



## **Função: concepções daquele que ensina e daquele que aprende**

**Rogério Fernando Pires**

Doutor em Educação Matemática

Universidade Estadual de Santa Cruz (UESC) – Bahia – Brasil

rfpires25@hotmail.com

**Benedito Antonio da Silva**

Doutor em Matemática

Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP) – São Paulo – Brasil

Benedito@pucsp.br

### **Resumo**

O presente artigo é resultado de um estudo que teve por objetivo investigar como os professores concebem o conceito de função, como essa concepção reflete em seu trabalho em sala de aula e como essa noção é compreendida pelos estudantes. Os pressupostos teóricos que o embasaram foram ideias de Sfard (1991, 1992), Vinner (1992) e Tardif (2011). A pesquisa de caráter qualitativo contou com a participação de cento e vinte e oito estudantes de duas escolas públicas de Ensino Médio e de uma universidade pública localizadas no interior do estado de São Paulo e dez professores dessas três instituições. O instrumento de coleta de dados constou de atividades realizadas por todos os estudantes participantes em dois momentos distintos, um questionário sobre o perfil dos professores e entrevistas com esses docentes. Os resultados mostraram que muito do que é feito pelo estudante é reflexo da prática do professor, e, além disso, que no Ensino Médio as concepções dos alunos transitam entre a operacional e a estrutural, sendo muito presente a concepção pseudoestrutural. Já no Ensino Superior as concepções desveladas eram bem próximas da estrutural, porém, não foi possível identificar a reificação do conceito.

**Palavras-Chave:** função. Concepção operacional. Concepção estrutural. Imagem do conceito. Definição do conceito. Saberes docentes.

### **Abstract**

This article is the result of a study that aimed to investigate how teachers conceive of the concept of function, how this conception reflects on his work in the classroom and how this concept is understood by students. The theoretical assumptions that underlay ideas were Sfard (1991, 1992), Vinner (1992) and Tardif (2011). A qualitative research study, with the participation of one hundred twenty-eight students from two public high schools and a public university located in the state of São Paulo and ten teachers in these three institutions. The data collection instrument consisted of activities for all students participating in two distinct phases, a questionnaire on the profile of teachers and interviews with these teachers. The results showed that much of what is done by the student is a reflection of teacher practice, and furthermore, that the high school students' conceptions transiting between operational and structural, being very present to pseudostructural design; in Higher Education has unveiled the designs were very close structural, however, could not identify the reification of the concept.

**Keywords:** function. Operational conception. Structural conception. Concept image. Concept definition. teacher knowledge.

## INTRODUÇÃO

As dificuldades apresentadas pelos estudantes com relação à noção de função têm sido foco de diversos estudos referentes ao ensino e à aprendizagem desse conceito. Estudiosos como Sierpinska (1992) e Sfard (1992) enfatizam que na maioria das vezes os alunos não conseguem fazer ligações entre as diferentes representações: gráfica, algébrica, diagramas, sentenças que descrevem inter-relações, como também a interpretação de gráficos e a manipulação de símbolos que descrevem e representam funções, tais como:  $f(x)$ ,  $x \mapsto y$ ,  $\text{sen}(x + t)$  etc. Todavia, fazer tais relações e manipular esses símbolos não é tarefa simples, pois o que gerencia essas ações é o processo de compreensão de que se trata de algo um tanto quanto complexo e é motivado e gerenciado pelas ações do professor.

Segundo Sierpinska (1992), o conceito de função pode ser definido de maneira simbólica formal, quase sem usar palavras, ficando o significado lógico do conceito limitado ao que diz a definição. Contudo, em muitos momentos, essa noção é aplicada em contextos matemáticos ou matematizados, utilizando uma linguagem informal que pode transcender a lógica da definição. Quando se pensa em grandezas variáveis em ciências econômicas, função é concebida como uma relação entre grandezas variáveis, por exemplo, o preço é uma função da quantidade de mercadoria. Já em Matemática, quando se pensa em curvas representadas em um sistema de coordenadas, logo procura-se estabelecer relações entre coordenadas de pontos que pertencem à curva. Essas imagens que se têm de função são consideradas estáticas, no sentido que elas já existem e são apenas descobertas.

No entanto, quando se realizam transformações, convertendo um objeto ou um conjunto de objetos em outros, como por exemplo, fazer projetos bidimensionais de objetos tridimensionais para representá-los em uma folha de papel, pode-se dizer que isso é uma imagem dinâmica de função.

Nessa direção, a concepção que o indivíduo tem acerca de um objeto matemático é influenciada pela maneira como esse objeto lhe foi apresentado, e isso inevitavelmente perpassa o limite do conhecimento puramente matemático, uma vez que nesse processo estão envolvidos além dos saberes do aprendiz, também as suas concepções que são fortemente influenciadas pelas crenças e saberes daquele que ensina.

Estudos como o de Pires (2014) revelam que existe uma grande quantidade de trabalhos que discutem as dificuldades dos estudantes relativas à noção de função. Porém, quando se trata de investigações acerca das concepções e das práticas dos professores, o

número tem uma queda considerável, e são raras as pesquisas que tratam ao mesmo tempo desses dois atores do processo de ensino e aprendizagem (professor e aluno).

Nesse sentido, o presente estudo procurou contribuir com as investigações que tratam do objeto matemático em questão do ponto de vista dos dois protagonistas do processo de ensino e de aprendizagem, constatando que as concepções apresentadas pelos estudantes são influenciadas pelas ações, crenças e saberes do professor.

O presente relato apresenta os principais resultados de uma pesquisa realizada com 128 estudantes e 10 professores, sendo 73 alunos do Ensino Médio e 55 do Ensino Superior. Quanto aos professores, 8 atuavam no nível Médio e 2 no Superior.

O estudo teve por objetivo investigar como os professores concebem o conceito de função, como essa concepção se reflete no seu trabalho em sala de aula tanto na educação básica como na universidade e como essa noção é compreendida pelos alunos desses dois níveis de ensino. Para tanto, os processos de investigação foram encaminhados procurando responder as seguintes questões: *Quais as concepções de função manifestadas por professores dos Ensinos Médio e Superior e como elas se revelam em suas propostas de ensino? Que concepções deste conceito emergem quando estudantes desses dois níveis de ensino são questionados a respeito de seus entendimentos relacionados a esse objeto matemático?*

Tal relato traz alguns elementos que podem ajudar a compreender como as concepções de função são manifestadas por esse grupo de professores e que tipo de concepções são manifestadas pelos estudantes investigados; além disso qual é o reflexo das concepções desses docentes nos entendimentos de função explicitados pelos estudantes.

## **PRESSUPOSTOS TEÓRICOS**

As dificuldades encontradas pelos estudantes tanto do Ensino Médio, quanto do Superior no que se refere à noção de função chamam tanto a atenção que frequentemente motivam a realização de pesquisas. Nessa perspectiva, estudos como o de Sfard (1992) e a investigação levada a cabo por Pires (2014) salientam que parte dessas dificuldades está atrelada à forma como esse objeto é apresentado ao estudante.

Sfard (1992) enfatiza que os matemáticos, de maneira geral, olham para os objetos matemáticos como algo real e inquestionável como a caneta que utilizam para escrever seus artigos. Salienta que é dessa maneira que as noções de um objeto matemático são apresentadas aos alunos e é esperado que, após essa apresentação, que os estudantes

manipulem esse novo objeto com a naturalidade de alguém que olha para ele como algo real que faça parte de sua vida. No entanto, muitos estudantes não são capazes de desenvolver essa habilidade, e não conseguem olhar e manipular os objetos matemáticos com tanta naturalidade.

Segundo Sfard (1991), o exercício de conceber um objeto matemático pode colocar em jogo uma dualidade sobre a natureza das concepções matemáticas: a concepção estrutural e a operacional, que para ela, são duas faces de uma mesma moeda.

Ela destaca que normalmente um novo conceito é introduzido a partir de outros já conhecidos, e cita como exemplo a introdução dos números complexos que normalmente são apresentados como um par ordenado  $(x, y)$  de números reais. Essa abordagem que utiliza um conceito já conhecido como ponto de partida para chegar a outro, a autora chama de abordagem estrutural, na qual os conceitos que são familiares são tidos como os tijolos da construção que vão se encaixando visando o produto final que é a casa. Em matemática esses conceitos vão sendo utilizados visando o surgimento de um novo conceito, todavia, esse tipo de abordagem não possibilita um posicionamento crítico por parte de quem aprende, uma vez que o ponto de partida normalmente é um conceito já conhecido e é tido como algo pronto e acabado.

