PROPORCIONALIDADE:

eixo de conexão entre conteúdos matemáticos

Manoel dos Santos Costa
Doutor em Ensino de Ciências e Matemática
Universidade Ceuma – Maranhão – Brasil
Manoel.costa@ceuma.br
Norma Suely Gomes Allevato
Doutora em Educação Matemática
Universidade Cruzeiro do Sul – São Paulo – Brasil
normallev@gmail.com

RESUMO
O presente estudo tem como objetivo apresentar a proporcionalidade como eixo de conexão entre os conteúdos matemáticos. Para isso, analisamos como (futuros) professores de Matemática em formação inicial aplicam o conceito de proporcionalidade na resolução de três problemas: um envolvendo a Trigonometria; outro, o Teorema de Tales; e o terceiro, a função afim. O estudo é de natureza qualitativa e os dados foram coletados através das observações realizadas durante as resoluções, em um curso de formação. Os resultados mostram que a carência de conhecimentos não era apenas com relação aos conteúdos; os licenciandos também tinham dúvidas em relação a "quando" (ano escolar) e "como" deveriam ensinar tal conteúdo. Observamos que o conceito de proporcionalidade ainda é marcado por um ensino "mecanicista", tendo, na maioria das vezes, o algoritmo da regra de três como "única" estratégia de resolução de problemas. No entanto, os (futuros) professores foram mobilizando novas estratégias de resolução de problemas (tabelas, gráficos, expressões numéricas e algébricas), empregando tanto o pensamento quantitativo (que envolve a manipulação e os algoritmos numéricos), quanto o qualitativo (que analisa e explica as estratégias utilizadas na resolução). Ou seja, os licenciandos construíram novos conhecimentos com relação ao conteúdo estudado (proporcionalidade), principalmente em relação às conexões com outros ramos da Matemática.

Palavras-Chave: formação de professores. Educação matemática. Resolução de problemas. Eixo de conexões. Proporcionalidade.

PROPORTIONALITY:

axle of connection among mathematical contents

ABSTRACT
The purpose of the present study is to present proportionality as an axle of connection among the mathematical contents. For that, we analyzed how (future) Mathematics teachers in initial training apply the concept of proportionality in the resolution of three problems: the first involving Trigonometry, the second, Thales Theorem and the third, the linear function. The study has a qualitative approach and the data were collected by observations during the resolutions in a training course. The results show that the lack of knowledge was not only related to the contents; the students also had doubts about "when" (school year) and "how" they should teach such content. We have observed that the concept of proportionality is still marked by a "mechanistic" teaching, in which, most of times, the algorithm of rule of three is the "only" strategy for problem solving. However, the

(future) teachers mobilized new strategies for problem solving (charts, graphs, numerical and algebrical expressions) by using both the quantitative thought (which involves the manipulation and numerical algorithms) and the qualitative one (which analyses and explains the strategies used in the resolution). In other words, the students built new knowledge related to the content studied (proportionality), mainly regarding the connections with other Mathematics branches.

Keywords: teacher of training. Mathematics education. Axle of connections. Proportionality.

INTRODUÇÃO

Muitos são os fenômenos da realidade que podem ser descritos por modelos de proporcionalidade e, por isso, o apelo à utilização do raciocínio proporcional nas tarefas do dia a dia. O raciocínio proporcional é de vital importância na resolução de problemas ligados ao cotidiano dos alunos, nos vários eixos da Matemática, como a Álgebra e a Geometria, por exemplo, e também em outras áreas como a Química, a Geografia etc. (CRAMER; POST; BEHR, 1989; TINOCO, 1996; PONTE, 2006).

Particularmente, para este artigo, cujo objetivo é apresentar a proporcionalidade como eixo de conexão entre os conteúdos matemáticos, utilizamos três problemas[1], um em conexão com a Trigonometria, outro com o Teorema de Tales e o terceiro em conexão com a função afim (dada por $f(x)=mx+b$, com $m, b \in \mathbb{R}$, $m \neq 0$, também denominada função polinomial do 1.º grau). Trata-se de um trabalho de natureza qualitativa. Esse tipo de pesquisa tem como objetivo principal interpretar o fenômeno que observa, utilizando para a análise dos dados descrições detalhadas e interpretação. Além disso, esse tipo de pesquisa é mais participativa e, portanto, menos controlável; os sujeitos podem direcionar o rumo da pesquisa em suas interações com o pesquisador, pois faz parte da obtenção dos dados o contato direto e interativo do pesquisador com o objeto de estudo, com os sujeitos e com a situação a ser estudada (GOLDENBERG, 2007).

