

Modelagem Matemática: uma análise do conhecimento matemático para o ensino

Eleni Bisognin¹

Vanilde Bisognin²

Resumo: Neste artigo, são relatados resultados parciais de uma pesquisa desenvolvida sobre conhecimentos necessários a um professor para ensinar Matemática. Para tanto, realizou-se uma atividade com professores em formação continuada, matriculados em um curso de Mestrado em Ensino de Matemática, para verificar se há indícios da construção de tais conhecimentos, usando a estratégia da Modelagem Matemática. Para analisar se essa estratégia favorece a construção de conhecimentos necessários para o ensino, elencamos categorias de análise e respectivos indicadores seguindo o modelo teórico de Deborah Ball e colaboradores. O levantamento de dados foi feito por meio das produções escritas dos professores, das gravações em áudio e de uma entrevista feita ao final do desenvolvimento da atividade. Dos resultados analisados, pode-se inferir que há indícios de que essa estratégia de ensino favorece a construção tanto de conhecimentos comum e especializado do conteúdo, quanto de conhecimentos do ensino e dos alunos, todos necessários para ensinar Matemática.

Palavras-chave: Conhecimento Matemático para o Ensino. Modelagem Matemática. Formação Continuada de Professores.

Mathematical Modeling: an analysis of mathematical knowledge for teaching

Abstract: In this work it is reported the partial results of a research developed on the knowledge needed from a teacher to teach Mathematics. For this purpose, an activity was developed with teachers in continuing education, who were participating in a Master's course in Teaching of Mathematics, in order to verify if there are signs of building such knowledge using the strategy of Mathematical Modeling. For analyzing whether this strategy favors the construction of the necessary knowledge for teaching, categories of analysis and respective indicators were listed, following the theoretical model of Deborah Ball and collaborators. The data collection was done through the teachers' written productions, audio recordings and an interview at the end of the activity's development. It is possible to infer, from the results analyzed, that there are indications showing that this teaching strategy favors the construction of both common and specialized knowledge of the content, as well as knowledge of the teaching and the student's, all necessary to teach Mathematics.

Keywords: Mathematical Knowledge for Teaching. Mathematical Modeling. Continuing Teacher Training.

¹ Doutora em Matemática. Professora do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Franciscana (UFN). Rio Grande do Sul, Brasil. ✉ eleni@ufn.edu.br  <https://orcid.org/0000-0003-3266-6336>.

² Doutora em Matemática. Professora do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Franciscana (UFN). Rio Grande do Sul, Brasil. ✉ vanilde@ufn.edu.br  <https://orcid.org/0000-0001-5718-4777>.

Modelización Matemática: un análisis del conocimiento matemático para la enseñanza

Resumen: En este artículo se reportan resultados parciales de una investigación que desarrollamos sobre los conocimientos necesarios a un docente para enseñar matemáticas. Para eso, desarrollamos una actividad con docentes en formación continua, matriculados en un curso de Maestría en Enseñanza de las Matemáticas para comprobar si existe evidencia de la construcción de dicho conocimiento utilizando la estrategia de Modelización Matemática. Para analizar si esta estrategia favorece la construcción de conocimientos necesarios para la enseñanza, enumeramos categorías de análisis y respectivos indicadores siguiendo el modelo teórico de Deborah Ball y colaboradores. La recolección de datos se realizó a través de las producciones escritas de los profesores, de las grabaciones de audio y una entrevista realizada al final del desarrollo de la actividad. De los resultados analizados se podemos inferir que existen indicios de que esta estrategia de enseñanza favorece la construcción de conocimientos tanto comunes como especializados de los contenidos, así como conocimientos de la enseñanza y de los estudiantes, todos necesarios para enseñar Matemáticas.

Palabras clave: Conocimiento Matemático para la Docencia. Modelización Matemática. Formación Continua de Profesores.

Introdução

Os resultados das avaliações realizadas em larga escala por alunos da Educação Básica na área de Matemática como, por exemplo, o Exame Nacional do Ensino Médio-ENEM, o PISA, entre outros, mostram que é necessário melhorar a qualidade do ensino. Dessa forma, é necessário enfrentar essa realidade, investigando-se a problemática imbricada na aprendizagem. Contudo, entende-se que identificar o problema do baixo rendimento dos alunos e fornecer uma solução para ele são coisas diferentes. De um lado, há educadores matemáticos que apontam soluções na direção da valorização da carreira docente, melhorias das condições de trabalho dos professores, mudanças do currículo, etc. De outro lado, porém, são poucas as pesquisas que apontam a preocupação que atenta para a melhoria da prática de ensino dos professores. Ou seja, parte-se do princípio que se exigimos uma aprendizagem eficaz é necessário, também, um ensino eficaz. Isso remete à seguinte questão: quais conhecimentos o professor deve ter para ensinar Matemática de modo eficaz? Que tipo de oportunidades de aprendizagem os cursos de formação inicial ou continuada podem propiciar para apoiar o desenvolvimento do conhecimento dos professores para ensinar Matemática?

Para tentar responder a essas questões, diferentes pesquisadores da área da Educação e da Educação Matemática, tais como Shulman (1986), Ribeiro (2012), Ribeiro e Machado (2009), Ball Thames e Phelps (2008), Stylianides e Ball (2004), Gama e Fiorentini (2009), têm dado atenção tanto aos estudos sobre os conhecimentos para o

ensino que o professor deve ter, quanto à busca de diferentes metodologias para ensinar Matemática. Sobre o primeiro tópico, desde a década de oitenta, Lee Shulman (1986) chamou a atenção para aspectos importantes que devem ser abordados na formação do professor e que estão relacionados ao domínio do conhecimento que ele deve ter na sua atividade cotidiana da sala de aula: o conhecimento do conteúdo matemático e o conhecimento pedagógico do conteúdo.