A autora destaca que a concepção estrutural parece prevalecer entre os matemáticos, não sendo aceitas definições que admitam abordagens diferentes. No entanto, com relação ao ensino, emerge a concepção operacional, em que uma noção é concebida como um processo operacional e não como uma construção estática.

Referir-se à concepção operacional e à estrutural é levar em conta e discutir as crenças do indivíduo sobre a natureza das construções matemáticas, e não suas habilidades e competências. Esse tipo de dualidade é muito frequente no tratamento de função, que em alguns casos descreve processos computacionais e em outros, relações estáticas.

Falando especificamente sobre função, estudos como o de Sfrad (1992) e Pires (2014) revelam que entre os estudantes, seja do Ensino Médio, ou do Superior, existe uma predominância da concepção operacional sobre a estrutural, revelando que isso acontece pelo fato de verem função não como um objeto permanente, mas sim como um processo. E ainda, Sfard (1992) salienta que frequentemente ao descrever função os estudantes a associam a uma expressão algébrica, ou a um gráfico, ou seja, a uma representação do objeto, o que segundo a autora caracteriza a existência de uma concepção inferior à estrutural, o que ela denomina de concepção pseudoestrutural.

A passagem da concepção operacional para a estrutural de acordo com Sfard (1991) é composta por três estágios, sendo o primeiro deles a interiorização que consiste no momento em que o estudante se familiariza com os processos que vão organizar o novo conceito, por exemplo, as manipulações algébricas que se transformam em funções. O segundo estágio é a condensação, uma forma mais técnica de abordagem que se expressa na capacidade de lidar com um dado processo, sem necessariamente se preocupar com o conjunto de passos. O último deles é a reificação, que ocorre quando o estudante consegue converter o processo já condensado para um objeto completo. Em outras palavras, a reificação é um deslocamento ontológico em que os processos se solidificam em um objeto, em uma estrutura estática.

A maneira de conceber um objeto matemático tem estreita relação com a forma como se dá a compreensão por parte do indivíduo. Nesse contexto, entram em jogo dois aspectos bastante importantes segundo Vinner (1992): a imagem do conceito *versus* definição do conceito e a compartimentalização do conceito.

De acordo com Vinner (1992), a imagem do conceito é uma entidade não verbal associada na mente com o nome de um conceito, e pode ser uma representação visual, caso o conceito tenha representações visuais, como também pode ser uma coleção de impressões e experiências.

As formas verbais surgem como uma espécie de fase posterior. Por exemplo, ao ouvirmos a palavra mesa, a imagem de certa mesa pode ser evocada por nossa mente; uma reunião que aconteceu ao redor de uma mesa, refeições realizadas em uma mesa, enfim, experiências vivenciadas ao estar sentado à mesa.

Quando ouvimos a palavra função, recordamos da expressão  $y = f(x)$ , e nossa mente poderá visualizar o gráfico de uma função, como também podemos recorrer a alguma função específica como  $y = \text{sen}x$ ,  $y = \text{log}x$  etc. Sendo assim, falar de um conceito significa relacionar uma imagem ao seu nome. Decorar a definição de um conceito não denota que o indivíduo tenha compreendido o seu significado. Para que a compreensão ocorra é necessário ter um conceito a respeito de tal conceito.

Durante a abordagem pedagógica, no processo de formação do conceito, a definição vai modelar a imagem do conceito de tal maneira que ele se encaixe perfeitamente na sua definição. A imagem do conceito é modelada por experiências vivenciadas em sala de aula, situações de ensino apresentadas em livros-textos, como também por tarefas cognitivas realizadas pelo indivíduo, ou seja, diferentes conjunturas podem contribuir para que a imagem do conceito seja modelada de acordo com a definição.

A compartimentalização consiste em dois itens do conhecimento incompatíveis com os outros que existem na mente do indivíduo, o qual não se dá conta disso. Por exemplo, se por um lado um estudante pode definir função como relação entre os elementos de dois conjuntos, por outro lado, ao se deparar com um gráfico que não apresente uma ‘regularidade’ (como por exemplo, aquele constituído por pontos isolados), ele não reconhece uma função nessa representação, embora afirme que isso pode ser uma correspondência arbitrária entre  $x$  e  $y$ . No entanto, a questão principal é se a compartimentalização desaparece ou diminui com o passar do tempo. Essa questão é de suma importância para o processo de ensino e aprendizagem, pois a presença de tal fenômeno interfere na aprendizagem, podendo dificultar a compreensão das noções matemáticas.

Assim, a compreensão de um conceito e a posterior ação de conceber um objeto matemático estão intimamente ligados aos saberes e às concepções daquele que ensina, pois de certa forma as convicções, as concepções e os saberes construídos ao longo da trajetória profissional ajudam a construir o alicerce do profissional.

Nessa perspectiva, ao falar de saberes docentes deve-se ter em mente que eles não são provenientes somente da formação universitária. Não se pode vincular os saberes dos professores apenas à sua formação acadêmica; eles são constituídos de elementos provenientes de diferentes fontes. Na verdade, o saber docente é composto por diferentes saberes, tais como: os disciplinares, curriculares, profissionais (os educacionais e da pedagogia) e experienciais.

Segundo Tardif (2011), ao questionar os professores sobre o seu saber, eles se referem a conhecimentos e a um saber fazer pessoal, comentam sobre os saberes curriculares, dos programas e dos livros didáticos, apoiam-se nos conhecimentos disciplinares relativos à matéria que ensinam, recorrem à sua própria experiência e ainda apontam elementos de sua formação profissional. Nessa direção, o saber docente é um saber plural, formado por uma mistura de saberes provenientes da formação profissional e dos saberes disciplinares, curriculares e experienciais.

Os saberes profissionais são constituídos pelo conjunto de saberes adquiridos nas instituições de formação de professores. São aqueles que o indivíduo adquire durante a sua formação, seja ela inicial ou continuada, nos cursos voltados para essa finalidade e estão

relacionados aos conhecimentos educacionais e pedagógicos.<sup>1</sup>

Os saberes disciplinares são aqueles saberes sociais que são definidos e selecionados pela instituição universitária. São incorporados à prática docente por meio de conhecimentos adquiridos nas diversas disciplinas que compõem os cursos de formação inicial ou continuada de professores oferecidos pelas universidades. São os saberes que correspondem aos diversos campos do conhecimento e são reconhecidos socialmente. São exemplos de saberes disciplinares, a Matemática, a Física, a História etc., os conhecimentos transmitidos nos cursos e departamentos universitários, independentemente das Faculdades de Educação e dos cursos de formação de professores.

Os saberes curriculares compreendem discursos, objetivos, conteúdos e métodos a partir dos quais as instituições escolares organizam e apresentam os saberes sociais por ela definidos e selecionados como modelo de cultura erudita.

Por seu turno, os saberes experienciais são saberes específicos que os professores desenvolvem com base em seu trabalho cotidiano e conhecimento do meio em que atuam, eles emergem da experiência e por ela são validados. Segundo Tardif (2011, p. 39), “eles incorporam à experiência individual ou coletiva sob forma de *habitus*, habilidades de saber fazer e de ser”. Esse saber fazer depende dos saberes experienciais do professor, pois os saberes adquiridos por meio da experiência profissional constituem os fundamentos de sua competência, e é a partir dos saberes experienciais que os professores concebem os modelos de excelência profissional dentro de sua profissão. Nesse sentido, os saberes experienciais permitem ao professor criar um estilo próprio de ensinar, que Tardif (2011) chama de “macetes” da profissão, emergindo os traços de personalidade profissional que se manifestam por meio de um saber fazer pessoal que é validado pelo trabalho cotidiano.