A pesquisa foi realizada com (futuros) professores de Matemática, alunos de uma universidade pública do estado do Maranhão, durante alguns encontros de formação. Durante a coleta dos dados utilizamos dois instrumentos: (1) a observação participante, em que "a coleta é realizada junto aos comportamentos naturais das pessoas quando estas estão conversando, ouvindo, trabalhando, estudando em classe, comendo..." (FIORENTINI; LORENZATO, 2009, p. 107); e (2) a análise documental, que é realizada com documentos originais escritos "que ainda não receberam nenhum tratamento analítico" (HELDER, 2006,

[1] O foco deste trabalho não é a resolução de problemas, no entanto, o leitor interessado nessa temática poderá encontrá-la melhor discutida em Costa e Allevato (2010).

p. 1). Em nosso trabalho, essa análise foi realizada nas resoluções escritas dos problemas apresentados pelos licenciandos.

O presente trabalho encontra-se organizado em quatro seções principais, além desta introdução. Iniciamos apresentando, na primeira seção, a importância da proporcionalidade no ensino de Matemática, seguida de uma abordagem da proporcionalidade de acordo com os documentos oficiais. A terceira seção trata da proporcionalidade como eixo de conexão entre os conteúdos matemáticos. E na quarta seção, intitulada "conexão entre a proporcionalidade e outros conteúdos matemáticos", apresentamos os problemas resolvidos pelos (futuros) professores em que buscamos apresentar as possíveis articulações entre os conteúdos em estudo. Finalizamos, apresentando nossas considerações finais e as referências.

A IMPORTÂNCIA DA PROPORCIONALIDADE NO ENSINO DE MATEMÁTICA

A proporcionalidade é um dos conceitos matemáticos com que mais nos deparamos no cotidiano, pois são frequentes as situações para as quais necessitamos mobilizar processos que coloquem em prática as noções relacionadas a esse conceito.

Apesar de terem contato quase que diariamente com situações de proporcionalidade, os alunos tendem a apresentar algumas dificuldades em compreender o conceito; ajudá-los a desenvolver o raciocínio proporcional tem sido um grande desafio no período escolar, sendo essencial ao aprendizado de diversas disciplinas do Ensino Fundamental, Médio e Superior. Dessa forma, o conceito de proporcionalidade é fundamental, tanto no contexto escolar como no cotidiano das pessoas, nas mais diversas situações, envolvendo desde interpretar estatísticas e gráficos até fazer análises de plantas de imóveis ou mapas, ampliar ou reduzir fotos, entre outras (TINOCO, 1996).

Concordando com essas ideias, Maranhão e Machado (2011, p. 142) afirmam que

> A proporcionalidade é um tema indubitavelmente importante em Matemática e outras Ciências em âmbito escolar, e em diversas situações da atividade humana. Por isso, o pensamento proporcional tem sido objeto de estudo em Educação Matemática e em suas especialidades, a Psicologia da Educação Matemática, há várias décadas.

Nesse sentido, podemos observar a importância da proporcionalidade como eixo articulador entre os conteúdos matemáticos e em contextos que relacionam a Matemática a outras áreas do conhecimento. Através de um ensino que enfatize a inter-relação entre diversas ideias matemáticas, os alunos não só aprendem Matemática, como também aprendem a reconhecer sua utilidade (NCTM, 2007).

A compreensão das conexões dentro e entre os conteúdos matemáticos faz com que as dificuldades encontradas pelos alunos em compreender a Matemática Escolar sejam diminuídas. Eles percebem sua funcionalidade como forma de observação, representação e interpretação, e aumentam sua capacidade de aplicar os conceitos aprendidos. Por isso, "quando os alunos aprendem conceitos matemáticos isolados de um contexto, depressa esquecem o seu significado. Quando aprendem Matemática ligada a situações do mundo real, ficam aptos a reconhecer e aplicar os conceitos em novas situações" (NCTM, 1991, p. 34).