Sobre o segundo aspecto, nos últimos tempos, muitas pesquisas foram desenvolvidas, entre elas destacamos os trabalhos de Almeida, Araújo e Bisognin (2011), Almeida, Silva e Vertuan (2012), Barbosa, Caldeira e Araújo (2011), Brandt, Burak e Klüber (2011), Meyer, Caldeira e Malheiros (2011). Tais investigações abarcaram um olhar sobre as contribuições que a Modelagem Matemática pode propiciar na construção do conhecimento que o professor precisa ter para ensinar Matemática.

Ao se trabalhar em cursos de formação de professores, tem-se desenvolvido pesquisas com a preocupação de buscar algumas respostas para as questões relacionadas com o ensino da Matemática e a Matemática necessária para ensinar. Entende-se que os professores precisam estar atentos para o fato de que, além de necessitarem possuir conhecimentos matemáticos é imprescindível possuírem um vasto repertório de formas de representar ideias e processos matemáticos, de modo a tornar os diferentes conteúdos compreensíveis aos seus alunos. Dessa forma, oportunizarão aos estudantes a exploração dos conteúdos com compreensão, para que não sejam meros reprodutores de um conjunto de regras e procedimentos que levam somente à memorização.

Pesquisas na área de Educação Matemática como em Kaiser, Blomhøj e Sriraman (2006), Sriraman e Lesh (2006), Biemiengut e Hein (2007), Almeida, Silva e Vertuan (2012), Klüber (2012), Niss, Blum e Galbraith (2007), Kaiser, Schwarz e Tiedemann (2010), Blum (1995), Rojas, Flores e Carrillo (2015), Sant'ana e Serpa (2020), Nunes, Nascimento e Sousa (2020), entre outros, mostram que muitos professores têm concentrado esforços no uso da Modelagem Matemática e nas oportunidades que esta estratégia de ensino oferece para o desenvolvimento de novas ideias, conhecimentos e habilidades matemáticas. Entende-se que o uso eficaz da Modelagem Matemática nas aulas depende da boa condução do processo de ensino pelos professores, assim é importante saber sobre a natureza do conhecimento dos professores para usar a Modelagem Matemática e como esse conhecimento se manifesta.

Neste trabalho, pretende-se refletir sobre quais conhecimentos são mobilizados pelos professores em formação continuada ao trabalharem em atividades de Modelagem

Matemática, e como esses docentes constroem seus saberes e desenvolvem as habilidades necessárias para o ensino dos conteúdos. De acordo com este propósito, debruçou-se sobre o relato de uma atividade desenvolvida seguindo os pressupostos da Modelagem Matemática, realizada com professores de um Curso de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática para identificar esses conhecimentos necessários para ensinar. Para atingir este objetivo, elencaram-se categorias com seus respectivos indicadores com vistas a perceber indícios sobre a construção desses conhecimentos.

O Conhecimento Matemático para o Ensino e a Modelagem Matemática

Atualmente, nos cursos de formação de professores, há muitas preocupações sobre o conhecimento e as habilidades que os professores devem ter para ensinar Matemática e como essas questões afetam essa tarefa de ensino.

Nas pesquisas na área da Educação Matemática, encontra-se um número crescente de trabalhos como em Niss, Blum e Galbraith (2007), Kaiser, Blomhøj e Sriraman (2006), Kaiser, Schwarz e Tiedemann (2010), Blum (1995), Rojas, Flores e Carrillo (2015), Carreira (2017), Carreira, Baioa e Almeida (2020), que focam na Modelagem Matemática como uma forma de desenvolver novos conhecimentos e habilidades nos alunos. De acordo com esses autores, o uso eficaz da Modelagem Matemática nas aulas depende das competências dos professores para trabalhar com essa metodologia. Niss, Blum e Galbraith (2007) destacam que a qualidade do trabalho com os alunos na sala de aula, depende da qualidade dos conhecimentos, das experiências, das habilidades e atitudes dos professores. O conhecimento matemático que os professores têm, ou deveriam ter, para desenvolver sua tarefa de ensino é de suma importância para sua eficácia.

Rojas, Flores e Carrillo (2015) apontam a importância de se perceber o grau de conhecimento do professor sobre a Matemática, o qual se manifesta na ação de ensinar para valorizar o seu desenvolvimento profissional e para aprofundar o conhecimento matemático para ensinar Matemática. Ademais, Ribeiro e Machado (2009) colocam que experiências identificadas a partir da própria prática dos professores podem levá-los a compreender as diferentes situações que enfrentam no seu trabalho docente.

Sobre o conhecimento profissional dos professores temos a contribuição de Schulman (1986,1987), o qual destaca a importância do conhecimento do conteúdo para o ensino e a diferença do conhecimento que outros profissionais têm a respeito do conteúdo.

Schulman (1986) afirma que há a necessidade de um conhecimento pedagógico voltado para o ensino, que estabeleça um elo entre o conhecimento do conteúdo específico

a ser abordado e o processo de ensinar esse conteúdo. Ao professor, portanto, não é suficiente conhecer o conteúdo que vai ser ensinado, mas é fundamental possuir um conhecimento que possibilite torná-lo significativo aos seus alunos. Essa habilidade compreende assim, as formas de representar o conhecimento ao ensinar: ilustrações, exemplos, modelos, conjecturas e demonstrações, ou seja, a sequência didática que o professor adota ao ensinar.

Ao justificar a importância das ideias de Shulman, os autores Ball, Thames e Phelps (2008) afirmam que o trabalho do professor tem um efeito sobre o desempenho dos estudantes e que este, por sua vez, depende da capacidade do professor de entender, compreender e utilizar o conhecimento para bem desempenhar as funções de ensinar.

