

Divulgar las matemáticas

María Candelaria Espinel Febles¹

Resumen

Organizo este trabajo en tres partes. La primera, recoge algunas reflexiones sobre la comunicación que sobre nuestro trabajo hacemos llegar a la sociedad los matemáticos; en la segunda, considero la matemática que se hace hoy y que es especialmente relevante por la incidencia del ordenador; y en tercer lugar, se apuntan algunas innovaciones de contenidos matemáticos para la enseñanza no universitaria que, a mi limitado entender, deberían realizarse.

Abstract

This work is organized in three parts. The first one considers some general comments about the communication, which mathematics make bring our work to the society, in the second one, we consider the mathematics, which is done today and is specially relevant for the incidence of computers, in the third point, some innovations in mathematic contents for the no university teaching are noted, which in our opinion, it should be realized.

I. Difundir las matemáticas

Comunicar

Pocos matemáticos se han preocupado de divulgar el trabajo que se realiza en los centros de investigación. El ciudadano no conoce a qué se dedican los matemáticos que investigan. Las pocas veces que en la prensa ha salido algo, por lo menos recientemente, ha sido en relación con el teorema de Fermat. Este teorema trata de la búsqueda de ternas que cumplan una determinada igualdad, encierra belleza y arte para un matemático, pero el ciudadano no le ve ninguna aplicación ni utilidad.

Posiblemente si se divulgaran resultados prácticos como el Teorema de Arrow o el Algoritmo de Karmarkar mejoraría la imagen que el hombre de la calle tiene de los matemáticos.

En el caso del *teorema de Arrow*, quizás mejorara hasta la imagen de los

¹ Este artículo surge como una reflexión personal en relación a un ciclo de conferencias sobre Historia de la Enseñanza de las Matemáticas, impartidas en la Facultad de Matemáticas de la Universidad de La Laguna durante el Curso 1996-97.

políticos. Desde hace tiempo se venían buscando sistemas de votación perfectos. Finalmente, en 1951, el economista Kenneth J. Arrow demostró que encontrar un sistema de votación justo es imposible.

Intentando medir el bienestar social a partir de las preferencias variadas de los individuos, Arrow se cuestionó cuándo un determinado cambio hace que la sociedad esté mejor. Demostró que no había forma de combinar las preferencias individuales de manera que se cumplieran simultáneamente cinco condiciones mínimas de racionalidad. Según el Teorema de Arrow, las preferencias individuales no pueden integrarse en una preferencia colectiva que sea coherente. Incluso prueba que ningún sistema electoral es perfecto. Por ello, los parlamentarios y políticos, en general, se comportan como agentes racionales que representan el interés público cuando las preferencias individuales sobre temas concretos se adecuan a modelos coherentes. El trabajo de Arrow se encuadra en un campo conocido por el nombre de elección pública. Kenneth J. Arrow compartió el premio Nobel de Economía en 1972, pero la elección social siguió siendo un área casi desconocida hasta que Buchanan obtuvo el Nobel de Economía en 1986.

Hoy tenemos un campo nuevo, la *teoría de elección social*, que se ocupa primordialmente de la búsqueda de sistemas de votación justos. No cabe duda que la mayoría de los investigadores en teoría de elección pública son economistas; pero, en realidad, lo que hacen es utilizar ideas matemáticas para el análisis económico y político.

El otro ejemplo citado, *algoritmo de Karmarkar*, afecta a cualquier persona. Cuando preparamos las vacaciones, diseñamos un itinerario para visitar ciertos lugares o ciudades. Solemos tomar un mapa y señalar un circuito que pase por todos los lugares elegidos pero que sea lo más corto posible. Cuando compramos un billete para viajar de Madrid a Berlín en tren, rápidamente se nos ofrecen distintos itinerarios para que elijamos el que mejor se adapte a nuestros intereses.

En caso de consultar con el mapa es la persona la que traza todos los posibles recorridos, mide su longitud y toma el mínimo. En caso de utilizar el tren, hay un potente ordenador, que como por arte de magia, rápidamente, aporta varias soluciones.

Pocos ciudadanos saben las horas de trabajo que hay en el programa que el ordenador guarda en su memoria. Los matemáticos que han diseñado algoritmos rápidos y eficaces han abordado un problema de importancia práctica y de indudable interés social.