Os saberes docentes são compostos por saberes provenientes de diferentes fontes, sendo que muitas delas não estão diretamente relacionadas com o ambiente escolar, visto que muitas vezes no fazer da profissão o docente recorre a outros saberes distantes do ofício de ensinar, provenientes de lugares sociais anteriores à carreira docente. Por exemplo, alguns desses saberes o professor os adquire com a sua família, outros da escola em que formou a cultura pessoal, da universidade, dos pares com os quais convive diariamente, dos cursos de formação continuada etc. Tardif (2011, p. 64) afirma que “o saber profissional está, de certo modo, na confluência entre várias fontes de saberes provenientes da história de vida

---

<sup>1</sup> Segundo Tardif (2011), os saberes pedagógicos apresentam-se como doutrinas ou concepções provenientes de reflexões sobre a prática educativa no sentido amplo do termo, reflexões racionais e normativas que conduzem a sistemas mais ou menos coerentes de representação e de orientação da atividade educativa.

individual, da sociedade, da instituição escolar, dos outros atores educativos, dos lugares de formação, etc”.

Quando esses saberes são utilizados na sala de aula, fica difícil identificar imediatamente a fonte de cada um deles, pois a confluência dessa diversidade de saberes converge para a intenção educativa do momento.

Outra questão que não se pode deixar de lado é o fato de os saberes dos professores receberem grande influência da temporalidade. Portanto, a história de vida do professor e a sua construção ao longo da carreira são fatores que influenciam em seus saberes. Para Tardif,

Essa inserção no tempo é particularmente importante para compreender a genealogia dos saberes docentes. De fato, as experiências formadoras vividas na família e na escola se dão antes mesmo que a pessoa tenha desenvolvido um aparelho cognitivo aprimorado para nomear e indicar o que ela retém dessas experiências. Além de marcadores afetivos globais conservados sob forma de preferências ou de repulsões, o indivíduo dispõe, antes de tudo, de referenciais de tempo e lugares para indexar e fixar essas experiências na memória (2011, p. 67).

Quem não se lembra de algum rígido professor de matemática que propunha para resolver complexas equações, cuja resolução exigia intermináveis cálculos e que muitas vezes não faziam sentido para quem estava ‘aprendendo’, ou então daquela doce professora de literatura que declamava lindos poemas ao final das aulas? Esses são vestígios da socialização primária e escolar do professor; são, portanto, referenciais de ordem temporal que podem evocar qualidades desejáveis ou indesejáveis que o indivíduo quer encarnar ou evitar como professor. A temporalidade, portanto, estrutura a memorização de experiências educativas que contribuem para a formação do “eu profissional”.

Nesse sentido, Tardif (2011, p. 68) comenta que “o desenvolvimento profissional é associado tanto às suas fontes e lugares de aquisição quanto aos seus momentos e fases de construção”. Sendo assim, é possível evidenciar que muitos saberes evocados pelo professor no cotidiano de sua prática foram adquiridos até mesmo antes do exercício da profissão.

Com respaldo nas ideias de Sfard (1991, 1992), Vinner (1992) e Tardif (2011), as informações coletadas junto aos participantes da pesquisa foram analisadas e os resultados e discussões serão apresentados mais adiante.

## **METODOLOGIA**

O estudo de caráter qualitativo contou com a participação de 128 estudantes e 10 professores, sendo 73 alunos da primeira e da terceira séries do Ensino Médio de duas escolas



públicas (instituição A e B), 55 estudantes do Ensino Superior que cursavam o primeiro semestre dos cursos de Licenciatura em Matemática, Física, Química e Biologia em uma universidade pública (instituição S), localizadas no interior do Estado de São Paulo. Os professores eram 4 da instituição A, 4 da B e 2 da S.

No âmbito das escolas foram investigadas quatro turmas, sendo uma da 1ª série e outra da 3ª série do Ensino Médio de cada uma das instituições, totalizando 73 alunos. Os 8 professores participantes do Ensino Médio atuavam nessas instituições de ensino, sendo quatro de cada uma delas.

Os alunos das escolas em que foi realizada a coleta de dados compuseram quatro grupos, ficando assim caracterizado: GEM1A (grupo de 18 estudantes da 1ª série do Ensino Médio da instituição A), GEM3A (grupo de 17 estudantes da 3ª série do Ensino Médio da instituição A), GEM1B (grupo de 18 estudantes da 1ª série do Ensino Médio da instituição B) e GEM3B (grupo de 20 estudantes da 3ª série do Ensino Médio da instituição B).

Os estudantes da universidade também compuseram quatro grupos que, por sua vez, foram caracterizados pelas siglas: GESM (grupo de 14 estudantes do curso de Licenciatura em Matemática), GESF (grupo de 15 estudantes do curso de Licenciatura em Física), GESQ (grupo de 9 estudantes do curso de Licenciatura em Química) e o GESB (grupo de 17 estudantes do curso de Licenciatura em Biologia).

Quanto aos 10 professores que participaram do estudo, estes compuseram três grupos, o GPEMA (grupo de quatro professores da instituição A), GPEMB (grupo de quatro professores da instituição B) e o GPS (grupo de dois professores da instituição S).

Com o intuito de preservar a identidade dos sujeitos participantes, cada um deles é indicado por meio de códigos; assim, quando o código E1GM1A é mencionado, está-se reportando ao sujeito 1 (E1) do grupo (G) da 1ª série do Ensino Médio (EM1) da escola A, da mesma forma que o código E19GM3B representa o sujeito 19 (E19) do grupo (G) da 3ª série do Ensino Médio (M3) da escola B, da mesma forma, o código E11GESF representa o sujeito 11 do grupo de estudantes do curso de Licenciatura em Física. Os professores participantes foram identificados utilizando-se procedimento similar, isto é, o código P3GMA foi usado para designar o professor 3 (P3) do grupo do Ensino Médio (GM) da escola A. Da mesma forma o código P2GS foi utilizado para o professor 2 (P2) do grupo do Ensino Superior (GPS).

Os dados da pesquisa foram coletados por meio de quatro instrumentos, sendo duas listas de atividades direcionadas a todos os estudantes, um questionário do perfil do professor e uma entrevista semiestruturada direcionados aos docentes participantes.

A primeira lista, denominada teste I, continha treze atividades, sendo que as doze primeiras, tanto no enunciado, quanto para a realização, envolvia a mobilização, a manipulação e a coordenação de diferentes registros de representação<sup>2</sup> do objeto matemático e a décima terceira tratava de um questionamento, no qual os alunos eram solicitados a explicitar o que entendiam por função. Esse teste foi apresentado a todos os alunos participantes no início do ano letivo, momento em que eles ainda não tinham estudado tal assunto em seus respectivos cursos (nível médio e superior).

O teste II continha as mesmas atividades do teste I, porém organizadas em disposição diferente daquela apresentada no primeiro teste, com exceção da décima terceira que ocupou a mesma posição nas duas listas. Os estudantes dos cursos de licenciatura realizaram o teste II no final do primeiro semestre, ou seja, por volta de quatro meses após a realização do primeiro. Já os alunos do Ensino Médio desenvolveram a mesma lista de atividades oito meses após o teste I, o que assegurava que todos os sujeitos já tivessem tido contato com as noções de função em suas respectivas instituições naquele período de tempo.

Paralelamente à realização do teste I, os professores responderam um questionário com vistas à composição de seu perfil e ainda participaram de uma entrevista semiestruturada.

Com relação às atividades que compuseram os testes realizados pelos alunos, o foco para a análise e discussão nesse artigo foi a décima terceira que possibilitou a partir das respostas dadas interpretar o entendimento de função manifestado pelos estudantes. Agora quanto às questões presentes no questionário a respeito do perfil do professor e as questões da entrevista semiestruturada, para efeito de formatação de síntese e formatação desse relato, essas serão apresentadas quando pertinente, na próxima seção em que serão expostas a discussão e a análise dos resultados.