No entanto, alguns estudos (TINOCO, 1996; SCHLIEMANN; CARRAHER, 1997) apontam que a aplicação do conceito de proporcionalidade nas escolas se restringe quase que exclusivamente à utilização da regra de três, baseando-se apenas nas propriedades de razões equivalentes, ou seja, dadas duas razões equivalentes $a/b = c/d$, se as igualdades $a/b = c/d$ e $a.x = b.c$ são verdadeiras, portanto, $x = b. c/a$

Segundo os autores, se o professor, em seu trabalho com o conteúdo, utiliza apenas esse tipo de estratégia está deixando de explorar as relações existentes entre as grandezas e, com isso, os alunos perdem a oportunidade de desenvolver o raciocínio proporcional. É recomendável identificar as características, isto é, as relações numéricas apresentadas em cada situação, assim como o fator invariante que permite exprimir a relação matematicamente. Dessa forma, entendemos que em problemas envolvendo o conceito de proporcionalidade devemos explorar as relações existentes entre as grandezas consideradas, bem como enfatizar a relação desse conceito com outros conceitos matemáticos.

No entanto, tradicionalmente, o tema proporcionalidade é apresentado aos alunos somente no 7º ano do Ensino Fundamental, e não raro é abordado de modo fragmentado, sem tratar das conexões, da seguinte forma: (1) definição de razão; (2) definição de proporção como igualdade de razões; (3) propriedades das razões; (4) grandezas diretamente proporcionais; (5) grandezas inversamente proporcionais; (6) regra de três simples; (7) regra de três composta e (8) juros simples.

Segundo Oliveira e Santos (1999, p. 2),

> No Brasil, o estudo da proporcionalidade ocorre, muitas vezes, de uma maneira fragmentada, onde cada assunto do capítulo referente ao tema proporcionalidade é visto como objeto de estudo em si mesmo, provocando a transformação de ferramenta de resolução a objeto de estudos, o que ocorre, especificamente com a regra de três.

Com relação a esse tipo de abordagem, Tinoco (1989) comenta que os alunos têm dificuldades de entendimento e uso da ideia de proporção na acepção tradicional, isto é, como sendo a igualdade entre duas razões; por isso, a autora defende que “o mais importante é que ao utilizá-lo, o aluno saiba porque pode utilizá-lo” (TINOCO, 1989, p. 16). Alguns pesquisadores (HOFFER, 1988; HELLER; AHLGREN; POST, 1989) também definem o termo proporção como sendo uma igualdade entre duas razões. Para Vergnaud (1988), a proporção é uma relação multiplicativa entre as quantidades de dois espaços-medidas. Em estudos mais recentes (VAN DE WALLE, 2009), o conceito de proporcionalidade é apresentado em sua origem bastante simples, nada mais é do que a declaração de igualdade entre duas relações, ou seja, a relação entre duas variáveis (grandezas) proporcionais.

Assim, a proporcionalidade não é apenas um conteúdo matemático, mas um ‘formador’ de estruturas cognitivas para a compreensão de outros importantes conceitos matemáticos, tanto nas questões numéricas, como naquelas que envolvem Medidas e Geometria.

Desse modo, o conceito de proporcionalidade tem sido de muito interesse em estudos da Psicologia no que se refere ao desenvolvimento cognitivo de alunos em fase escolar ou não. Esse interesse se dá porque a proporcionalidade possibilita a resolução de problemas matemáticos que abrangem diversos contextos, não se restringindo apenas aos de sala de aula (COSTA JUNIOR, 2010). Segundo o autor, resolver problemas que envolvem o conceito de proporcionalidade é muito mais que aplicar algoritmos, como a regra de três, por exemplo, normalmente associada à proporcionalidade. A compreensão desses problemas requer o estabelecimento de relações existentes entre as grandezas. É nesse sentido que Silvestre e Ponte (2009) afirmam que esse conceito pode ser apresentado aos alunos como sendo uma igualdade entre duas razões $a/b = c/d$, ou como uma função linear, dada por $y=m.x$, com $m \neq 0$. De acordo com os autores, essa segunda abordagem envolve a exploração intuitiva da proporcionalidade como função linear desde os primeiros anos da escolaridade e adquire precedência sobre a noção de igualdade entre razões.