Sobre o conhecimento do conteúdo, Shulman (1986) identifica três categorias: o conhecimento do conteúdo da disciplina, o conhecimento pedagógico do conteúdo e o conhecimento curricular. O autor considera que o segundo “representa a articulação entre conteúdo e pedagogia em uma compreensão de como tópicos específicos, problemas ou questões são organizados, representados e adaptados aos diversos interesses e habilidades dos aprendizes e apresentados no ato de ensinar” (SHULMAN, 1986, p. 8).

Apoiando-se nos textos de Shulman, os autores Ball, Thames e Phelps (2008, p. 399) definem “conhecimento matemático para o ensino”, como “o conhecimento matemático necessário para desenvolver as tarefas recorrentes de ensinar matemática para os alunos”. Enfatizam a importância de investigar quais conhecimentos o professor necessita para o bom desempenho de seu papel como docente.

Ao tratar do conhecimento matemático para o ensino, Ribeiro (2012) enfatiza que Ball e colaboradores explicitam a sua preocupação

[..] em identificar, na prática do professor, quais são esses conhecimentos que eles devem – ou deveriam – dominar para desenvolver de maneira eficaz a sua “tarefa” de ensinar. Além disso, eles evidenciam ainda a necessidade de buscarem na prática do professor quais são esses conhecimentos, retornando em seguida para a prática do professor, e avaliando a eficácia dos conhecimentos por eles identificados (RIBEIRO, 2012, p. 8).

Ball, Thames e Phelps (2008) consideram que o conhecimento do conteúdo, apontado por Shulman, pode ser subdividido em duas categorias: conhecimento comum do conteúdo e conhecimento especializado do conteúdo. E que o conhecimento pedagógico do conteúdo pode ser dividido em conhecimento do conteúdo e dos estudantes e conhecimento do conteúdo e do ensino.

Ao caracterizar cada categoria, Ball, Tames e Phelps (2008, p. 399) definem o conhecimento comum do conteúdo como: “o conhecimento matemático e as habilidades usadas em outros cenários que não os do ensino”. Portanto, são conhecimentos necessários para o ensino, mas não exclusivos do professor. Por exemplo, saber o conteúdo que vai ser ensinado, reconhecer definições inadequadas apresentadas em livros-texto, usar termos e notações corretas.

O conhecimento especializado do conteúdo é formado pelos conhecimentos e habilidades matemáticas exclusivas do professor como, por exemplo, identificar os erros dos alunos ou avaliar as possibilidades de usar alguma abordagem específica para ensinar determinado tópico. O conhecimento do conteúdo e dos estudantes combina o conhecimento dos estudantes com o da Matemática como, por exemplo, antecipar o que os alunos vão pensar sobre um assunto e quais obstáculos podem encontrar.

Finalmente, o conhecimento do conteúdo e do ensino permite ao professor, por exemplo, planejar as atividades de ensino, escolher as metodologias e os exemplos que melhor se adaptam ao conteúdo em questão.

Nesse trabalho, as reflexões são no sentido de estabelecer conexões entre as categorias elencadas por Ball e colaboradores, e analisar se a Modelagem matemática propicia a construção desses conhecimentos.

Pesquisadores, como Yenmez *et al.* (2017), consideram que ensinar Matemática por meio da Modelagem torna o ensino motivador e significativo, porque o aluno participa da construção dos conceitos e procura respostas às questões e conjecturas por ele levantadas. Levando-se em conta as etapas da Modelagem indicadas por Burak (2004), quais sejam: escolha do tema; pesquisa exploratória; levantamento dos problemas; resolução dos problemas e o desenvolvimento da Matemática relacionada ao tema; análise crítica das soluções; consideramos que a Modelagem Matemática oportuniza ao professor buscar temas atuais e formular problemas desafiadores e significativos; buscar os melhores exemplos e analogias, compreender o conteúdo específico para solucionar os problemas e analisar as soluções. Nessas tarefas, destacam-se a necessidade de o professor dominar o conteúdo da disciplina e a forma como deve trabalhar este conteúdo em sala de aula. Como coloca Shulman (1986), para ser um instigador da aprendizagem de seus alunos,

o professor precisa entender não somente que algo é assim, mas também porque é assim. [...] além disso, nós esperamos que o professor entenda porque um dado tópico é particularmente central para uma disciplina enquanto que um outro pode ser periférico (SHULMAN, 1986, p. 9).

Assim, em um trabalho com Modelagem Matemática, o professor precisa dominar o conteúdo, visto que a busca de soluções para o problema pode envolver tópicos variados de Matemática, mas também precisa saber como desenvolver os assuntos que surgirem, já que alguns deles podem ser fundamentais para a aprendizagem da Matemática e precisam ser aprofundados durante o trabalho realizado.

Caminhos Metodológicos

Os resultados parciais apresentados nesse trabalho fazem parte de uma pesquisa mais ampla sobre o conhecimento necessário ao professor para ensinar Matemática. Essa experiência com a Modelagem Matemática foi desenvolvida com nove professores em formação continuada, participantes de um curso de mestrado em Ensino de Matemática na disciplina de Fundamentos de Matemática. A metodologia utilizada em sala de aula foi a Modelagem Matemática. Para esse estudo, a turma foi dividida em três grupos compostos de três professores. Cada grupo escolheu um tema para ser trabalhado em sala de aula.

Aqui relata-se a experiência desenvolvida pelo Grupo 2, composto pelos professores A_1 , A_2 , A_3 , que escolheu como tema a segurança no trânsito. Os instrumentos utilizados para levantamento dos dados foram as respostas escritas dos professores, as observações da professora pesquisadora em seu diário de campo e os relatos e conversas dos professores durante o desenvolvimento da atividade que foram gravadas em áudio.

Para análise dos resultados, foram elaboradas categorias de análise com os respectivos indicadores, conforme Quadro 1 a seguir, para verificar se houve indícios da construção de conhecimentos por parte dos professores ao desenvolverem uma atividade de Modelagem Matemática. A escolha das categorias de análise, bem como de seus indicadores foi baseada em Hurrel (2013, p. 58) considerando as orientações de Ball, Thames e Phelps (2008).