El problema de encontrar un recorrido mínimo, visitando determinados lugares, se conoce en teoría de optimización combinatoria como el problema del

viajante de comercio. Este problema se puede formular como un problema de programación lineal y resolver por muchos métodos, entre ellos, por el algoritmo del simplex, propuesto por Danzing allá por la Segunda Guerra Mundial.

La complejidad de la sociedad actual, pensemos, por ejemplo, en recorridos de líneas aéreas, ha hecho que a pesar de disponer de veloces ordenadores, algunos problemas de recorridos tarden semanas en resolverse. Ello ha llevado a la búsqueda de algoritmos más eficientes. De modo sorprendente el método de Karmarkar, 1984, usa una transformación de la geometría descriptiva de la matemática que podríamos llamar tradicional. Pero su indudable conquista está en que el método de Karmarkar es un algoritmo de tiempo polinomial, mientras que el método simplex es un algoritmo de tiempo exponencial. En teoría, un algoritmo de tiempo polinomial es mejor que un algoritmo de tiempo exponencial. Esto se nota en el caso del problema del viajante de comercio: si es grande el número de ciudades, pongamos por caso que estemos interesados en encontrar el circuito mínimo entre 100 ciudades. Parece ser que alguna línea aérea americana ha comenzado a utilizar el método de Karmarkar para elaborar una programación mensual para 7000 pilotos y más de 400 aviones, y espera ahorrarse algunos millones de dólares, una vez terminado el proyecto.

Con los dos problemas citados, elección social y camino mínimo, queremos llamar la atención sobre lo ignorado que es el trabajo del matemático profesional. Muy pocas personas conocen que la matemática esté ligada al campo de la política o a la democracia, y menos, que se ejecute un eficiente algoritmo cuando en la estación se expende rápidamente un billete.

El término “marketing” seguramente no es muy acertado, quizás la palabra “mercadotecnia” sea más castellana, pero, en cualquier caso, es el conjunto de principios, técnicas, procedimientos y recursos para conseguir el aumento de la demanda de un producto o de un servicio. Tradicionalmente los matemáticos han sido, en la mayoría de los casos, personas poco abiertas a la sociedad y que no se han molestado en hacer llegar su trabajo sino a grupos muy reducidos. La sociedad quiere saber qué servicios le prestan los matemáticos. Así, es preciso que las investigaciones trasciendan fuera del mundo científico, que se practique la mercadotecnia.

Realmente, los matemáticos tendríamos que aprender de otros colectivos, como, por ejemplo, los físicos. Cuando los físicos teóricos nos hablan del tiempo, de los agujeros negros, de la gran explosión, e incluso de la teoría de la relatividad, uno tiene la sensación de que es un miembro más de la increíble novela del Universo. Y todo ello, suprimiendo las ecuaciones. Se dice que por cada ecuación se pierde a cien lectores.

Revistas

Los matemáticos tenemos que aprender a comunicar nuestro trabajo.

La vida más reciente de la divulgación científica en nuestro país la han llevado revistas como *Muy Interesante* o *Conocer*. Si contamos el número de artículos sobre matemáticas que estas revistas publican al año, nos sobran dedos... ¡de una mano!

Revisando dos textos recientes de *Muy Interesante* resulta que vienen en las páginas de humor. Una de ellas titulada *El panal ideal*, aparecido en el número 147, (noviembre, 1996), cuenta que de todas las formas de dividir un plano en celdas de igual superficie, los hexágonos regulares son los que tienen el perímetro más corto. Un panal con celdas cuadradas o triangulares requeriría más cera. De hecho si consideramos una celda de perímetro p , se encuentra que el área del cuadrado, triángulo y hexágono cumplen, respectivamente:

$$0.072 p^2 > 0.0625 p^2 > 0.048 p^2$$

Esta cuestión que en el plano es tan clara, no está resuelta en el espacio. Dividir el espacio en celdas de igual volumen con el área de la superficie más pequeña posible es un problema no resuelto. Según se dice en la publicación, en el año 1887, el químico lord Kelvin enfocó el problema apoyándose en sus estudios sobre los cristales. A finales de 1993, los físicos irlandeses Denis Weaire y Robert Phelan construyeron una nueva estructura de cristal llamada beta-tungsteno que genera dos clases de celdas que llenan el espacio y tienen un área superficial un 0.4% menor que la espuma de Kelvin. Pero se desconoce si ésta es la mejor solución posible, según Larry Gonick, autor del artículo-cómic.