Castro Filho et al. (2006) identificaram duas hipóteses para as causas das dificuldades dos alunos na apropriação desses conceitos: (1) a complexidade própria relativa a eles; (2) a forma como são ensinados nas escolas. No entanto, encontramos na literatura alguns estudos (VERGNAUD, 1996; NUNES; BRYANT, 1997) mostrando que superar a complexidade dos esquemas de multiplicação e divisão não é suficiente para a compreensão do conceito de proporcionalidade. Para os autores, é preciso desenvolver o raciocínio proporcional, ao qual

Spinillo (1997) associa a habilidade de analisar situações, estabelecer relações e derivar valores.

Em relação à segunda hipótese (a forma como esses conceitos são ensinados na escola), percebemos que, geralmente, a forma como o professor trabalha é fundamentada no modelo da igualdade entre razões, classificada atualmente como uma abordagem tradicional que é difundida pela maioria dos livros didáticos, principal ferramenta de ensino do professor. Além disso, o professor, com frequência, adota a regra de três como "única" estratégia para a resolução dos problemas apresentados (COSTA JUNIOR, 2010).

A PROPORCIONALIDADE NOS DOCUMENTOS OFICIAIS

O ensino de proporcionalidade vem sendo abordado no Ensino Fundamental a partir do 7º ano do Ensino Fundamental, como é proposto pelos PCN – Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998). Encontramos essa mesma indicação nas Propostas Curriculares de Matemática do Estado do Maranhão (MARANHÃO, 2000).

As orientações oficiais também fornecem elementos para que o trabalho docente e a aprendizagem considerem o aspecto integrado e integrador dos conteúdos. Partindo de uma determinada situação ou de um determinado assunto, deve-se procurar evidenciar as conexões entre os conteúdos. Uma compreensão mais profunda da Matemática só é verificada quando os alunos percebem suas conexões; quando percebem que estão falando "da mesma coisa" sob pontos de vista diferentes. De acordo com os PCN, "o saber matemático não tem se apresentado [aos alunos] como um conjunto de conceitos inter-relacionados, que lhes permite resolver um conjunto de problemas, mas como um interminável discurso simbólico, abstrato e incompreensível" (BRASIL, 1998, p. 40).

Contudo, os PCN apresentam alguns objetivos para o ensino de Matemática nos anos finais do Ensino Fundamental, dos quais destacamos aqueles que se referem ao ensino de proporcionalidade. Segundo o documento, no 7º ano, o ensino deve visar ao desenvolvimento:

> Do raciocínio que envolva a proporcionalidade, por meio da exploração de situações de aprendizagem que levem o aluno a:
>
> • observar a variação entre grandezas estabelecendo relação entre elas e construir estratégias de solução para resolver situações que envolvam a proporcionalidade. (BRASIL, 1998, p. 65).

Ainda, a partir do 8º ano, o objetivo do ensino de proporcionalidade deve visar ao desenvolvimento:

> Do raciocínio proporcional, por meio da exploração de situações de aprendizagem que levem o aluno a:
> • representar em um sistema de coordenadas cartesianas a variação de grandezas, analisando e caracterizando o comportamento dessa variação em diretamente proporcional, inversamente proporcional ou não proporcional;
> • resolver situações-problema que envolvam a variação de grandezas direta ou inversamente proporcionais, utilizando estratégias não-convencionais e convencionais, como as regras de três. (BRASIL, 1998, p. 82).

Esses objetivos são justificados pelos próprios PCN através das "orientações aos conteúdos propostos", separando-os por blocos. A proporcionalidade encontra-se inserida no bloco intitulado Números e Operações. Para o estudo desse conteúdo no 7º ano, o documento sugere a proposição de situações-problema que possibilitem o desenvolvimento do sentido numérico e a compreensão do significado das operações, e justifica: "o fato de que muitas situações da vida cotidiana funcionam de acordo com as leis da proporcionalidade, evidencia que o desenvolvimento do raciocínio proporcional é útil na interpretação de fenômenos do mundo real [...]" (BRASIL, 1998, p. 67).

Desse modo, no desenvolvimento dos conteúdos envolvidos no bloco Números e Operações, os PCN indicam que é de fundamental importância que sejam feitas relações com outros eixos temáticos, como por exemplo, da proporcionalidade com os conteúdos do bloco Espaço e Forma, ou seja, com a Geometria. Do ponto de vista prático, isso ajuda na interpretação, na compreensão e nas generalizações a partir de situações-problema envolvendo leitura de plantas e mapas, equivalência e semelhança de figuras, e até ampliação e redução de figuras. E complementa: "É importante que essas atividades sejam conduzidas de forma que mantenham ligações estreitas com o estudo de outros conteúdos, em particular com as atividades numéricas, métricas e com a noção de proporcionalidade" (BRASIL, 1998, p. 69).

