos justificam a fórmula para o cálculo da área do trapézio, observando o que foi realizado com o manipulável, conforme as falas 4.1, 4.2, 4.7. Eles mostravam-se satisfeitos em saber ilustrar a fórmula. Na fala 4.2, o aluno ainda exclama “agora faz sentido!”, possibilitando-nos inferir que, mesmo sabendo a fórmula, a manipulação dos recortes e, neste caso, a ilustração da fórmula permitiram ao aluno alguns esclarecimentos referentes àquela.

Em diversos momentos, os alunos recortaram o manipulável, sobrepondo os recortes, e arrumando-os lado a lado com outros, a fim de visualizar e justificar algoritmos matemáticos.

### **Discussão**

Através da análise de uma aula de matemática, este artigo buscou gerar um entendimento sobre formas de participação dos alunos na aula ao utilizar materiais manipuláveis. Como em Kamii, Lewis e Kirkland (2001), nesta aula, os alunos são encorajados a abordar as tarefas matemáticas por meio de explorações, o que pode fornecer elementos de engajamento nas práticas desta sala de aula. Dentro desse contexto, ao utilizar os materiais manipuláveis, seja reconhecendo o manipulável como objetos matemáticos (trecho 1) ou justificando as fórmulas de cálculo de área utilizando os manipuláveis (trecho 3 e 4), os alunos estão participando de uma prática, tal como definido por Wenger (1998). Eles estão envolvidos na abordagem da tarefa proposta pelo professor, com menor ou maior grau de engajamento e isto é reconhecido pelos alunos e pela professora, como pode ser percebido em qualquer um dos trechos apresentados anteriormente.

Além disso, notamos que a natureza da participação dos alunos, quanto à utilização dos materiais manipuláveis, pode variar, pelo menos, em três casos: a) os alunos reconhecem o manipulável como objetos matemáticos; b) os alunos definem elementos de objetos matemáticos utilizando o material e c) os alunos justificam algoritmos matemáticos utilizando manipuláveis.

Nos trechos apresentados, os alunos reconhecem objetos matemáticos ou elementos destes nos manipuláveis. Eles identificam a folha como um quadrilátero, assim como um retângulo e uma parte dessa como um triângulo, ou a altura e a diagonal como elementos do manipulável. É importante destacar, no entanto, que esta forma de participar com o material, ou seja, este significado atribuído pelos alunos ao material não é intrínseco a ele (CLEMENTS, 1999), já que os padrões de interação social estabelecidos em cada situação são apresentados de forma singular (WATSON; WINBOURNE, 2008). Porém, como foi apresentado em Moyer (2001), por exemplo, em outras salas de aulas ou em outras aulas desta mesma sala, uma folha de papel ou outro manipulável pode ser reconhecida para outros propósitos.

Podemos, então, dizer que é na prática que os significados são atribuídos aos materiais (WENGER, 1998). Nesta aula, por exemplo, o que permite aos alunos atribuir estes significados à folha de papel é a relação que é projetada com os objetos matemáticos: quando se sabe que um quadrilátero é um “polígono de quatro lados” e tem-se contato com uma folha de papel A4, pode-se reconhecer essa folha de papel como um quadrilátero. Além disso, o contexto desta sala de aula possibilita este reconhecimento, já que a professora e os alunos legitimam essa participação, existe um reconhecimento mútuo em relação a este tipo de engajamento. Talvez, em um contexto de estudo da Geometria Euclidiana, no curso de Bacharelado em Matemática, a afirmação “esta folha de papel A4 é um quadrilátero” não tenha nenhuma legitimidade.

Assim, os manipuláveis podem ter um papel importante na aprendizagem matemática já que oferecem uma representação tátil que pode ser usada para ajudar os alunos a visualizar objetos matemáticos (LAMBERTY; KOLODNER, 2002). A partir desta identificação, os alunos podem definir objetos matemáticos com o auxílio do manipulável e justificar algoritmos matemáticos com o apoio da utilização/manuseio dos manipuláveis, como sugerem os dados apresentados. Eles podem dobrar o manipulável, recortar, sobrepor os recortes, arrumar estes uns ao lado do outro, de forma que visualizam elementos matemáticos, o que permite comparar e ilustrar esses elementos, sustentando e legitimando suas deduções.

## **Conclusão**

O presente artigo analisou a participação de alunos em uma aula de matemática em que são usados materiais manipuláveis. Para este fim, foram analisados trechos de uma aula de matemática do nono ano do ensino fundamental em que os alunos interagem com manipuláveis a fim de aprender conceitos matemáticos. Foi possível observar, assim, que os alunos podem participar da sala de aula de matemática reconhecendo manipuláveis como objetos matemáticos, definindo elementos de objetos matemáticos no manipulável e justificando algoritmos matemáticos com o auxílio destes.