Quadro 1: Categorias de análise e indicadores

Categorias	Indicadores
Conhecimento Comum do Conteúdo	Usar termos e notações corretas; Reconhecer uma definição ou informações imprecisas; Resolver corretamente os cálculos matemáticos; Resolver corretamente os problemas matemáticos.
Conhecimento Especializado do Conteúdo	Apresentar ideias matemáticas; Reconhecer e explicar representações específicas do conteúdo; Estabelecer conexões entre as representações;

	<p>Modificar tarefas para facilitar ou para aprofundar o conteúdo;</p> <p>Usar linguagem e simbologia apropriadas;</p> <p>Fazer perguntas e selecionar exemplos adequados e motivadores;</p> <p>Estabelecer conexões entre os tópicos da Matemática.</p>
Conhecimento do Conteúdo e dos Alunos	Prever se as tarefas estão adequadas ao nível do conhecimento dos alunos.
Conhecimento do Conteúdo e do Ensino	Selecionar exemplos para aprofundar o conteúdo matemático dos alunos.
Conhecimento do Conteúdo e do Currículo	Articular o currículo com o conteúdo abordado.

Fonte: Hurrel (2013, p. 58), adaptado pelas Autoras

Para cada categoria estabelecemos indicadores que nos permitem identificar que conhecimentos são possíveis de observarmos a partir do desenvolvimento das etapas da Modelagem Matemática em sala de aula.

Análise dos Resultados

Neste tópico, apresentam-se e discutem-se os dados levantados nesta pesquisa. Para isso, analisam-se as respostas dos professores da atividade proposta e busca-se estabelecer relações com suas falas durante o desenvolvimento das etapas da Modelagem Matemática.

O primeiro passo consistiu na escolha do tema, sendo que o grupo 2 escolheu a segurança no trânsito. Ressalta-se que, no momento em que o grupo fez a escolha do tema, houve discussões acaloradas e foi possível observar que os alunos mobilizaram tanto conhecimentos prévios comuns como, por exemplo, o levantado pela professora A3 que afirmou que o excesso de carros nas ruas é fruto do alto poder aquisitivo da população nos últimos tempos, quanto conhecimentos especializados como quando todos conseguiram perceber que poderiam criar várias situações-problema para compreender melhor o tema. É importante salientar que, neste momento, as perguntas e questões colocadas pela professora pesquisadora tinham como propósito estimular os alunos a pensarem.

Dessa forma, é importante que os acadêmicos escolham um tema de seu interesse e relacionado às suas vivências. Isso ajuda-os a compreender os fatos que ocorrem a sua volta, bem como oportuniza-lhes que o conhecimento construído possa ser aplicado às suas ações além de facilitar a compreensão do conteúdo. Essa etapa da Modelagem

Matemática propicia um elo entre o conhecimento escolar e a vida cotidiana dos alunos.

A questão central proposta pelo grupo foi a seguinte: qual a distância segura que se deve manter de um carro a nossa frente? O questionamento levantado os levou a consultar *sites* na *internet* para, primeiramente, saber qual a velocidade permitida nas estradas.

Observando a agilidade com que os professores consultavam informações na *internet*, a professora pesquisadora questionou:

PQ: - Quais materiais vocês utilizam para preparar suas aulas?

A professora A3 manifestou-se dizendo: “- *Utilizo muitos recursos, porque tenho a preocupação de motivar o aluno para estudar e, assim, procuro usar um software como o Geogebra, diferentes livros didáticos e consulta à internet, procurando especialmente problemas que mostrem a utilidade da Matemática no dia a dia*”.

O depoimento da professora A3 evidencia um conhecimento curricular diversificado da Matemática, porque, ao preparar a aula, confirma que já estabeleceu a conexão com os problemas relacionados com o mundo real, que é o papel da Modelagem Matemática. Essa afirmação remete à conclusão de que ao introduzir um novo conteúdo matemático a professora tem a preocupação com a contextualização, cuja finalidade é dar sentido ao conteúdo. Assim, nesta situação de preparação de suas aulas, a professora mobiliza também o conhecimento dos estudantes.

Outra fonte de consulta do grupo foi o Código de Trânsito Brasileiro e nele consta que, na maioria das estradas nacionais, a velocidade máxima permitida é de 80km/h. Essa informação era conhecida de todos, pois os participantes do grupo eram proprietários de automóvel.

O interesse do grupo concentrou-se na busca de informações sobre a distância de parada de um veículo em andamento. Essa distância depende da distância de reação e da distância de frenagem. Pesquisando esses itens verificaram que a distância de reação é definida como a distância que o veículo percorre no intervalo de tempo desde que o motorista viu a situação de perigo, até o momento em que ele pisou no freio. A distância de frenagem é a distância que o carro percorre desde o momento que o freio foi acionado até a parada total do automóvel.

Portanto, a distância de parada é a distância que um veículo percorre desde que uma situação de risco foi identificada pelo motorista, pela decisão de parar, e pelo acionamento do freio até o veículo estar completamente parado. A distância segura em cada caso depende do tempo, da velocidade, das condições da via, do veículo, da visibilidade e da capacidade de reação do motorista. Essas informações permitiram ao

grupo escrever a equação $d_p = d_r + d_f$, em que d_p indica a distância de parada, d_r é a distância de reação e d_f é a distância de frenagem.

Durante as discussões, o grupo conseguiu estabelecer um modelo de forma correta, utilizando a interpretação dos conceitos e fazendo relações entre eles. Essas habilidades são fundamentais, pois deduzir e escrever uma equação matemática representativa da situação faz parte de um conhecimento especializado do professor.

A seguir, o grupo foi explicando o significado de cada termo. A distância de reação d_r depende do tempo de reação t_r do motorista, isto é, o tempo decorrido desde o instante que o motorista percebe o obstáculo e aciona o freio, e da velocidade do carro. Logo, obtiveram a proporcionalidade $d_r = t_r \cdot v$.