Assim, para desempenhar um papel de mediador entre o conhecimento matemático e o aluno, o professor precisa ter um sólido conhecimento dos conceitos e procedimentos dessa área (BRASIL, 1998). Dentre os conceitos e procedimentos apresentados pelos PCN para o desenvolvimento de habilidades com os conteúdos do bloco Números e Operações, nos anos finais do Ensino Fundamental, destacaremos, no Quadro 1 a seguir, alguns referentes ao conteúdo proporcionalidade.

Quadro 1: Conceitos e Procedimentos

Habilidades: conteúdo proporcionalidade

• Reconhecimento de números racionais em diferentes contextos – cotidianos e históricos – e exploração de situações-problema que indicam relação parte/todo, quociente, razão, ou funcionam como operador.

• Resolução de situações-problema que envolvam a ideia de proporcionalidade, incluindo os cálculos com porcentagens, pelo uso de estratégias não convencionais.

• Compreensão da noção de variável pela interdependência da variação de grandezas.

• Identificação da natureza da variação de duas grandezas direta ou inversamente proporcionais ou não (afim ou quadrática), expressando a relação existente por meio de uma sentença algébrica e representando-a no plano cartesiano.

• Resolução de Problemas que envolvam grandezas diretamente proporcionais ou inversamente proporcionais por meio de estratégias variadas, incluindo a regra de três.

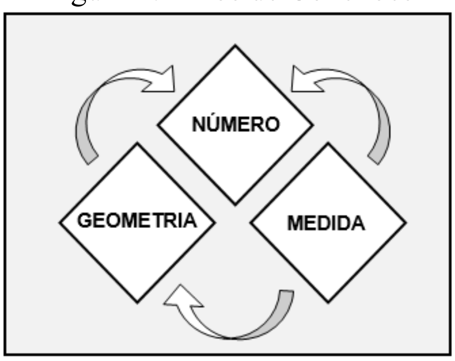
Fonte: Adaptação dos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998).

De acordo com os PCN (BRASIL, 1998), o objetivo do ensino de proporcionalidade é que o aluno consiga, com o desenvolvimento dessas habilidades, fazer o reconhecimento dos números racionais em diferentes contextos, principalmente se explorados através da resolução de problemas envolvendo proporcionalidade.

Os documentos também apontam a proporcionalidade como sendo uma das ideias fundamentais da Matemática, que deve ser trabalhada a partir do 7º ano do Ensino Fundamental. No entanto, as estratégias de resolução de problemas envolvendo proporcionalidade, recomendadas pelo documento são as não convencionais, as quais não são citadas, e as convencionais, das quais apontam somente as regras de três, conforme podemos constatar nas habilidades apresentadas no quadro 1 acima e que, também, estão enunciadas no documento (BRASIL, 1998).

Analisando a Proposta Curricular do Estado do Maranhão (MARANHÃO, 2000), constatamos que ela sugere a sistematização dos conteúdos matemáticos articulada a três grandes eixos: Número, Geometria e Medidas, conforme mostra a Figura 1 a seguir:

Figura 1: Eixos de Conexões



Fonte: Proposta Curricular (MARANHÃO, 2000, p. 28)

Segundo o documento, o estudo de proporcionalidade a ser desenvolvido no Ensino Fundamental envolve diferentes categorias: números naturais, inteiros, racionais, irracionais e reais. Contudo, a ampliação do seu conceito acontecerá à medida que se for vivenciando situações do dia a dia que envolvam grandezas direta e inversamente proporcionais (juros, porcentagem, regra de três), aparecendo no eixo temático - números, conforme o Quadro 2:

Quadro 2: Eixo Temático

Números: proporcionalidade
• Resolução de problemas em situações do dia a dia
• Grandezas direta e inversamente proporcionais
▪ juros
▪ porcentagem
▪ regra de três

Fonte: Proposta Curricular do Estado do Maranhão (MARANHÃO, 2000).