El otro texto, del mismo autor que el anterior y también con humor, cuenta "el problema del viajante de comercio o la bioinformática". El tema no puede ser más actual, casi a diario la prensa informa de un nuevo gen responsable de alguna enfermedad. El ciudadano supone que en una hebra de ADN hay suficiente información codificada para generar un dinosaurio. La historieta publicada en el número 190 (marzo, 1997) muestra un tema que está de moda, pero tratado de una forma poco seria.

Ambos artículos son una muestra de cómo la naturaleza ha resuelto unos problemas que los científicos tratan de imitar. Sin embargo, el recurso utilizado, en forma de cómic, lleva a que parezcan temas poco serios. El marketing utilizado crea una imagen falsa del duro trabajo realizado.

La matemática ha tenido mala prensa. Tal vez los editores tratan de ocultar que se trata de matemáticas, precisamente por esa mala imagen o

nefasto recuerdo que tiene el hombre de la calle de las matemáticas.

Quizás por ello a veces aparecen las cuestiones matemáticas un poco camufladas. Un ejemplo lo tenemos en el número 192 (mayo, 1997) de la misma revista *Muy Interesante*, concretamente en el artículo titulado “Lo que nunca podremos lograr. Misión imposible”; de ocho cuestiones que se citan como imposibles, cuatro están relacionadas con las matemáticas (copio textualmente):

- Leer un mensaje secreto de longitud muy pequeña, Claude Shannon, 1949.
- Hacer una bola de papel perfecta, Carl Friedrich Gauss, 1847.
- Diseñar un sistema de votación justo y racional, Kenneth Arrow, 1972.
- Dibujar un mapa que necesite cinco colores, Wolfgang Haken y Kenneth Appel, 1976.

Pero esta verdad no se hace explícita, posiblemente si apareciese la palabra matemáticas el artículo tendría menos lectores. Quizás se trata de una estrategia de marketing, pero al revés. Definitivamente las matemáticas están asociadas a los pasatiempos o a los juegos. El número 193 (junio, 1997) de la misma revista ofrece un pasatiempo sobre plegados. Se pretende que se emparejen plegados con figuras, un buen ejercicio de visualización, que también podemos resolver con papel y tijeras.

Para un público más selecto tenemos revistas como *Mundo Científico e Investigación y Ciencia*. La única sección prácticamente fija sobre matemáticas, en esta última, es precisamente *Juegos matemáticos*, que comenzó Martín Gardner y ha continuado como sección, alternándose en los últimos años con *Juegos de ordenador*; aunque las cuestiones que se abordan en estas secciones están muy lejos de ser un juego, en muchos casos.

II. La matemática, hoy

Matemática aplicada

Las aplicaciones de la matemática en la sociedad actual generalmente se asocian con la estadística, el ordenador y, las más tradicionales, física o tecnología. Menos conocidas son las relaciones de las matemáticas con las ciencias sociales, psicología o economía.

Utilizar la matemática como una herramienta para el estudio de la sociedad en relación con conductas, valores, interacciones, conflictos, organizaciones, repartos justos es un campo poco conocido. Sin embargo, las ciencias sociales gozan hoy de técnicas de análisis que se sirven de las matemáticas, especialmente, de la teoría de grafos.

Una de las técnicas básicas para el diagnóstico grupal es el análisis

sociométrico. Las relaciones binarias y direccionales en el seno de un grupo pueden ponerse de manifiesto mediante observación sistemática, cuestionarios... Los resultados se representan en un sociograma o en una matriz que se analiza mediante la teoría de grafos. Aparecen así los individuos estrella, aislados, olvidados, rechazados, diadas, camarillas, cadenas, filtros... Esta información encuentra aplicación en distintos ámbitos como son la empresa, centros escolares, equipos deportivos ..., ya que pone de manifiesto la interacción espontánea entre los sujetos, tal como se viene utilizando desde los años 50.

En la historia de la matemática, la *teoría de grafos* como materia es relativamente reciente. La primera publicación formal corresponde a Leonhard Euler en 1736 en relación con el famoso "problema de los siete puentes de Königsberg". Pero ha sido en los últimos años cuando la materia ha crecido de una forma asombrosa. Varios factores han podido influir.