Reconhecer que esta equação representava uma proporcionalidade não foi imediata, mesmo porque o tempo de reação varia de pessoa a pessoa. Era necessário talvez, que o tempo fosse constante para que os professores identificassem uma proporcionalidade. Observou-se que os conhecimentos prévios dos professores interferiram na elaboração de conjecturas, deduções e na compreensão do conteúdo.

Com essas informações, a professora pesquisadora explicou que eles já haviam obtido o modelo matemático que permitia o cálculo da distância de reação, em função da velocidade do automóvel. A discussão entre os membros do grupo, posteriormente, foi sobre o tempo de reação. Na *internet* não havia um valor exato, mas indicava apenas um tempo médio de $\frac{3}{4}$ de segundo ou 0,75s. Desse modo, escreveram o modelo matemático $d_r = 0,75v$, que permitiu calcular a distância de reação em função da velocidade, considerando esse tempo médio de reação do motorista. Esses valores são mostrados no Quadro 2, a seguir.

Quadro 2: Valores médios da distância de reação em função do tempo de reação

Velocidade (Km/h)	0	30	40	50	60	70	80	90	100
Distância Média de Reação (m)	0	6,3	8,3	10,4	12,5	14,6	16,7	18,8	20,8

Fonte: Dados da Pesquisa

Um dos membros do grupo, a professora A_1 , fez a seguinte observação:

A_1 - *Olha, se esse modelo que obtivemos é uma proporcionalidade, então o gráfico deve ser uma reta.*

A_3 - *De fato gente, o modelo é uma função linear. Não tinha me dado por conta...sim vai dar uma reta...vamos fazer o gráfico.*

Esse diálogo entre os membros do grupo revela a percepção de um conhecimento

referente ao contexto, em que a função linear é estudada e o estabelecimento de relações conceituais e as diferentes representações desse conceito.

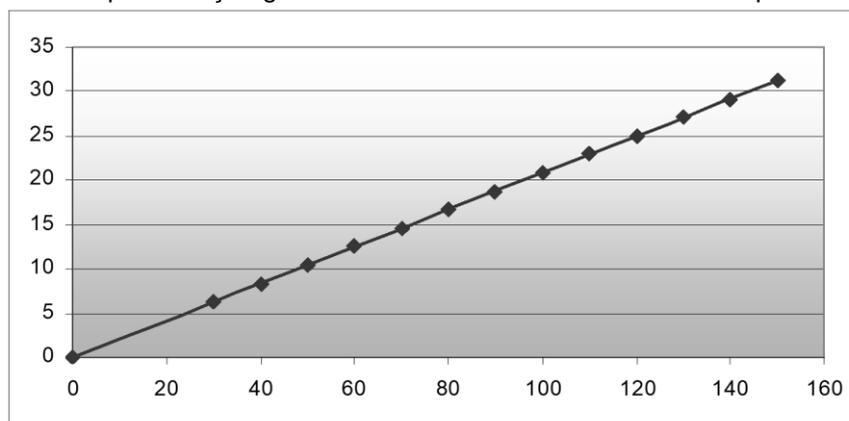
A₂ – Uma coisa interessante que observei depois que a professora nos falou sobre a proporcionalidade é sobre o coeficiente 0,75. Aqui ele é o coeficiente de proporcionalidade. Interessante, pois estou habituado a trabalhar com meus alunos de Física na escola com o movimento retilíneo uniforme, que tem uma expressão semelhante.

O professor A₂ conseguiu estabelecer conexões com suas aulas de Física e os conteúdos em que o conceito de proporcionalidade é trabalhado.

Sobre o conhecimento de proporcionalidade, foi possível observar que o grupo conseguiu estabelecer conexões com outros conteúdos, como os de Física, por exemplo, embora os alunos apresentaram dificuldade com o uso da linguagem matemática. Portanto, a situação-problema construída possibilitou uma discussão sobre esse importante conceito e, além disso, que retomassem, em suas discussões, como poderiam construir esse conceito com seus alunos.

A professora pesquisadora não interferiu nas discussões do grupo, mas ficou observando o grupo construir o gráfico representativo do modelo matemático da distância de reação em função da velocidade (Figura 1). Para isso, os professores utilizaram o Excel.

Figura 1: Representação gráfica do modelo matemático elaborado pelo Grupo 2



Fonte: Dados da Pesquisa

De modo geral, os professores privilegiaram a forma analítica do modelo matemático, mas nesse caso, a representação gráfica deu mais clareza e visibilidade à interpretação dos dados.

A professora A₁, analisando o gráfico, proferiu:

A₁ - Interessante, toda vez que vou trabalhar com a função linear eu enfatizo o significado do coeficiente angular da reta como a tangente do ângulo de inclinação, mas aqui o significado é o tempo de reação. Assim, é mais motivador para o aluno e mais

compreensível também.

Observamos que o grupo soube fazer uma pergunta clara e soube buscar informações na *internet* em *sites* ligados ao Departamento Nacional de Trânsito. Os professores conseguiram escrever um modelo matemático utilizando uma linguagem simbólica correta, além de construir diferentes representações do modelo, mesmo precisando inicialmente da ajuda da professora pesquisadora. Essas ações indicam que os professores do Grupo 2 conseguiram estabelecer conexões entre as representações e dar significado ao conteúdo. Há indícios de que a construção do modelo matemático propiciou a elaboração tanto de conhecimentos comuns do conteúdo quanto daqueles especializados do conteúdo, pois construir e interpretar diferentes representações são tarefas próprias da profissão de professor e não de outras profissões.