## **ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS**

As informações coletadas foram analisadas à luz das ideias que fundamentaram a investigação, primeiramente no interior de cada um dos grupos com intuito de levantar

---

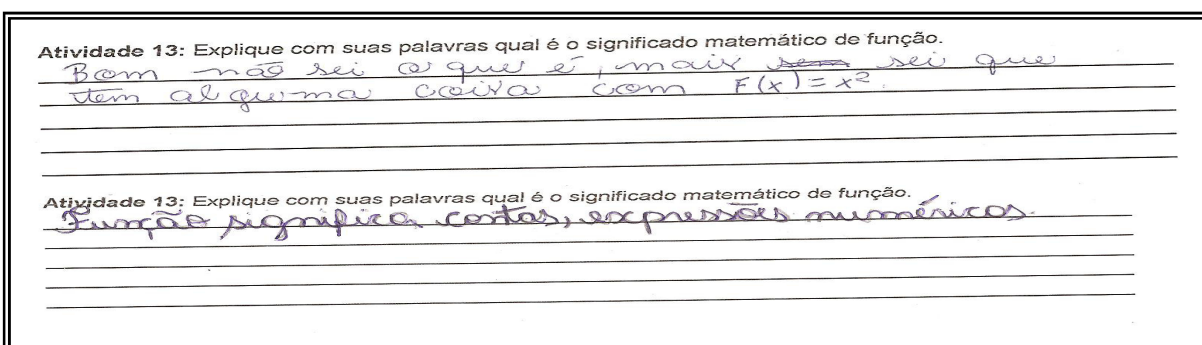
<sup>2</sup> Segundo Duval (2009), os objetos matemáticos são abstratos e a única maneira de acesso a eles é por meio de suas representações. Ainda, segundo esse mesmo autor, a originalidade da atividade matemática está na mobilização de pelo menos dois registros de representação de um mesmo objeto matemático e na possibilidade de trocar a todo momento de registro.

informações para uma posterior comparação entre as concepções manifestadas pelos estudantes, com aquelas evidenciadas nos professores.

Assim, a análise dos protocolos dos estudantes, que no presente trabalho focou nas repostas dos alunos referentes à décima terceira atividade, possibilitou extrair uma grande quantidade de informações a respeito das concepções dos estudantes. Para essa averiguação, procurou-se evidenciar nessas respostas dois aspectos inspirados em Vinner (1992): a imagem do conceito *versus* definição do conceito e a compartimentalização do conhecimento. Na medida do possível, também tentou-se evidenciar os tipos de concepção (operacional, pseudoestrutural e estrutural) de função seguindo a classificação proposta por Sfard (1992), que emergiram dos protocolos dos estudantes.

Nessa perspectiva, foram discutidos e analisados os entendimentos de função explicitados pelos estudantes em dois momentos (teste I e II).

A análise teve início com os protocolos daqueles alunos do GEM1A que, no teste I, poucos deixaram em branco, alguns escreveram que não sabiam o que era função e muitos tentaram explicar o que entendiam. Dentre os diferentes tipos de respostas, foram selecionadas duas que mais se repetiram.



**Figura 1:** Atividade 13 realizada pelos sujeitos E12GEM1A e E15GEM1A, respectivamente, no teste I.

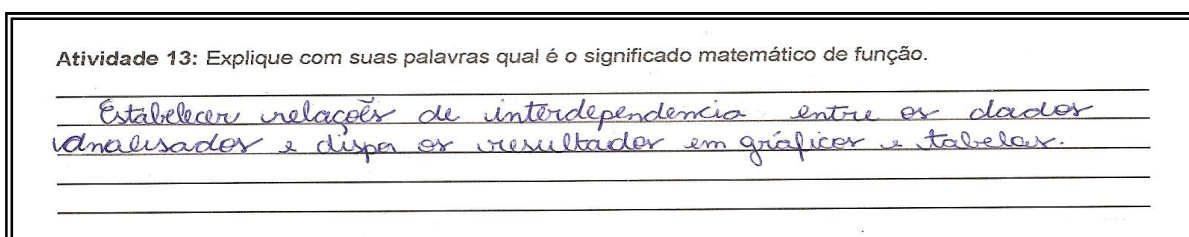
Vê-se por essas repostas que o sujeito E12GEM1A apresenta um entendimento que ocorreu em menor frequência no grupo. Ao associar função a uma representação  $f(x)=x^2$ , o estudante recorreu à imagem de uma função específica, que segundo Vinner (1992) é algo natural, pois falar de um conceito significa relacionar o seu nome a uma imagem, e é durante o processo de formação do conceito que a definição do objeto vai modelar a imagem de forma que ela se encaixe perfeitamente na definição.

O entendimento expresso por E15GEM1A, de certa forma, também associa função a uma imagem, que seria a de uma expressão, contudo vale ressaltar que tanto esse estudante quanto outros que apresentaram entendimentos parecidos, ao relacionar função a uma expressão numérica ou a contas, possivelmente tenha relacionado função com cálculo do

valor que a função assume quando se atribui valor à variável; tais sujeitos mostraram uma concepção que, segundo Sfard (1992), pode ser classificada como sendo operacional, na qual há uma prevalência dos processos computacionais. Já os estudantes que associaram função a uma expressão algébrica, como no caso do E12GEM1A, manifestaram uma concepção pseudoestrutural.

No teste II, foi observado que os estudantes continuaram associando função a cálculos, expressões algébricas e também a gráficos. Isso indica que, passados oito meses, esses estudantes ainda não haviam modelado uma imagem do conceito que condiz com a sua definição, utilizando formas de registrar para tentar definir função.

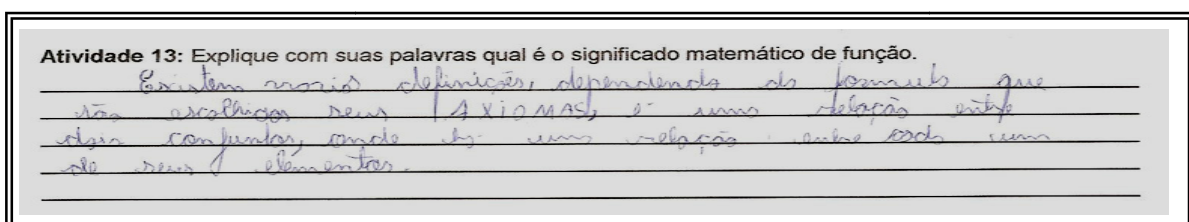
Em relação ao GEM3A, ao examinar os entendimentos de função explicitados pelos estudantes desse grupo no teste I, foi possível perceber que estes eram bastante próximos daqueles apresentados pelos estudantes do GEM1A. Contudo, uma das respostas chamou a atenção por ser a única a conceber função como uma relação, que se acha reproduzida a seguir:



**Figura 2:** Atividade 13 realizada pelo E17GEM3A no teste I.

Além de associar função a gráficos e tabelas, esse estudante também entende que função é uma relação de interdependência, mostrando um pensamento mais voltado para uma concepção estrutural. Nesse sentido, de acordo com Vinner (1992), é plausível dizer que a imagem que esse indivíduo tem do conceito está sendo modelada pela definição do conceito.

No teste II, percebemos que as concepções apresentadas permaneceram quase as mesmas daquelas apresentadas no teste I, porém um aluno apresentou um entendimento que se aproxima bastante da definição dada por Dirichlet, como a relação arbitrária entre elementos de dois conjuntos. A explicação dada pelo estudante está presente na figura a seguir:



**Figura 3:** Atividade 13 realizada pelo E10GEM3A no teste II.

Pela resposta é possível perceber que esse estudante em particular concebe função como uma correspondência arbitrária entre os elementos de dois conjuntos. Essa concepção, que destoa das demais apresentadas pelos outros sujeitos do grupo, provavelmente seja fruto das aulas de algum cursinho que estava frequentando com a finalidade de realizar o Exame Nacional do Ensino Médio, pois seu professor durante a entrevista relatou que esse aluno especificamente estava frequentando um cursinho preparatório.