La teoría de grafos proporciona estructuras naturales desde la que construir modelos matemáticos apropiados a muchos campos de la ciencias. La materia base de estudio en esos campos es un conjunto de objetos y una o más relaciones entre los objetos. La teoría de grafos ha desarrollado un rico lenguaje de términos para hacer concisa la expresión de conceptos intrincados, asociados con las estructuras objeto-relación. Esta facilidad, realmente, fomenta la comunicación interdisciplinar de ideas y técnicas para beneficio de todos los campos que utilizan los grafos. La teoría de grafos ofrece una enorme selección de desafíos intelectuales que se pueden ordenar por niveles desde simples ejercicios para principiantes a profundas cuestiones abiertas para la matemática más sofisticada. Muchas cuestiones fascinantes de teoría de grafos son fáciles de comprender, pero sus soluciones completas son difíciles de encontrar. No obstante, en busca de esas soluciones, los investigadores son, con frecuencia, premiados con resultados que contribuyen a un mayor desarrollo de la materia.

Muchos problemas de tipo combinatorio que se plantean en psicología, sociología o comercio pueden interpretarse usando técnicas desarrolladas en teoría de grafos. Modelos de dominancia entre individuos o grupos de individuos y modelos de comunicación en los negocios permiten una formalización matemática, gracias, precisamente, a los grafos.

Una muestra del uso cotidiano de los grafos lo tenemos en la regulación del tráfico que se efectúa en un cruce con semáforos. La situación se modeliza del modo siguiente: cada sentido de circulación se representa por un vértice y diremos que dos vértices son adyacentes si los sentidos correspondientes pueden tener luz a la vez, y no lo son, cuando existe riesgo de choque. De esta forma, disponemos de un grafo de compatibilidad del cruce.

Economía y organización de empresas tiene bien presente la matemática, pero su correcto manejo requiere conocimientos de instrumentos financieros. La teoría de juegos es de esos campos que se han mostrado muy útiles en ciencias económicas, especialmente para el estudio de mercados y en el estudio del comportamiento empresarial.

La *teoría de juegos*, es un campo de la matemática que intenta resolver el problema de cómo varios individuos o empresas en competencia deben actuar para lograr la ventaja máxima para sí mismos. Como uno de los competidores tiene que ganar a expensas de los otros, se necesita llegar a un acuerdo para obtener una solución que pueda considerarse justa para todos. El problema es mucho más simple y la teoría más clara cuando sólo se trata de dos individuos o empresas; como, por ejemplo, en un juego de ajedrez, en una campaña para lograr un puesto político, o en el concurso de un contrato para construir una fábrica. Sólo el primero de estos ejemplos es un juego, en el sentido convencional; sin embargo, se llama juego a todas las actividades competitivas como las antes mencionadas. Los principios básicos de la teoría de juegos para los juegos de suma nula y de dos personas son fáciles de captar, si bien es cierto que la mayoría de los problemas de negocios son demasiado complejos para satisfacer suposiciones básicas. Pero vale la pena conocer las ideas de la teoría de juegos, porque dan un punto de vista más amplio en el análisis de problemas.

La primera piedra de la teoría de juegos se debe al genial matemático John von Neumann que publicó su primer trabajo sobre el tema en 1944.

En la industria aparecen todo un abanico de problemas relacionados con el *empaquetamiento* de objetos en una zona o superficie determinada. Pensemos en el almacenamiento de objetos en depósitos y almacenes, provisiones en barcos, aviones y camiones. Imaginemos colocar cajas de mosaicos u otras en "palet", de forma que éste se aproveche al máximo y que no queden "huecos" que posiblemente den lugar a roturas. Consideremos guardar mercancías en contenedores. Y así podríamos continuar con otras situaciones de embalajes que incluso nos son cotidianas.

En general, los problemas matemáticos de empaquetamiento consisten en alojar un conjunto de objetos dados lo más eficientemente posible en un espacio fijo, respetando ciertas reglas. Como problema general está sin resolver.

Tampoco el problema de empaquetamiento en dos dimensiones (Two Dimensional Bin Packing Problems) resulta sencillo. De hecho existen muchísimas variantes según la aplicación específica. Cortar láminas de algún material teniendo las piezas una forma determinada, según se permitan cortes en guillotina o no, ángulos rectos o no, etc., son cuestiones con fuertes aplicaciones

industriales y con mucho dinero en juego, pero que los científicos aún no han resuelto.

Ordenador

Los ordenadores han transformado la forma de hacer matemáticas. Ha nacido una matemática experimentalista.