A professora A₁ voltou a manifestar-se:

A₁- Olha tudo isso que fizemos foi em relação à distância percorrida durante o tempo de reação, mas o carro ainda está em movimento. Esses valores não correspondem à distância de parada do automóvel. Precisamos verificar a distância de frenagem. Isso não tenho ideia. Quem sabe você (dirigindo-se ao professor A₂) pode pensar alguma coisa, pois você também trabalha com Física na escola, pode ajudar.

O professor A₂ relatou, então, que para parar o carro era necessário considerar muitas variáveis como, por exemplo, o tamanho e peso do carro, a situação dos freios, o atrito, situação da pista pois se era pista seca ou pista molhada, o atrito seria diferente. Após essas considerações, ele falou ao grupo:

A₂ - Olha, para parar o carro o que a Física nos diz é que precisamos imprimir uma força contrária ao movimento. Quando se freia o carro, essa força é produzida no sentido contrário ao do movimento.

A₁ - Sim, mas essa força deve depender da velocidade que o carro está andando.

A₂ - Claro, depende sim da velocidade. Agora, pelos princípios da Física, quando imprimimos uma força, temos sempre a relação: trabalho = força.deslocamento (o professor escreveu em seu caderno essa expressão). O trabalho tem por efeito tentar anular a energia cinética do carro...

A₃ - Ainda bem que temos um professor de Física no grupo!

A₁ - Mas esse deslocamento não é a distância que o carro percorre até parar?

A₂ - Sim, esse deslocamento é a distância.

A₃ - Então podemos dizer que o trabalho é a força multiplicada pela distância de frenagem.

A₂ – Sim, podemos escrever essa relação $T = F \cdot d_f$ e, mais ainda, se um carro tem massa m e está a uma velocidade v , então a energia cinética é dada por $\frac{1}{2} mv^2$ (falou o professor consultando um livro de Física). Então $T = \frac{1}{2} mv^2$, ou podemos dizer $\frac{1}{2} mv^2 = F \cdot d_f$. Aqui no livro diz que a força é proporcional à massa do carro.

Depois de discussões e pesquisas nos livros de Física e na *internet*, a professora A₁ manifestou seu entendimento.

A₁ - Percebi pessoal, se a força é proporcional à massa, então a distância é proporcional à velocidade ao quadrado. Fazendo a analogia com o que a professora colocou no caso anterior.

A₂ - Sim, concordo. Mas como vamos determinar essa distância?

Observamos a criatividade e a disposição do grupo em superar suas dificuldades. Foi observado também que o grupo conseguiu estabelecer conexões entre os conceitos de Física e de Matemática, levantar conjecturas e procurar respondê-las, esses são indícios da construção de conhecimentos especializados dos professores. Percebemos que à medida que obtinham mais informações o grupo se sentia mais seguro nas afirmações.

A₁ - Será que na internet não tem esses valores da distância de frenagem? Vamos dar uma pesquisada!

O grupo pesquisou nos sites relacionados ao Departamento de Trânsito e obtiveram valores tabelados, que são aproximações dos valores da distância de frenagem em função da velocidade. Esses valores são mostrados no Quadro 3.

Quadro 3: Valores aproximados das distâncias de frenagem

Velocidade (km/h)	0	30	40	50	60	70	80	90	100
Distância Média de Frenagem em Pista Seca (m)	0	12,8	17	21,3	25,5	29,8	34	39,3	42,5
Distância Média de Frenagem em Pista Molhada (m)	0	18,8	25	31,3	37,5	43,8	50	56,3	62,5

Fonte: Dados da Pesquisa

Tendo tabelado os valores, a professora A₃ falou que eles eram informativos, mas o grupo não sabia como descobrir o modelo matemático para obtê-los. A equipe ficou pensativa, conversou entre si e não viu uma saída. A professora A₃ sugeriu então:

A₃ – Bem, nós não sabemos determinar esse modelo, mas nós temos os valores da distância de reação e da distância de frenagem tanto em pista seca, como em pista molhada, basta somar esses valores.

Os colegas concordaram com ela e passaram a construir os quadros com os valores correspondentes. Os Quadros 4 e 5 mostram esses valores médios de parada total em pista seca e em pista molhada, respectivamente.

Quadro 4: Valores médios da distância de parada total em pista seca

Velocidade (km/h)	0	30	40	50	60	70	80	90	100
Distância Média de Reação (m)	0	6,3	8,3	10,4	12,5	14,6	15,7	18,8	20,8
Distância Média de Frenagem em Pista Seca (m)	0	12,8	17	21,3	25,5	29,8	34	39,3	42,5
Distância Média de Parada Total (m)	0	19,1	25,3	31,7	38	44,4	49,7	58,1	63,3

Fonte: Dados da Pesquisa

Quadro 5: Valores médios da distância de parada total em pista molhada

Velocidade (km/h)	0	30	40	50	60	70	80	90	100
Distância Média de Reação (m)	0	6,3	8,3	10,4	12,5	14,6	15,7	18,8	20,8
Distância Média de Frenagem em Pista Molhada (m)	0	18,8	25	31,3	37,5	43,8	50	56,3	62,5
Distância Média de Parada Total (m)	0	25,1	33,3	41,7	50	58,4	65,7	75,1	83,3

Fonte: Dados da Pesquisa

Apesar de os professores não conseguirem encontrar um modelo matemático, de forma analítica, que descrevesse os valores de parada total do automóvel, a conclusão da atividade os deixou muito eufóricos e realizados. Queriam logo saber o que a professora pesquisadora achava de suas descobertas.

A partir disso, observou-se que a Modelagem Matemática é uma estratégia de ensino que pode despertar o interesse e a motivação e, conforme Bassanezi (2002), quando aplicada ao ensino torna a Matemática mais dinâmica, propiciando mais eficiência no processo de ensino e aprendizagem. O mesmo autor ainda destaca

Mais importante do que os modelos obtidos são: o processo utilizado, a análise crítica e a sua inserção no contexto sociocultural. O fenômeno modelado deve servir de pano de fundo ou motivação para o aprendizado das técnicas e conteúdos da própria matemática. As discussões sobre o tema escolhido favorecem a preparação do estudante como elemento participativo na sociedade em que vive (BASSANEZI, 2002, p. 38).