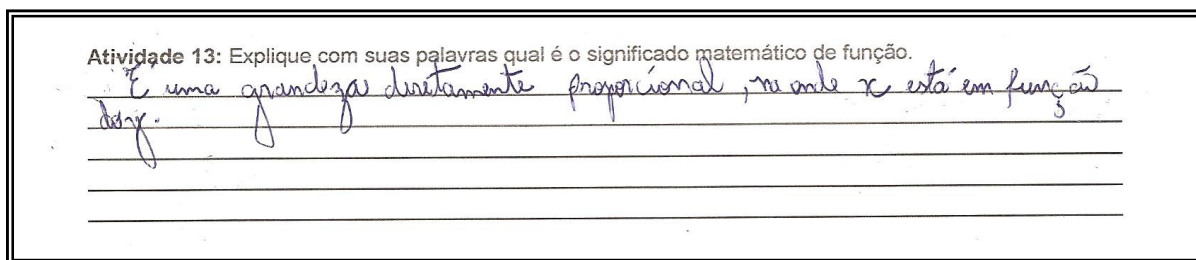
Ao analisar o que os alunos desse grupo explicitaram nos dois testes, ficou evidente que parte desses estudantes ainda associava função a uma representação algébrica, ou seja, relacionava o nome a uma imagem. Isso, de acordo com Vinner (1992), é algo natural, quando se fala de um conceito, pois a mente busca imagens que possam representá-lo. Contudo, quando eles associam função a uma lei de formação específica ou um gráfico, podemos dizer que esses sujeitos ainda não foram capazes de modelar a imagem do conceito de acordo com a definição do conceito.

Ainda no tocante ao entendimento de função, com exceção desses dois estudantes, cujos protocolos foram apresentados, uma parte do grupo manifestou uma concepção operacional ao dizer que função servia para calcular alguma coisa, por exemplo, e a outra parte mostrou uma concepção pseudoestrutural ao relacionar função a uma representação algébrica.

Com relação aos estudantes da 1ª série da instituição B (GEM1B) no teste I, apenas dois disseram que função seria  $f(x) = x^2$ ; o restante não respondeu ou disse que não sabia. Essas duas respostas são casos típicos de associação de uma imagem que ainda não foi modelada pela definição do conceito, caracterizando assim, segundo Sfard (1992), uma concepção pseudoestrutural. Já no teste II muitos alunos afirmaram que “função é uma coisa que depende da outra”, mostrando que a imagem do conceito começou a ser modelada pela definição do conceito, dando indícios de uma concepção mais próxima da estrutural.

Quanto ao segundo grupo da instituição B (GEM3B), no teste I a grande maioria dos alunos associou a ideia de função a cálculos, contas, expressão numérica etc., ou seja, usou termos que apontam para uma concepção operacional. Já no teste II, além dos termos empregados no teste anterior, os estudantes também passaram a relacionar função a uma expressão algébrica específica, dando indícios de que a imagem do conceito ainda não havia sido modelada pela sua definição.

Dentre os diferentes entendimentos de função dos estudantes desse grupo, um se destaca dos demais pelos termos utilizados:



**Figura 4:** Atividade 13 realizada pelo E17GEM3B no teste II.

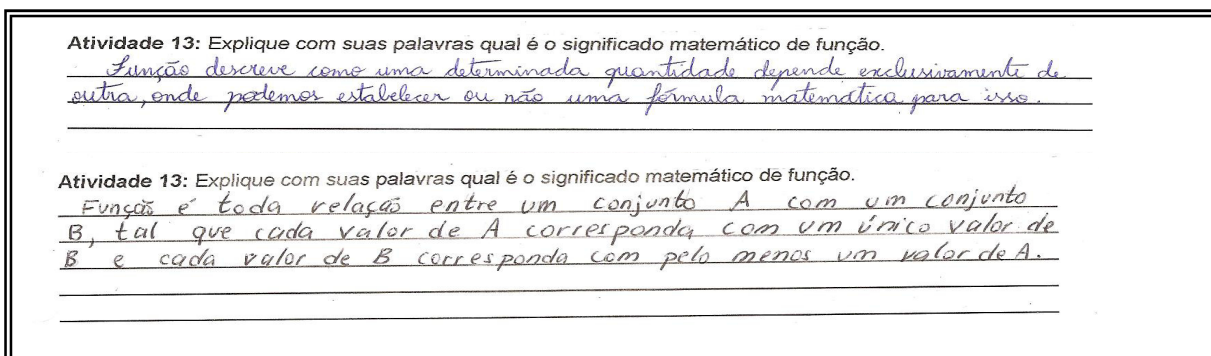
Percebe-se que o estudante entende função como uma relação de proporcionalidade entre as grandezas envolvidas, contudo esse fenômeno só acontece em um caso particular, na função linear ( $f(x) = kx$ ). Isso mostra a compartimentalização de conhecimento, em que o conceito de função é trabalhado de maneira estanque e a proporcionalidade entre grandezas é abordada de maneira enfática em alguns materiais didáticos, principalmente nas ‘apostilas’ utilizadas nas escolas estaduais em São Paulo, conforme foi possível averiguar no Caderno do Professor (SÃO PAULO, 2009, p. 20).

De maneira geral, pode-se dizer que o entendimento de função apresentado por esses estudantes no teste I apontava para uma concepção operacional que, no teste II, passou a tomar a direção de uma concepção pseudoestrutural.

Concluídas as discussões acerca dos entendimentos apresentados pelos alunos do Ensino Médio, o passo seguinte foi analisar o que os estudantes dos quatro cursos de licenciatura que participaram do estudo expressavam sobre sua compreensão de função.

No momento da coleta dos dados, os alunos do curso de Matemática e de Física constituíam uma única turma, assim como os de Química e de Biologia. Dessa forma, pelo fato de muitas vezes as respostas explicitadas pelos estudantes de cursos diferentes serem semelhantes, os exemplos das respostas aqui ilustrados, muitas vezes, compõem uma mesma figura composta por depoimentos de alunos de dois cursos distintos.

Ao examinar os protocolos do GESM e do GESF, foi possível perceber que diferentemente dos alunos do Ensino Médio, esses estudantes, em sua maioria, não associavam função a uma expressão algébrica ou a um gráfico. Dentre os diferentes entendimentos que expressaram, os que mais se repetiram foram a relação de dependência entre grandezas e a relação entre elementos de dois conjuntos. Exemplos disso estão presentes na figura a seguir:

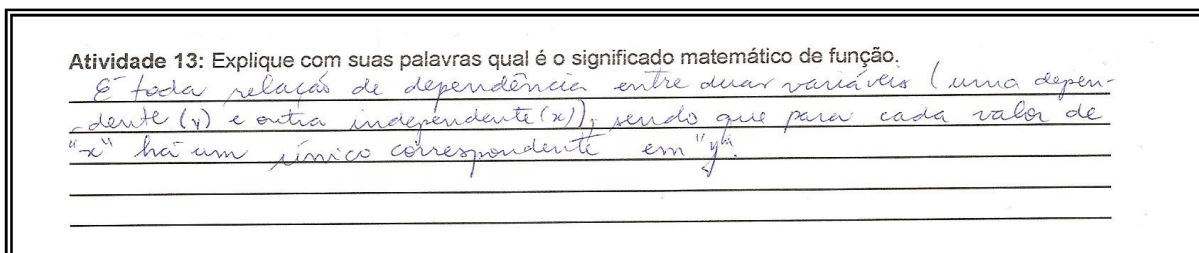


**Figura 5:** Atividade 13 realizada pelo E11GESF e E8GESM respectivamente no teste I.

O entendimento expressado pelo primeiro estudante foi o que mais se repetiu em ambos os grupos. Observando o protocolo é possível notar que o aluno entende que função é uma relação de dependência entre quantidades. Apesar de restringir essa relação a apenas quantidades, ele ressalta que essa relação pode ser ou não expressa por uma fórmula matemática, que indica que tal relação pode ter uma regularidade ou não. Assim, deixa explícito que reconhece função como uma relação, mesmo não sendo possível observar uma regularidade, o que caracteriza, de acordo com Vinner (1992), a não existência da compartimentalização do conhecimento e, segundo Sfard (1992), esse entendimento aponta para uma concepção estrutural.

Já a compreensão exposta pelo segundo estudante se repetiu com menos intensidade nos dois grupos. Apesar de conceber função como uma relação, ele explicita que essa relação se estabelece entre elementos de dois conjuntos, o que também aponta para uma concepção estrutural, como a que foi evidenciada no entendimento expresso no primeiro protocolo. Ambos os entendimentos indicam semelhanças com a definição apresentada por Dirichlet no sentido de não levar em consideração a presença de uma expressão analítica.