Desse modo, observamos que a proporcionalidade é um dos conteúdos matemáticos que têm lugar de destaque nos documentos oficiais: PCN (BRASIL, 1998) e Proposta Curricular Estadual para Ensino de Matemática (MARANHÃO, 2000). Podemos notar isso através dos objetivos de ensino e dos conteúdos propostos por esses documentos. A proporcionalidade é explicitamente citada como eixo matemático que deve ser trabalhado estabelecendo conexões com outros conceitos matemáticos: razões, semelhança de triângulos, propriedade de figuras, campos numéricos, e com outras áreas do conhecimento. Observamos isso nas "orientações didáticas" dos PCN referentes a Espaço e Forma, Grandezas e Medidas e Tratamento da Informação para os anos finais do Ensino Fundamental (6º ao 9º ano).

A PROPORCIONALIDADE COMO EIXO DE CONEXÃO ENTRE OS CONTEÚDOS MATEMÁTICOS

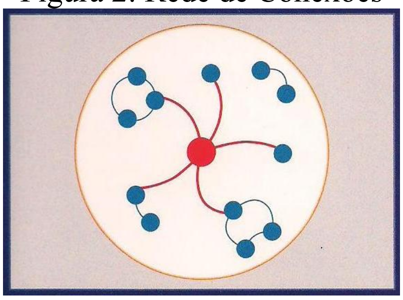
Embora a Matemática seja apresentada aos alunos frequentemente de forma isolada, vale ressaltar que não se trata de um conjunto de temas soltos, apesar de ser tratada dessa forma nas escolas. Ao contrário, a Matemática é um campo de estudo integrado; portanto, ver a Matemática como um todo leva à necessidade de estudar e pensar nas conexões existentes entre os diversos eixos temáticos dessa área de ensino.

De acordo com o NCTM (2007)[2], pensar sobre os conteúdos matemáticos envolve também pensar na procura de conexões que consolidem a compreensão e os conhecimentos da Matemática. Caso não se estabeleçam conexões, os alunos tendem a memorizar os conceitos e, dessa forma, a aprender os conteúdos de modo fragmentado. Ainda segundo o documento, importantes conteúdos matemáticos (por exemplo, a proporcionalidade, as funções, os conteúdos de Geometria) estão inter-relacionados, de modo que à medida que os alunos vão se deparando com "novos" e diversificados conteúdos, podem encontrar oportunidades de utilizar e estabelecer conexões entre eles.

Além disso, os contextos reais do cotidiano proporcionam oportunidades para que os alunos estabeleçam conexões entre aquilo que aprendem na escola e seu ambiente fora dela, e experiências vividas pelos alunos favorecem contextos para tarefas matemáticas bastante relevantes. É importante que o desenvolvimento dos alunos se realize através de suas experiências, ligando a matemática informal e intuitiva com a matemática que os alunos aprendem nas escolas (NCTM, 2007).

Nessa perspectiva, Ponte (2002) afirma que no ensino dos conteúdos matemáticos não se pode dar ênfase apenas aos conceitos isolados; ele precisa priorizar também as relações e as conexões entre eles, construindo, assim, um conhecimento amplo e diversificado. Além disso, quando os alunos conseguem estabelecer conexões entre ideias matemáticas, a sua compreensão é mais profunda e duradoura, conforme indica Van de Walle (2009) na Figura 2.

Figura 2: Rede de Conexões



Fonte: Van de Walle (2009, p. 43)

Na figura acima, os pontos azuis representam as ideias que os alunos já têm e que servem para construir uma nova ideia (ponto vermelho). Desenvolve-se, assim, uma rede de conexões entre elas. Portanto, quanto mais ideias forem usadas e mais conexões forem formadas, melhor será a compreensão do conteúdo (VAN DE WALLE, 2009).

No entanto, percebemos, não raro, os conteúdos sendo "ensinados" de forma isolada, separadamente, sem que haja conexão entre os conhecimentos geométricos e algébricos, por

---

[2] Trata-se de uma tradução portuguesa do documento original *Principles and Standards of School Mathematics*, publicado pelo NCTM no ano de 2000.

exemplo. As técnicas e os algoritmos matemáticos são mais valorizados que os procedimentos e/ou as estratégias criadas pelos alunos. Sendo assim, seria interessante que os professores introduzissem em suas aulas essas conexões, de variadas maneiras e em diversas situações, nas quais os alunos se deparem com a Matemática dentro e fora da escola. Deveriam explicitar as relações existentes dentro do próprio conteúdo e com outros conteúdos matemáticos, por exemplo, entre a Geometria e a Álgebra, Proporcionalidade e Medidas, Geometria e Proporcionalidade. Os professores deveriam planejar suas aulas de modo que os conteúdos/conceitos matemáticos fossem apresentados, não como tópicos isolados, mas valorizando as experiências trazidas pelos alunos para a sala de aula.