La matemática tradicional se ha alimentado de algoritmos exactos; sin embargo, en la vida, con frecuencia, sólo interesa encontrar una solución aproximada al problema considerado. Los algoritmos que proporcionan buenas soluciones aproximadas, aunque no la solución óptima, han tenido un auge excepcional en los últimos veinte años. La necesidad de disponer de herramientas que permitan ofrecer soluciones, económicamente aceptables para la implementación en ordenador, esto es, que funcionen en el ordenador, se les suele denominar heurísticos.

A) Son varios los factores que obligan a utilizar *algoritmos heurísticos*, pero, en general, se recurre a ellos cuando no existe un método exacto de resolución o éste requiere mucho tiempo de cálculo o de memoria.

La obtención de un resultado puede venir dada por diferentes algoritmos de cálculo. Se utiliza el término de *familia de algoritmos de una función* para referirse a todos aquellos algoritmos orientados a resolver un mismo tipo de problema.

El interés de centrarse en la familia de algoritmos de una función concreta reside en que, aún siendo expresiones matemáticamente equivalentes con un objeto común, cada uno de los algoritmos supone una secuencia de operaciones diferentes para alcanzarlo. Esto se traduce en que cada uno de los algoritmos implica un tipo de procesamiento de la información, lo cual provoca que cada uno de ellos ofrezca una serie de características de funcionamiento extrínsecas al algoritmo en sí. Así, los distintos algoritmos de una misma familia pueden manifestar diferentes aspectos tales como la precisión en los resultados, la velocidad de cálculo, el tipo de acceso a los datos, la cantidad de memoria requerida y otros que, por una razón u otra, se pueden considerar de interés. Diversos trabajos se han centrado en estas características funcionales de los algoritmos y realizan estudios comparados de los mismos.

Medir la complejidad de cada algoritmo que se aporta es hoy una metodología estandar. Aunque en realidad lo que ocurre son dos cuestiones muy distintas: óptimo teórico y óptimo práctico. Un ejemplo ilustrativo lo tenemos en el algoritmo del simplex, método eficaz propuesto por George Danzang, 1947, pero que teóricamente requiere tiempo de orden exponencial. El algoritmo del elipsoide, que sigue el método de Khachian, 1977, es polinómico, pero exige más tiempo de cálculo que el simplex, para un número igual de restricciones;

así que estamos ante un óptimo teórico. El algoritmo polinómico de Karmarkar, 1984, no debería presentar esta disyuntiva.

Los algoritmos heurísticos que en un primer momento no fueron bien vistos por su escaso rigor matemático, hoy tienen una amplia aceptación. Por algoritmo heurístico se entiende un procedimiento simple, a menudo basado en el sentido común, que se supone ofrecerá una buena solución, aunque no necesariamente la óptima, a problemas difíciles, de un modo fácil y rápido.

Comentamos, a continuación, algunas de las ideas que esconden los algoritmos más frecuentes que se utilizan para encontrar soluciones en problemas de optimización.

B) Los *algoritmos iterativos* empleados para obtener soluciones aproximadas de ciertos problemas consisten en mejorar, mediante iteraciones sucesivas, una solución factible. Este sería el caso del algoritmo del simplex.

El algoritmo del simplex, es además un ejemplo de un algoritmo miope, puesto que en cada etapa se tantea la mejora del valor de la función económica, pero las iteraciones del simplex no recorren necesariamente la cadena de vértices del poliedro convexo hasta llegar al óptimo.

C) Uno de los métodos más populares son los *algoritmos golosos* o devoradores, que construyen paso a paso la solución buscando el máximo beneficio en cada paso.

La traducción del término inglés “greedy”, para estos algoritmos, ha sido glotón, voraz, goloso, avaro, ávido. El glotón no hace selección de los bocados que engulle; sin embargo, la mayoría de los algoritmos greedy sí seleccionan en cada una de las etapas. La característica de los algoritmos glotones reside en el hecho de que la solución aproximada a la que conducen se obtiene, en cada etapa, mediante una elección sobre la que no se volverá en adelante. La concepción del algoritmo glotón consiste, por un lado, en obtener rápidamente una solución, pero sin elegir la solución efectuando elecciones demasiado rápidas cuyas consecuencias puedan ser desastrosas.