No teste II, o número de respostas em branco aumentou e, ainda, além dos entendimentos manifestados anteriormente, os estudantes que a responderam, dos dois grupos, passaram a expressar função como uma relação de dependência entre variáveis conforme mostra o protocolo abaixo:

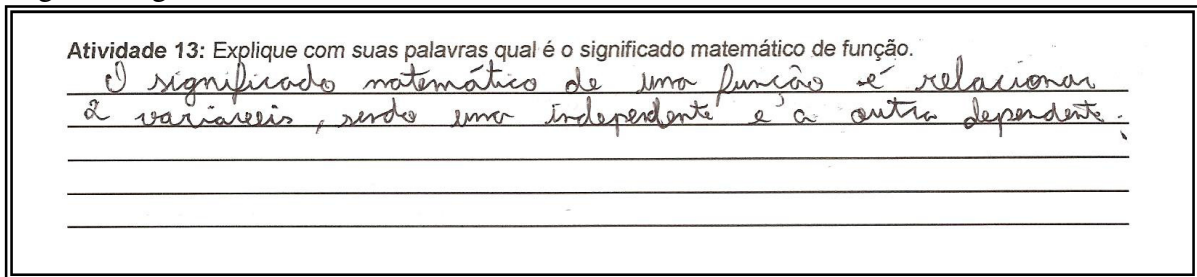


**Figura 6:** Atividade 13 realizada pelo E6GESM no teste II.

É possível notar que os estudantes desses grupos continuaram concebendo função como uma relação de dependência, embora no teste II alguns passaram a estabelecer tal relação entre duas variáveis, o que não muda muito do que expressavam no teste I, porém, de maneira implícita, essa forma de concepção envolve a ideia de expressão analítica e regularidades. Assim, ao examinar os entendimentos de função revelados pelos estudantes do GESM e do GESF, fica evidente que esses sujeitos em sua maioria tinham uma imagem do conceito que estava sendo modelado pela definição do conceito.

No que tange ao aumento da quantidade de respostas em branco para essa atividade, tanto nos estudantes que Matemática, quanto nos de Física, uma possível explicação pode estar no fato que no teste I, ao explicitarem seus entendimentos, esse alunos recorriam a suas experiências com esse objeto matemático anteriores ao ingresso à universidade, fato que possivelmente tenha deixado os estudantes mais à vontade, o que possibilitou maior espontaneidade para explicitar seus conhecimentos. Já no teste II, é possível que o contato que eles tiveram com a noção de função em uma das disciplinas que cursaram e a preocupação em apresentar certa formalidade nas respostas podem ter causado certa insegurança nos estudantes, inibindo a espontaneidade das respostas.

Com relação aos estudantes do GESQ e do GESB, no teste I observou-se que uma grande parcela dos estudantes atribuiu à função o significado de relação, conforme ilustra a figura a seguir:



**Figura 7:** Atividade 13 realizada pelo E3GESQ no teste I.

Pela resposta, é possível perceber que esse estudante, assim como outros pertencentes aos dois grupos, entendia função como uma relação, seja ela entre grandezas, como mostra a figura, bem como entre números ou elementos de dois conjuntos, como também foi evidenciado em outras respostas. Essa maneira revelada pelos alunos de entender função aponta para uma concepção estrutural, que pode ser produzida por uma imagem do conceito que não foi totalmente modelada pela definição do conceito.



No teste II, os estudantes de ambos os grupos continuaram a expressar que função é uma relação, porém o termo “dependência” foi agregado às suas explicações anteriores, mostrando que a imagem do conceito estava sendo modelada pela sua definição.

Ao concluir a análise das respostas dadas pelos estudantes da educação básica e da universidade que explicitavam seus entendimentos de função, é relevante dizer que nos grupos do Ensino Médio foi evidenciada uma predominância das concepções operacional e pseudoestrutural, sendo possível observar a transição de uma concepção para outra comparando os dois testes. Já no Ensino Superior a situação é um pouco diferente; houve uma predominância de uma concepção que aponta para a estrutural nos dois testes, porém não foi possível observar se esses sujeitos chegaram à reificação do conceito.

Segundo Sfard (1992), a predominância da concepção operacional sobre a estrutural normalmente acontece com os estudantes, porque eles veem função como um processo, e não como um objeto permanente. Para a autora, o processo é puramente operacional e a reificação do conceito é algo demorado que não acontece em um curto espaço de tempo, podendo levar anos e, às vezes, dependendo do conceito, não acontecer.

Concluído o tratamento qualitativo das informações recolhidas com os estudantes, a próxima fase foi analisar o material coletado junto aos professores dos Ensinos Médio e Superior. Os dados foram recolhidos por meio de um levantamento do perfil dos professores e de uma entrevista semiestruturada, com o intuito foi trazer à tona alguns aspectos como: os saberes desses sujeitos (disciplinares, curriculares, profissionais e experienciais); a incidência da compartimentalização de conhecimento, como para eles se estabelecia a relação entre a imagem do conceito e a definição do conceito apresentada; procurou-se ainda evidenciar as concepções manifestadas pelos docentes e classificá-las como operacional, pseudoestrutural e estrutural.

Para efeito de sistematização das informações, o desencadeamento da apreciação do material coletado junto aos professores foi organizado por nível de ensino (médio e superior) e a interpretação das informações recolhidas teve início com as dos professores do Ensino Médio da instituição A.

Um aspecto que predominou nas entrevistas com esses professores foi a questão da compartimentalização. A presença desse fenômeno ficou evidente na resposta de um professor interpelado sobre o papel dos cadernos (apostilas) da rede estadual, em sua prática docente, conforme pode ser observado no relato a seguir:

Pesquisador: Você acha que o livro didático é mais completo que os cadernos?

P2GPEMA: É, tem coisas que a gente precisa mais do livro porque o caderno pula muito, parece que está faltando alguma coisa, como quando estava nas progressões. Eu estava ainda em progressão aritmética e daqui a pouco aparecia progressão geométrica, dali a pouco eu voltava de novo, e aí eu acho que eles mesmos ficavam assim: “mas agora é progressão geométrica, agora é progressão aritmética?”. Isso que eu acho que é a desvantagem. Ao mesmo tempo em que eles acham que tem que estar preparado para reconhecer, saber com o que está lidando, a gente quer terminar tudo para começar outro assunto, não sei se sou eu que estou errada, agora é uma nova visão que eles estão tendo, a minha visão já é mais antiga.

Pode-se notar que, para esse professor, a compartimentalização de conteúdo é algo que está enraizado na sua maneira de ver o ensino da matemática; esse fenômeno esteve fortemente presente na prática dos professores entrevistados, pois, ainda que os outros não tivessem deixado isso tão explícito em suas entrevistas, como o docente citado, a maneira como responderam às indagações aponta para uma resistência em relacionar os diferentes assuntos que têm a ensinar, mesmo que esses conteúdos por natureza do objeto matemático favoreçam tal relação. Para eles parece que o conhecimento matemático está organizado em ilhas isoladas, e que o sujeito explora uma ilha em sua totalidade e só depois vai para a outra, não sendo permitido o caminho de volta nem a ida para a seguinte, sem explorar totalmente aquela em que o indivíduo se encontra.

As entrevistas com esse grupo de professores também permitiram emergir aspectos que possibilitaram conhecer um pouco do “eu profissional”, por meio daquilo que Tardif (2011) chama “macetes” que denunciam um estilo próprio de ensinar que vai sendo construído ao longo da carreira. Um exemplo desses aspectos referentes a esse estilo próprio de ensinar pode ser observado no comentário feito pelo P3GPEMA:

[...] eu diversifico bastante. E às vezes eu dou aula para o Ensino Médio e agora estou também no Fundamental. Eu gosto de pegar vários anos e você acaba não se especializando bem nem em uma coisa nem na outra. O P1GPEMA tem uma prática e ele tem tudo já guardado e separado e ele corre mais com a matéria com aquele jeito sossegado dele. Eu sou aquele tipo de professorinha de alfabetização, eu quero ir lá e explicar: olha aqui você soma e daí vamos ver lá no gráfico o que está acontecendo e vamos ver lá e sabe uma coisa assim, de professorinha de Ensino Fundamental, de primeiro aninho? Os alunos gostam, eles falam: nossa, é tão fácil de entender quando você explica. Mas eu vejo que depois que tem que ser rápido, quando a gente fala: eu vou ensinar matemática e dar conta do conteúdo.