Finalmente, tendo desenvolvido estas reflexões acerca da proporcionalidade como sendo um conteúdo unificador entre os conteúdos matemáticos, apresentamos na próxima seção as possíveis conexões e discussões a partir dos problemas matemáticos, desenvolvidas com (futuros) professores de Matemática em um curso de formação.

FUTUROS PROFESSORES PERCEBENDO CONEXÕES ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMA

Nesta seção, apresentamos e analisamos três problemas, propostos com o objetivo de verificar como os (futuros) professores exploram o conceito de proporcionalidade, por meio da conexão com outros conteúdos matemáticos.

Para resolução desses problemas utilizamos a metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação através da resolução de problemas[3]. Segundo Van de Walle (2009), a resolução de problemas deve ser vista como a principal estratégia de ensino, de modo que o ensino e a aprendizagem de um tópico matemático deve começar com um problema que expressa aspectos-chave desse tópico e técnicas matemáticas devem ser desenvolvidas na busca de solução ao problema proposto.

No entanto, de acordo com Allevato e Onuchic (2009), colocar em prática essa metodologia de ensino em sala de aula não é fácil; professores e alunos não estão acostumados a esse tipo de desafio. Sendo assim, tanto os alunos quanto o professor precisam romper com vícios e práticas já cristalizadas e, portanto, mais cômodas. Buscando organizar

[3] Trata-se de uma metodologia em que os problemas propostos são o ponto de partida da atividade matemática e não a definição (ALLEVATO; ONUCHIC, 2009). O termo "resolução de problemas refere-se a tarefas matemáticas que têm o potencial de proporcionar desafios intelectuais para melhorar o entendimento e desenvolvimento matemático dos estudantes" (CAI; LESTER, 2012, p. 148).

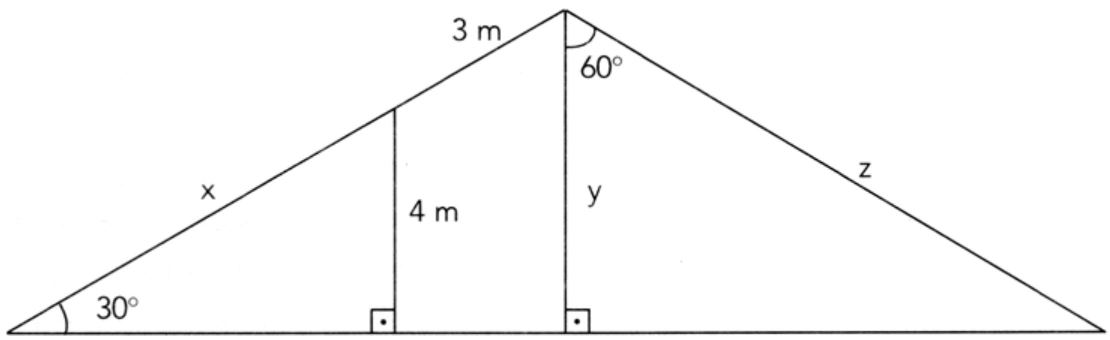
orientações para ajudar os professores a trabalharem os conteúdos matemáticos através da resolução de problemas em suas aulas, as autoras dividiram a metodologia em algumas etapas: (1) Preparação do problema, (2) Leitura individual, (3) Leitura em conjunto, (4) Resolução do problema, (5) Observar e incentivar, (6) Registro das resoluções na lousa, (7) Plenária, (8) Busca do consenso e (9) Formalização do conteúdo[4].

Assim, desenvolvidos, os conteúdos matemáticos aprendidos fazem sentido para o aluno, que passa a ser protagonista na construção do seu próprio conhecimento. Ao contrário do que se observa nas aulas ditas "tradicionais" e inclusive nos livros didáticos, os problemas não são mais deixados para o final do processo. Eles são, sim, propostos no início das atividades e a aprendizagem vai se realizar a partir e ao longo (através) de sua resolução.