Al camino más corto que interconecte puntos de una red se le denomina *árbol de conexión mínima*. Existen muchos métodos para construir un árbol que conecte todos los puntos de una red. Uno de los más sencillos lo publicó en 1956 Joseph B. Kruskal. Empieza por hallar dos puntos cuya separación sea mínima y conectarlos. Si hubiera más de dos puntos igualmente próximos, se elige un par cualquiera de ellos. Se repite el procedimiento con los puntos restantes, de tal modo que al unir un par nunca se forme un circuito. El resultado final es un árbol de conexión mínima, también llamado *generador* o de *extensión mínima* y el procedimiento empleado en un ejemplo de algoritmo goloso.

No necesariamente, el árbol de conexión mínima es la red mínima que une un conjunto de puntos; si fuese posible añadir nuevos puntos a la red, en la mayoría de los casos, se pueden encontrar redes más cortas. A los puntos que se añaden a la red para que ésta se acorte se les conoce como puntos de Steiner. Para saber dónde localizar esos puntos de Steiner se recurre a soluciones experimentales con películas jabonosas. Una vez más, los matemáticos copian a la naturaleza.

Los humanos han estado durante milenios cruzando y seleccionando semillas en busca de mejores cosechas. A John H. Holland se le ocurrió aplicar estos métodos a los programas informáticos. Los algoritmos que evolucionan simulando la selección natural están dando buenos resultados desde 1980, y hoy son una de las líneas de investigación más florecientes.

D) Los *algoritmos genéticos* son unos procedimientos muy generales que intentan imitar la evolución de los individuos de una especie en un determinado medio. Para su aplicación a la resolución de un problema de optimización, es necesario codificar de forma conveniente el problema.

En general, la evolución se produce por dos procedimientos: la selección y la recombinación de los cromosomas que almacenan las características de la especie. Este último proceso tiene lugar durante la reproducción de los individuos, o cuando sufren algún tipo de mutación. En la fase de selección, aquellos individuos más adaptados o adecuados al medio sobreviven. En la reproducción, los individuos intercambian material genético, y si ocurre la mutación, se altera la información de los cromosomas.

Para que un algoritmo genético comience a operar se representan las soluciones del problema considerado a través de una apropiada codificación, se define un operador genético de cruce que, al actuar sobre dos soluciones, suministre otras dos, y un operador de mutación que altere parte de una solución para producir otras. En la naturaleza el proceso ocurre sobre una generación, y luego sobre su descendencia, mientras en el subconjunto de soluciones de un problema el algoritmo opera en cada iteración que realiza el ordenador.

Iteración y recurrencia son claves en computación. La noción de recurrencia podría imaginarse así: se considera resolver el problema en un caso algo más sencillo, tal vez se pueda utilizar esa solución para el caso más complejo. Así resolvemos, por ejemplo, el problema de las torres de Hanoi. El famoso juego de las torres de Hanoi consiste en tener discos colocados por tamaño en una torre “origen”. Y se trata de pasarlos a una torre “destino”, pero de forma que en ningún momento quede un disco colocado sobre otro de tamaño inferior, para los que se emplea temporalmente una tercera torre de “trabajo”. Si supiéramos resolver este problema para $n-1$ discos, también seríamos capaces de resolverlo para n .

E) La recurrencia supone la inclusión en un procedimiento del propio procedimiento. Así, la aplicamos al factorial de un número: $n! = n \cdot (n-1)!$.

Los *algoritmos recursivos* se utilizan para problemas que puedan ser descompuestos en sucesión de acciones en que cada una es un subproblema similar al problema de origen. La recursividad en programación de ordenadores indica que un programa se llama a sí mismo. Ello ofrece la oportunidad de contemplar cómo evolucionan los cálculos de forma dinámica.

Las relaciones recursivas son una de las formas más simples de resolver problemas de conteo. También se pueden aplicar en contextos geométricos, y en particular para fractales.

Una clase especial de relación recursiva que surge con frecuencia en el análisis de algoritmos para implementar en el ordenador, son los algoritmos que utilizan la técnica de “divide y vencerás”.

La técnica reina representativa de la recursividad es la *programación dinámica*, que se rige por el Principio de Optimalidad de Bellman, 1957. El principio de optimización puede resumirse así: “toda subpolítica de una política óptima es también óptima” o “todo subcamino de un camino óptimo es también óptimo”. El ahorro de cálculos que se pretende con la programación dinámica proviene de que no se toma en cuenta, en cada iteración, más que la expresión de la subpolítica o estrategia óptima determinada para las fases exploradas hasta ahí. Se sabe que llegamos así a una política óptima y que se necesita un recorrido en sentido contrario para encontrar de forma explícita las decisiones y los estados correspondientes a esta política óptima.