Esse professor, além de atuar no Ensino Médio, lecionava também nos anos iniciais da educação básica em alfabetização, o que faz com que se revele nele um fazer profissional no

qual estão enraizados aspectos relativos à sua atuação como alfabetizador, que parecem ser muito acentuados em sua atuação no Ensino Médio. Apesar de reconhecer que os alunos gostam do seu estilo, ao se comparar com outro professor da escola, ele avalia seu próprio desempenho e exprime comentários com tom de reprovação, quando explicita que, além de ensinar, tem que dar conta do conteúdo; tal fato corrobora que sua experiência anterior está enraizada em sua prática, o que evidencia, de acordo com Tardif (2011), a incorporação dos saberes experienciais na atuação diária. Um exemplo dessa incorporação pode ser observado em sua afirmação: “Eu gosto de ensinar as funções trigonométricas com música (...) e tem um aluno que até hoje vem falar: professora lembra-se daquela música ‘um, dois, três, três, dois, um... Nunca mais me esqueci do seno e cosseno e da tangente’, são relações trigonométricas”.

O conteúdo do relato mostra mais uma vez que esse professor traz para sua prática no Ensino Médio aspectos da sua atuação como professor alfabetizador, uma vez que a utilização de músicas no processo de ensino acontece com frequência nos anos iniciais, segmento de ensino no qual esse professor também atuava. Isso revela que a experiência desse sujeito com alunos em fase de alfabetização lhe permitiu criar um estilo próprio de ensinar que, segundo Tardif (2011), se constitui em “macetes” da profissão que revelam traços da personalidade profissional que se manifestam por meio de um saber fazer pessoal validado pelo trabalho cotidiano. No entanto, o modo de atuar associando o aprendizado de conteúdos por meio de macetes pode dificultar que os alunos desenvolvam o seu próprio processo cognitivo no “fazer matemática”.

Quanto às dificuldades apresentadas pelos estudantes, os professores reconhecem que cabe a eles criar estratégias que possam levá-los à superação. Agora quanto ao volume de conteúdo, o discurso desses sujeitos mostrou que a relação que eles mantêm com os saberes curriculares se caracterizava por aquilo que Tardif (2011) chama de relação de exterioridade, que são saberes produzidos pela academia e o professor não tem participação na sua definição e elaboração, cabendo a ele apenas a sua execução, o que gera muitas vezes um sentimento de exclusão por parte de quem deve incorporar esse tipo de saber na sua prática. Isso foi possível perceber nos momentos em que os professores mencionavam o currículo da rede estadual que havia sido reestruturado, apesar de deixarem claro que da forma como ele foi organizado poderia propiciar uma boa formação em matemática para os estudantes.

Também foi possível observar que a utilização de exemplos presentes em livros didáticos é algo frequente na prática dos professores do Ensino Médio que participaram da

investigação. Um exemplo disso foi observado na resposta dada por P3GPEMB, quando lhe foi solicitado que descrevesse como era a sua aula:

[...] Poderia tentar, por exemplo, se eu for ensinar o conceito de função, como eu utilizo a ideia do conceito de função? Primeiro eu os faço entenderem que a função na verdade é uma relação binária, ele tem que compreender e pego normalmente a ideia do posto de gasolina que acho que é mais legal para eles entenderem que é uma coisa do dia a dia deles. Então quanto mais gasolina se põe, mais ele vai pagar; aí eu aproveito esse contexto para falar a questão da proporcionalidade, que a função na verdade é uma questão de proporcionalidade. Então o que é o abastecimento do carro? É o preço que ele paga em função da quantidade de gasolina que ele põe, aí depois eles mesmo vão generalizando e trazendo para o dia a dia deles.

O depoimento do professor mostra que ele recorre aos exemplos presentes nos materiais didáticos; todavia de maneira equivocada, ele diz que “função na verdade é uma questão de proporcionalidade”, e isso só é verdadeiro para as funções que são representadas algebricamente por  $y = kx$ , em que para qualquer valor de  $x$ ,  $\frac{y}{x} = k$ ; com  $k$  constante; nesse caso a proporcionalidade é direta. Já para as funções em que o registro algébrico é do tipo  $y = \frac{k}{x}$ , com  $k$  constante, existe uma proporcionalidade inversa. Apenas nesses dois casos particulares pode-se falar em proporcionalidade no que tange à noção de função. No entanto, existe uma gama imensurável de funções que não guardam qualquer relação com proporcionalidade. Além da recorrência a exemplos frequentemente presentes em materiais didáticos, foi possível notar a presença do fenômeno de compartimentalização ao associar a noção de função à proporcionalidade.

A diversidade do material coletado com as entrevistas com os professores do Ensino Médio permitiu encontrar indícios do quão importantes são os saberes construídos pelo professor na sua atuação diária, como pode ser observado no seguinte relato do mesmo docente:

[...] a minha graduação de matemática foi muito ruim. Então a gente não teve uma preparação legal, quando é que eu fui aprender de fato melhorar um pouquinho as minhas aulas? É com a prática, o dia a dia, depois saí buscando daqui, busca dali, eu fui aprendendo com o decorrer dos anos, mas eu saí da universidade extremamente tosco (chocho), não sabia como me virar, tive que ir aprendendo.

O discurso desse professor mostra a importância dos saberes adquiridos por ele no fazer diário de sua profissão, que Tardif (2011) chama de saberes experienciais. Segundo esse mesmo autor, ao ingressar na carreira o indivíduo sofre um choque ao saber que somente os

saberes disciplinares e curriculares obtidos no âmbito da universidade não são suficientes, ao se deparar com uma sala repleta de alunos. Como bem colocou o referido professor, somente a prática diária vai fazer com que o docente em início de carreira adquira os saberes relacionados à forma de lidar com os alunos em determinadas situações; esses saberes experienciais vão aos poucos se incorporando aos outros saberes, constituindo uma forma pessoal de atuar.

Já com os docentes que atuavam no Ensino Superior, foi possível apurar algumas particularidades referentes ao ensino e aprendizagem da noção de função diferentes daquelas evidenciadas com seus colegas do Ensino Médio, porém, também foi observada uma certa divergência na opinião dos dois professores quanto à maneira da introdução dessa noção. Isso fica evidente nos relatos apresentados a seguir:

PIGPS: [...] o professor que é formado para trabalhar hoje na pré-escola e primeiro ao quinto ano, se bem formado matematicamente nada impediria de que fosse começado um trabalho de observar relações entre dois conjuntos distintos, nessa faixa etária. Volto a insistir que nessa faixa etária não precisa fazer formalizações, mas eu preciso estudar os conceitos e um desses conceitos eu acho que poderia ser o conceito de função que é a relação existente entre dois conjuntos distintos de objetos, de categorias. [...], por exemplo, pedir para os alunos desde a pré-escola, para registrar ao final do intervalo, quanto tem de copinho plástico jogado no chão, quanto tem de papel jogado no chão, quanto tem de palito de sorvete jogado no chão. Eu posso fazer uma relação do dia da semana com cada um desses tipos de objetos que foram encontrados ou no chão ou dentro da lixeira da escola. Eu estou trabalhando um conceito, por exemplo, de separação de lixo para ensinar que alguns dos lixos ou algumas das coisas que a gente joga fora podem ser recicladas. Posso começar a observar que existe uma correlação entre o dia da semana e o tipo de lixo de maior frequência ou o tipo do dia da semana e a temperatura do dia com o tipo de lixo. Talvez um dia que está muito calor eu observo que lá tem mais palitos de sorvete e se a escola tiver uma cantina que venda sorvete [...]. Mas eu poderia querer mostrar para eles que posso pegar dois conjuntos diferentes e dias da semana, por exemplo, e objetos e estabelecer algum tipo de correspondência entre esses conjuntos que no fundo é um conceito de função na qual se trabalha.

P2GPS: Ser trabalhado a partir do Ensino Fundamental, quando você coloca a perspectiva da linguagem algébrica, e aí trabalhar a partir da configuração dos pares ordenados e a lei de associação entre os pontos.