A busca por um processo alternativo de solução para responder à pergunta de

pesquisa, indica que os professores foram capazes de levantar conjecturas, usar recursos tecnológicos e estabelecer relações, habilidades essas que mostram o conhecimento comum, o conhecimento especializado e, também, conhecimento sobre o ensino.

Ao final da atividade a professora pesquisadora entrevistou o grupo para verificar as impressões a respeito da atividade desenvolvida e da estratégia utilizada, como se observa a seguir.

Professora Pesquisadora: - *Quais as considerações de vocês a respeito do trabalho desenvolvido?*

A₂ – De minha parte eu aprendi muito, pois nunca pensei em trabalhar deste modo, relacionando conceitos de Física e de Matemática. Acho que posso trabalhar esse modelo com meus alunos do primeiro ano do Ensino Médio da escola, pelo menos quero tentar.

A₃ - Eu nunca tinha trabalhado com a Modelagem, já tinha visto alguns trabalhos, mas não tinha me animado a trabalhar em sala de aula. Acho que trabalhar desse modo é muito significativo para o aluno pois temos o modelo e temos o gráfico, o aluno consegue entender melhor.

A₁ – Como já havia me manifestado antes ao fazer o gráfico da distância de reação, mostrar para o aluno o significado do coeficiente já é um ganho pois em geral no livro-texto só tem o significado geométrico do coeficiente angular. Outro ponto interessante é deixar o aluno buscar as informações, como aqui em aula. Você estava vendo que não íamos para frente, mas não deu nenhuma resposta, só fez algumas perguntas para nos orientar. Assim o aluno aprende a buscar, pelo menos temos que dar essa oportunidade.

A₂ – Eu gostaria de ter tido na licenciatura experiências iguais a essa, trabalhar os conceitos fundamentais e também olhar como professor, como ensinar os conteúdos, como relacionar os conceitos. Se nós não vivenciamos fica difícil trabalhar dessa forma.

A partir das proposições apresentadas, pode-se inferir que os professores sabem adequar a tarefa ao nível dos alunos do Ensino Médio, identificar os possíveis obstáculos e exemplificar, para tornar o conteúdo mais compreensível para os estudantes. Fica claro, também, a percepção que eles têm de que o conhecimento para ensinar é diferente de um conhecimento comum do conteúdo. Todas essas considerações expressas, em suas falas, são indícios de que a Modelagem Matemática propicia a construção de conhecimentos para o ensino, levando em consideração o nível dos alunos e as articulações com o currículo.

Considerações Finais

Neste artigo, apresentaram-se e discutiram-se resultados de uma pesquisa que possibilitou analisar as características do conhecimento comum, do conhecimento especializado, do currículo e dos estudantes, reveladas por professores em formação continuada, tendo a Modelagem Matemática como estratégia de ensino.

As discussões e análises tomaram por base os dados produzidos durante a aplicação de uma atividade que possibilitou aos professores estabelecer conexões entre diferentes conteúdos da Matemática e outras áreas de conhecimento, especialmente a Física. Ao mesmo tempo, possibilitou que a professora pesquisadora identificasse como esses docentes reconhecem as possíveis dificuldades que seus alunos têm para modelar, demonstrando um conhecimento de seus alunos quando da escolha do tema.

Nesse sentido, conclui-se que, ao trabalhar com a Modelagem Matemática, é fundamental levar em consideração o contexto em que seus alunos vivem e os possíveis conhecimentos prévios que remetem ao conhecimento do currículo.

Da análise dos resultados obtidos, pode-se inferir que o tema escolhido pelo grupo para o trabalho com Modelagem propiciou a mobilização de diferentes conhecimentos, conforme as categorias elencadas e seus indicadores. Essa experiência mostrou que ser professor é uma tarefa complexa e que ele necessita tanto do conhecimento comum quanto do conhecimento especializado do conteúdo, além do conhecimento do ensino, do currículo e dos alunos com quem vai trabalhar. Perceberam-se fortes indícios de que a Modelagem Matemática contribuiu para construção desses conhecimentos. Além disso, foi possível identificar situações nas quais os professores afirmaram utilizar diferentes contextos quando estão propondo situações-problema ao prepararem suas aulas, com a finalidade de mostrar a aplicabilidade da Matemática e motivar os alunos para o estudo da mesma. Isso revela evidências de que a Modelagem Matemática possibilitou aos professores mobilizar não só os conhecimentos especializados do conteúdo, mas também conhecimentos dos alunos e do currículo.

Do relatado dos professores, percebeu-se que, para ensinar, não basta utilizar a Modelagem Matemática para construir um modelo e confrontá-lo com a situação real, é necessário construir outros conhecimentos, além do conhecimento comum do conteúdo. Todos eles são próprios do professor para desenvolver a tarefa de ensinar.

Os resultados obtidos nessa experiência apontam para o potencial da Modelagem Matemática e sua importância na construção de conhecimentos para o ensino da

Matemática e que os espaços ou os ambientes de aprendizagem, possibilitados por meio da aplicação dessa estratégia, devem ser considerados para que os professores possam construir os conhecimentos próprios de sua profissão.

Em continuidade do trabalho pretende-se complementá-lo a partir da observação dos professores, ministrando aulas com seus alunos. A interação com seus próprios alunos, certamente, poderá trazer novos elementos para a pesquisa na direção de identificar outros conhecimentos.

Referências

ALMEIDA, L. M. W.; ARAÚJO, J. L.; BISOGNIN, E. (Org.). **Práticas de Modelagem na Educação Matemática**. Londrina: EDUEL, 2011.