Una de las primeras formas en que aparecen originalmente las relaciones recursivas es en el desarrollo de la teoría de ecuaciones en diferencias, pariente matemático de las ecuaciones diferenciales. Precisamente es otro de los campos de la matemática que ha resurgido con la llegada del ordenador.

III. Matemáticas para todos

Sociedad

Las necesidades básicas del hombre, en una sociedad desarrollada económicamente, comprenden las *necesidades físicas*, como son salud, alimentación, vivienda y vestido; y las *necesidades sociales*, como educación, trabajo, libertades individuales y posibilidad de participar en el sistema social existente.

La educación en los países de nuestro entorno ocupa un lugar prioritario y comparte lugar con otras preocupaciones como el empleo, la incorporación de los jóvenes a la vida activa, la protección social o la conservación del medio ambiente.

En muchos lugares la preocupación por la mejora de la calidad de la enseñanza ha llevado a abrir las puertas de los centros escolares al mundo exterior, para alejar el peligro de separación entre la escuela y la vida real. Esto ha llevado a convocar jornadas de puertas abiertas, días de convivencia, excursiones con padres, alumnos y profesores, presencia de todos los colectivos implicados en los órganos de decisión... Existe otro hecho clave, la posibilidad de elegir centro escolar, no sólo por cercanía a la vivienda familiar, sino por la calidad y eficacia de la acción educativa.

El tema del empleo, cuando el número de puestos de trabajo disminuye, es muy sensible a las deficiencias del sistema educativo.

En una sociedad mercantilista, las reglas del juego vienen determinadas por la rentabilidad económica.

He oído a distinguidos profesores señalar que en España la matemática tiene un papel formativo, en países como Estados Unidos, la matemática se enseña porque es útil.

Los contenidos de un ciudadano del siglo XX no pasan por dominar las cuatro reglas. Hay que redescubrir el valor de las matemáticas. Queremos que nuestros estudiantes sean reflexivos, críticos, con mentalidad abierta.

Es común hoy en día recalcar la conexión del proceso de enseñanza con el entorno, la vida real y los acontecimientos que en ella transcurren.

Conectar la matemática con la vida de la calle: geometría con la ciudad; combinatoria, códigos en los deportes; representaciones, mapas en los viajes..., horarios de autobuses y trenes, recorridos por una ciudad siguiendo el esquema del metro o de las líneas de autobús, parece que podría mejorar el "ranking" de las matemáticas en relación con otras materias..

Todas estas últimas frases son frecuentes en el ámbito educativo. Pero una cosa son las intenciones y otra, muy distinta, la realidad.

Cambios

Se tiene miedo a introducir cambios. Dar datos y analizar temas reales exige trabajo extra del profesor y, lo que es más conflictivo, el sistema de evaluación con un examen tradicional no vale.

Es general, sería deseable que el profesor tenga una formación más amplia, que no domine sólo las matemáticas. Por otro lado, es frecuente que en algunos países el profesor de matemática imparta también otras materias.

Existe cierto miedo a los cambios en el currículum, influyendo en esta actitud lo que ocurrió con la reforma de la "matemática moderna". Teóricamente como ésta fracasó, cualquier cambio que se realice también puede fracasar.

Sabemos que existen temas obsoletos y aburridos pero que, como tradicionalmente han estado presentes, nadie se atreve a quitar.

A veces se realizan innovaciones, pero cuando la propuesta llega al aula ya está desfasada. Un ejemplo lo tenemos con la estadística y el contraste de hipótesis, que ahora se incluye en el currículum del bachillerato. Esta es una técnica que se diseñó cuando aún no existían ordenadores, por lo que se reduce a aceptar o rechazar algo. Hoy el análisis exploratorio de datos permite sacar más información. Ocurre que la unidad experimental da más información que el dato.

Hay temas que se imparten pero carecen de interés para el alumno, porque en ese momento éste no llega a percibir una utilidad al arduo trabajo que realiza. Puede ser el caso de los logaritmos. Su mayor utilidad, los cambios de escala, los alumnos la desconocen. Sin embargo, fenómenos como los movimientos sísmicos y la escala de Richter para medir su magnitud ofrece una buena oportunidad de manejo real de los logaritmos.

Qué matemática es la útil para el futuro es difícil de precisar. Pero sí sabemos para qué temas la forma de enseñanza tiene que cambiar. Por ejemplo, el estudio de la gráfica de una función.