O primeiro professor, ao mencionar que o conceito de função pode ser introduzido a partir da pré-escola, quando a criança começa a fazer relações, propondo situações nas quais ela possa relacionar elementos de dois conjuntos distintos, sem fazer nenhum tipo de abordagem formal, demonstra que entende função como uma relação que não precisa necessariamente ser representada por uma expressão analítica, o que se aproxima bastante da

posição de Dirichlet ao se afastar da expressão analítica enfatizando a relação entre elementos de dois conjuntos, para em seguida apresentar a definição de função. Este posicionamento do professor aponta para uma concepção que, segundo Sfard (1992), pode ser classificada como estrutural.

Por seu turno, o segundo professor, ao dizer que o conceito de função pode ser trabalhado a partir do Ensino Fundamental, quando é introduzida a linguagem algébrica, mostra que a sua concepção de tal conceito está fortemente ligada à representação algébrica do objeto, o que pode indicar uma imagem do conceito um pouco destorcida da sua definição, acarretando uma concepção que, de acordo com Sfard (1992), pode ser chamada de pseudoestrutural.

Apesar das divergências quanto à introdução da noção de função marcando certa diferença na maneira de conceber esse objeto matemático, os relatos das entrevistas deixaram evidente que ambos os docentes apresentam seus saberes curriculares bastante consolidados, pois em vários momentos deixavam claro que eram favoráveis a reestruturações no que tange ao ensino de Matemática em todos os níveis, e principalmente nos cursos de formação inicial de professores, que é o momento em que o indivíduo vai adquirir saberes disciplinares que ajudarão na construção do alicerce que será a base da construção do “eu profissional”. Porém, eles reconhecem que tais reformulações não acontecem da noite para o dia, e que por trás disso está em jogo uma série de fatores políticos e sociais que não dependem única e exclusivamente do professor.

## **CONSIDERAÇÕES FINAIS**

A pesquisa configurou-se num grande exercício de interpretação e reflexão, em razão do volume de informações coletadas e da complexidade do tema, que exigiu uma articulação entre diferentes ideias teóricas.

O ensino e a aprendizagem de conceitos matemáticos, especificamente o de função, envolvem em seu desenrolar aspectos particulares de cada um dos atores que estão em cena, e alguns deles possibilitam determinar com bastante clareza a qual sujeito se refere. No entanto, existem outros aspectos que estão presentes tanto no fazer do professor quanto nas produções dos alunos que levam a inferir que muito do que é feito pelos estudantes é fruto da prática docente.

Ao entrar em contato com um novo conceito, inicialmente o estudante cria em sua mente uma imagem de tal conceito, que normalmente tem alguma relação com ele, que muitas

vezes não condiz com a sua definição. Assim, aspectos relacionados ao ensino constituem-se em elementos fundamentais para que essa imagem inicial ao longo do tempo seja modelada pela definição do conceito, propiciando a compreensão.

Neste sentido, os saberes daquele que ensina entram em jogo, e cabe a esse sujeito proporcionar situações de aprendizagem que levem os estudantes a construir uma imagem do conceito que seja condizente com a sua definição. Contudo, apenas conhecer o conteúdo a ser ensinado pode não garantir a aprendizagem dos alunos; o ofício de ensinar exige do docente uma gama de saberes, sendo que muitos deles são incorporados à sua prática ao longo de sua carreira no magistério, constituindo um “eu profissional” carregado por suas crenças e concepções; e isso envolve peculiaridades inerentes a cada sujeito que se constituem em “macetes” que fazem com que cada indivíduo tenha seu jeito particular de atuação pedagógica.

A forma particular de atuar possivelmente influencia no aprendizado, fazendo com que aos poucos o aprendiz incorpore em sua forma de pensar certos aspectos, e, conseqüentemente, o seu fazer matemática e as concepções explicitadas passam a estar intimamente ligados à atuação do professor, que envolve uma diversidade de saberes, como os disciplinares, curriculares profissionais e experienciais.

Considerando que essa forma particular de atuar inerente de cada professor, fruto dos seus diferentes saberes, também envolve suas concepções, e que isso de alguma forma se reflete no aprendizado dos alunos, então, identificar tais concepções permite entender aspectos do movimento que ocorre no processo de ensino e aprendizagem, como também quais delas perpassam esse processo. Nesse sentido, uma classificação das diferentes concepções evidenciadas nos sujeitos envolvidos no processo (professor e aluno) é pertinente para a identificação delas.

Entretanto, procurar identificar concepções e classificá-las não foi tarefa simples, pois muitos indivíduos, e principalmente aqueles em que a compreensão de função estava em processo de construção, mostraram estar passando por uma fase de transição da concepção operacional para a estrutural e, como toda transição cognitiva, o encadeamento não segue uma única direção. Isso dificultou, em muitos casos, determinar com certeza se a concepção de função que o indivíduo apresentava era operacional ou estrutural.

A concepção operacional foi facilmente identificada e mais frequente na maioria dos estudantes, principalmente nos do Ensino Médio, desveladas no teste I. No entanto, a evolução apresentada por eles no teste II, em especial os do Ensino Superior, culminou em um

tipo de concepção que trazia em seu bojo aspectos da estrutural. Todavia, para se chegar à tal concepção, a evolução do conceito no indivíduo deve passar por três estágios: a interiorização, a condensação e a reificação, sendo este último indispensável para uma concepção estrutural, pois, se não existir a reificação, todo processo é puramente operacional. Assim, em grande parte dos estudantes do Ensino Médio foi possível notar no teste II um tipo de concepção intermediária que estava entre a operacional e a estrutural, a pseudoestrutural. Já nos estudantes do Ensino Superior a classificação do tipo de concepção não foi tão simples, pois a consistência de algumas respostas apontava para a concepção estrutural, porém, em virtude de certas limitações dos instrumentos de coleta, não foi possível identificar se esses sujeitos atingiram ou não a reificação.

Considerando que as concepções operacional e estrutural são complementares e que dependendo da situação em que o sujeito se encontra ele pode passar de uma para outra quantas vezes for necessário, alguns professores, em seus relatos nas entrevistas, manifestaram concepções de função bastante próximas da estrutural enquanto outros revelaram a operacional e pseudoestrutural.

Todas as reflexões feitas aqui levam a concluir que conceber um objeto matemático constitui-se em um processo que envolve aspectos que vão além dos saberes referentes ao conteúdo propriamente dito, principalmente quando o sujeito que o concebe é o professor que carrega consigo suas crenças e outros saberes que vão sendo incorporados à sua prática ao longo da carreira. Sob esse prisma, fica evidente que a Educação Matemática como área produtora de conhecimentos científicos necessita de outros estudos que investiguem as concepções de função e coloquem em um mesmo plano professores e alunos.

## REFERÊNCIAS

DUVAL, R. **Semiósis e pensamento humano**: registro semiótico e aprendizagens intelectuais. Tradução de Lênio Fernandes Levy e Marisa Rosâni Abreu da Silveira. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

PIRES, R. F. **Função**: Concepções de professores e estudantes dos ensinos Médio e Superior. 2013. 439 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2014.

SÃO PAULO. Secretaria de Estado da Educação. **Caderno do professor**: Ensino Médio. 1.<sup>a</sup> série. São Paulo: SEE, 2009. v. 2.



SFARD, A. On the Dual Nature of Mathematical Conceptions: Reflections on process as different sides of the same coin. **Education Studies in Mathematics**. v. 22 , n. 1 N, Londres, 1991.

\_\_\_\_\_. Operational Origins of Mathematical Objects and the quandary of reification – The case of function. In: DUBINSKY, E.; HAREL, G. (Ed.). The concept of function – Aspects of epistemology and pedagogy, **MAA Notes** 25, pp. 59-84, 1992.

SIERPINSKA, A. On understanding the notion of function. In: DUBINSKY, E.; HAREL, G. (Ed.). The concept of function – Aspects of epistemology and pedagogy, **MAA Notes** 25, pp. 25-58, 1992.

TARDIF, M. **Saberes docentes e formação profissional**. Tradução de Francisco Pereira. 12. ed. Petrópolis, RJ: Vozes, 2011.

VINNER, S. The function concept as a prototype for problems in mathematics learning. In: DUBINSKY, E.; HAREL, G. (Ed.). The concept of function – Aspects of epistemology and pedagogy, **MAA Notes** 25, pp. 195-214, 1992.