Na aula de matemática, os alunos podem referir-se a materiais manipuláveis como triângulos, cubos, hipotenusa etc. Eles podem identificar características similares entre o material e estes objetos matemáticos e indicar como sendo o material o próprio objeto matemático. Além disso, é possível observar os alunos caracterizando objetos matemáticos por meio do manipulável e assim, também, utilizando as características palpáveis do material para inferir algoritmos matemáticos. Para isso, entretanto, o contexto em que os alunos estão inseridos deve ser favorável a estes padrões de participação, permitindo e incentivando os alunos a este tipo de engajamento na aula de matemática.

Podemos indicar, dessa forma, como implicações deste artigo, a possibilidade de entender melhor a relação professor/manipulável/aluno, além de trazer *insights* de como os alunos podem aprender com estes materiais. É importante que os professores percebam as nuances nesta relação, cientes de que seu papel é fundamental para que a interação aluno/manipulável seja prazerosa e frutífera para o conhecimento matemático.

## Referências

- ADLER, P. A.; ADLER, P. Observational techniques. In: DENZIN, N. K.; LINCOLN, Y. S. (Orgs.). *Handbook of qualitative research*. Thousand Oaks: Sage, 1994. p. 377-392.
- CHARMAZ, K. *Constructing Grounded Theory: a practical guide through qualitative analysis*. London: Sage, 2006.
- CLEMENTS, D. H. ‘Concrete’ manipulatives, concrete ideas. *Contemporary Issues in Early Childhood*, Oxford-UK, n. 1, p. 1-16, 1999.
- DENZIN, N. K.; LINCOLN, Y. S. Introduction. In: DENZIN, N. K.; LINCOLN, Y. S. (Orgs.). *Handbook of qualitative research*. Thousand Oaks: Sage, 2005. p. 1-29.
- FERNANDES, E. Rethinking Success and Failure in Mathematics Learning: The Role of Participation. In: MATOS, J. F.; VELOSO, P.; YASUKAWA, K. (Orgs.). *Proceedings of the Fifth International Mathematics Education and Society Conference*. Lisboa: Universidade de Lisboa, 2008.
- GELLERT, U. Didactic material confronted with the concept of mathematical literacy. *Educational Studies in Mathematics*, Springer, v. 55, p. 163-179, 2004.
- GODINO, J. D.; BATANERO, C. Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, La Pensée Sauvage, Éditions, v. 14, n. 3, pp. 325-355, 1994.
- HERBEL-EISENMANN, B.; WAGNER, D. In the middle of nowhere: how a textbook can position the mathematics learner. In: CONFERENCE of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 29. 2005. Disponível na internet. <<http://www.emis.de/proceedings/PME29/PME29RRPapers/PME29Vol3HerbelEisenmannEtAl.pdf>>. Acesso em 23 de setembro de 2012.
- KAMII, C.; LEWIS, B. A.; KIRKLAND, L. Manipulatives: When are they useful? *Journal of Mathematics Behavior*, Elsevier, v. 20, pp. 21-31. 2001.
- LAMBERTY, K. K.; KOLODNER, J. L. Exploring Digital Quilt Design Using Manipulatives as a Math Learning Tool. In: BELL, R.; STEVENS, T.; SATWICZ (Orgs.). *Keeping Learning*



*Complex*: The proceedings of the Fifth International Conference of the Learning Sciences (ICLS). Mahwah, Erlbaum, 2002. p. 552-553.

LAVE, J.; WENGER, E. *Situated learning: Legitimate peripheral participation*. New York: Cambridge University Press, 1991.

LORENZATO, S. Laboratório de ensino de matemática e materiais didáticos manipuláveis. In: LORENZATO, S. (Orgs.). *O laboratório de ensino de matemática na formação de professores*. São Paulo: Autores Associados, 2006. p. 3-38.

MATOS, J. F. Aprendizagem e Prática Social: Contributos para a Construção de Ferramentas de Análise da Aprendizagem Matemática Escolar. *Actas da II Escola de Verão*. Sessão de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação, Santarém, 1999.

MATOS, J. M.; SERRAZINA, M. L. *Didáctica da matemática*. Lisboa: Universidade Aberta, 1996.

MOYER, P. S. Are We Having Fun Yet? How Teachers Use Manipulatives to Teach Mathematics. *Journal Educational Studies in Mathematics*, Springer, v. 47, p. 175-197, 2001.

PAIS, L. C. *Uma análise do significado da utilização de recursos didáticos no ensino da geometria*. 2001. Disponível na internet.  
[http://www.ufrj.br/emanped/paginas/conteudo\\_producoes/docs\\_23/analise\\_significado.pdf](http://www.ufrj.br/emanped/paginas/conteudo_producoes/docs_23/analise_significado.pdf).  
 Acesso em 23 de setembro de 2012.

SANTANA, E. Manipulative material and representational material. In: Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 32. México, 2008. *Anais*. v. 4, p. 225-232.

WATSON, A.; WINBOURNE, P. Introduction. In: WATSON, A.; WINBOURNE, P. (Orgs.). *New directions for situated cognition in mathematics education*. Melbourne: Mathematics Education Library, 2008. p. 1-12.

WENGER, E. *Communities of Practices Learning, Meaning, and Identity*. Cambridge: Cambridge University Press, 1998.