Mucha de la matemática (derivada, integrales...) que se ha venido desarrollando en los currículum se justificaba por su utilidad en la física.

Matemática útil en economía, en ciencias sociales, apenas está presente en el currículum. El desequilibrio entre matemática continua y discreta es evidente.

Al profesor Miguel de Gúzman le he oído comentar en una conferencia cómo los problemas que le resultaban interesantes, en los que necesitaba hacer algún razonamiento para poder resolverlos, eran los que en los exámenes de selectividad corresponden a las opciones C y D, propias de las especialidades “de letras”. Este profesor considera oportuno incluir en la enseñanza aspectos de la matemática discreta.

Los cambios científicos, tecnológicos y metodológicos hacen difícil predecir cuáles han de ser los conocimientos que cualquier joven necesitará al concluir su etapa educativa. Pero nadie duda que precisará una sólida preparación matemática.

Las claves por la que parecen moverse los cambios pasan por matemática realista, modelización y temas transversales.

Buscar un punto de equilibrio entre los objetos matemáticos y la matemática en contextos reales parece una tarea ardua pero necesaria. El *Instituto Freudenthal* con sus trabajos en “matemática realista” es un buen exponente del trabajo a realizar.

Diversas instituciones y colectivos han lanzado propuestas de objetivos que deben ser cubiertos por las matemáticas pensando en un ciudadano medio. Siento especial predilección por 50 objetivos concretos que publicó Claudi Alsina en el número 1 de la revista UNO. Esos 50 objetivos, el profesor Alsina los agrupa en ocho temas:

- Cuerpo humano y salud,
- Naturaleza y ecología,
- Economía,
- Vivienda,
- Consumo comercial,
- Medios de transporte y servicios,
- Tecnología normal, y
- Educación para la paz y la democracia.

Es evidente que cualquiera de los temas anteriores tratados de forma transversal supondrían una gran riqueza en la formación del alumno, aunque suponen para el profesor un trabajo que hoy se consideraría extra.

Aporto una muestra de esa dificultad que supone preparar temas transversales. La Comunidad Europea ha pasado a formar parte del currículum de nuestros escolares. Sus orígenes, los países que la integran, los órganos de gobierno..., pueden encontrarse en los textos que utilizan los escolares.

Los estudiantes saben que existe un instituciones europeas que tienen su sede en Estrasburgo y Bruselas. Sin embargo, para entender las resoluciones que se toman en algunas de esas Instituciones son necesarios conceptos como mayoría simple, cuota, veto, coalición, coalición ganadora, coalición de bloque... Para trabajar estos conceptos hay que conocer la distribución de pesos entre los distintos países, pero esto no viene en los libros de texto.

Queremos formar ciudadanos críticos, pero, con frecuencia, se encubren los datos relevantes. ¿Sabemos acaso los españoles qué ponderación tiene nuestro país en los distintos organismos de que consta la Comunidad Europea?

Conclusiones

Divulgar la matemática no es una tarea fácil. No se ha hecho bien, ni por parte de los investigadores, ni por los enseñantes. No hemos sabido vender, es necesario “marketing” de más calidad.

Hay facetas de la matemática actual que no tienen un lugar en el currículum. La matemática que se enseña no tiene por qué ser obsoleta. Los matemáticos de este siglo son unos desconocidos.

Está bien conocer la historia, pero también se debería conocer el presente y la matemática de las últimas décadas.

Hay que incorporar a la enseñanza de la matemática programas como *Derive* o *Cabri*, pero también sería necesario contrastar qué matemática es útil en la sociedad actual. La matemática que se utiliza para resolver problemas en industria, economía, ciencias sociales, la matemática que se implementa en los programas de ordenador ha de ser conocida por el profesorado que imparte matemáticas.

Mi intención al escribir estas líneas ha sido provocar una reflexión personal y compartir mi propia preocupación con otros compañeros. En el proceso de redacción última de estas meditaciones pude comprobar como muchas de mis anotaciones coincidían con uno de nuestros profesores más internacionales, Miguel de Guzmán, presidente de la Comisión Internacional de Educación Matemática, ICMI (véase en esta misma Revista, volumen 32, 1997).

María Candelaria Espinel Febles es Profesora Titular de Universidad de Didáctica de las Matemáticas en la Universidad de La Laguna. Mail: mespinel@ull.es