ALMEIDA, L. M. W.; SILVA, K. P.; VERTUAN, R. E. (Org.). **Modelagem Matemática na Educação Básica**. São Paulo: Editora: Contexto, 2012.

BALL, D. L.; THAMES, M. H.; PHELPS, G. Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special? **Journal of Teacher Education**, v. 59, n. 5, p. 389-407, 2008.

BARBOSA, J. C.; CALDEIRA, A. D.; ARAÚJO, J. L. (Org.). **Modelagem Matemática na Educação Matemática Brasileira: pesquisas e práticas educacionais**. Recife: SBEM, Biblioteca do Educador Matemático, 2007.

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática**. São Paulo: Contexto, 2002.

BIEMBENGUT, M. S.; HEIN, N. **Modelagem Matemática no Ensino**. 5a ed. São Paulo: Contexto, 2007.

BLUM, W. Applications and Modelling in mathematics teaching and mathematics education – some important aspects of practice and of research. In: SLOVER, C. et. al. **Advances and Perspectives in the Teaching of Mathematical Modeling and Applications**. Yorklyn: Water Street Mathematics, 1995, p. 1-20.

BRANDT, C. F; BURAK, D; KLÜBER, T. E. (Org.). **Modelagem Matemática: uma perspectiva para a Educação Básica**. Ponta Grossa: Editora UEPG, 2011.

BURAK, D. Modelagem Matemática e a Sala de Aula. In: ENCONTRO PARANAENSE DE MODELAGEM EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 1., 2004, Londrina. **Anais...** Londrina: UEL, 2004. 1 CD-ROM.

CARREIRA, S. Sublinhando resultados da investigação em modelação matemática e aplicações na aprendizagem. **Educação e Matemática**. APM; Lisboa, p. 44-49, 2017.

CARREIRA, S.; BAIÓIA, A. M.; ALMEIDA, L. M. W. Mathematical models and meanings by school and university students in a modelling task. AIEM - **Avances de Investigación en Educación Matemática**, v. 17, p. 67-83, 2020.

- GAMA, R. P., FIORENTINI, D. **Formação continuada em grupos colaborativos: professores de matemática iniciantes e as aprendizagens da prática profissional.** EMP, n. 11, p. 441-461, 2009.
- HURREL, D. P. What Teachers Need to Know to Teach Mathematics: An argument for a reconceptualised model. **Australian Journal of Teacher Education**, 38(11), 2013. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.14221/ajte.2013v38n11.3>. Acesso em: 15 out. 2019.
- KAISER, G.; SCHWARZ, B.; TIEDEMANN, S. Future Teachers' Professional Knowledge on Modeling. In: LESH, R.; GALBRAITH, P.; HAINES, C. R.; HURFORD, A. (Org.). **Modeling Students' Mathematical Modeling Competences**. New York: U.S.A., Springer, 2010.
- KAISER, G.; BLOMHØJ, M.; SRIRAMAN, B. Towards a didactical theory for mathematical modelling. v. 38, n. 2, **ZDM**, 2006.
- KLÜBER, T. E. (Des) encontros entre a Modelagem Matemática na educação matemática e a formação de professores de matemática. **Alexandria: Revista de Educação em Ciência e Tecnologia**, v. 5, n. 1, p. 63-84, 2012.
- MEYER, J. F. C. A.; CALDEIRA, A. D.; MALHEIROS A. P. S. (Org.). **Modelagem em Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2011.
- NISS, M.; BLUM, W.; GALBRAITH, P. Introduction. In: BLUM, W.; GALBRAITH, P. L.; HENN, H.-W.; NISS, M. (Eds.). **Modelling and applications in mathematics education: the 14th ICMI study**, p. 3–32. New York: Springer, 2007.
- NUNES, A. S, NASCIMENTO, W. J. SOUSA B. N. A. Modelagem Matemática: um panorama da pesquisa brasileira na Educação Básica. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, v. 11. n. 4, p. 232-253, 2020.
- RIBEIRO, A. J. Conhecimento matemático para o ensino de equação: algumas implicações para a formação do professor de matemática. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 5., 2012, Petrópolis. **Anais**. Petrópolis (RJ): SBEM, 2012.
- RIBEIRO, A. J.; MACHADO, S. D. A. Equação e seus multisignificados: potencialidades para a construção do conhecimento matemático. **Zetetiké**, Campinas, v. 17, n. 31, p. 109 - 128, jan./jun. 2009.
- ROJAS, N.; FLORES, P.; CARRILLO, J. Conocimiento Especializado de un Profesor de Matemáticas de Educación Primaria al Enseñar los Números Racionales. **Bolema**, v. 29, n. 51, p. 143-167, abr. 2019.
- SANT'ANA, A, SANT'ANA, M.F. SERPA,P.B.S. Discussões entre professores e alunos em um ambiente de Modelagem Geométrica. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, v. 11. n. 1, p. 79-90, 2020.
- SHULMAN, L. S. Knowledge and teaching: foundations of the new reform. **Harvard Educational Review**, v. 57, n. 1, p. 1-22, Feb. 1987. SHULMAN, L. S. Those who understand: knowledge growth in teaching. **Educational Researcher**, v. 15, n. 2, p. 4-14, 1986.
- SRIRAMAN, B.; LESH, R. Modeling conceptions revisited. **ZDM – The International Journal**

on Mathematics Education, v. 38, p. 247-253, 2006.

STYLIANIDES, A. J.; BALL, D. Studying the Mathematical Knowledge Needed for Teaching: The Case of Teachers' Knowledge of Reasoning and Proof. In. **AERA**: San Diego, 2004.

YENMEZ, A. A.; ERBAS, A. K.; ALACACI, C.; CAKIROGLU, E.; CETINKAYA, B. Evolution of Mathematics Teachers' Pedagogical Knowledge when They are Teaching Through Modeling. **International Journal of Education in Mathematics, Science and Technology (IJEMST)**, v. 5, n. 4, p. 317-332, 2017.