A seguir apresentamos o primeiro problema em que procuramos estabelecer conexão da proporcionalidade com a trigonometria no triângulo retângulo.

Problema 1: proporcionalidade e trigonometria

Calcule os valores de x, y e z na figura:



Fonte: Dante (2004).

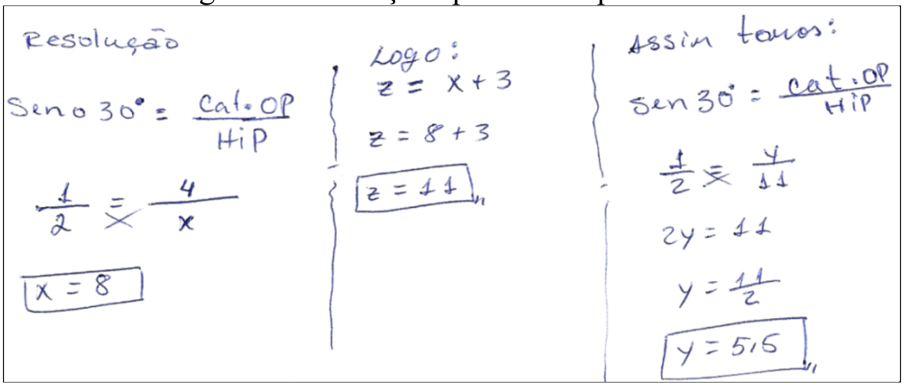
Com esse problema procuramos estabelecer conexão da proporcionalidade com a trigonometria no triângulo retângulo. Para o desenvolvimento desta atividade, seguimos as etapas sugeridas por Allevato e Onuchic (2009) para o trabalho com resolução de problemas em sala de aula. Com as dúvidas esclarecidas, solicitamos aos licenciandos que resolvessem o problema individualmente.

A seguir, algumas das resoluções apresentadas pelos (futuros) professores[5]:

[4] Após a realização da presente pesquisa, uma nova versão deste roteiro já foi idealizada pelas autoras e pode ser encontrada em Allevato e Onuchic (2014).

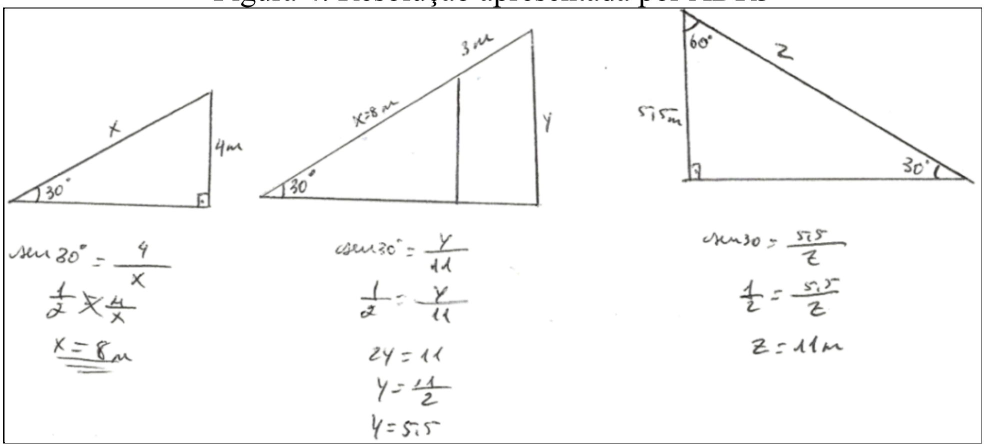
[5] Com o intuito de resguardar a identidade dos (futuros) professores, utilizaremos pseudônimos ADR1, ADR2, ..., ADRn, para identificá-los.

Figura 3: Resolução apresentada por ADR1



Fonte: Arquivo dos pesquisadores

Figura 4: Resolução apresentada por ADR3



Fonte: Arquivo dos pesquisadores.

ADR1 e ADR3 utilizaram a mesma estratégia; buscaram as relações trigonométricas existentes no triângulo retângulo, que admite três casos, seno, cosseno e tangente. O que diferencia essas duas resoluções é que o primeiro (ADR1) resolveu o problema indo direto aos cálculos, enquanto que o segundo partiu do desenho dos triângulos, informando suas medidas, para, em seguida, começar a resolver.

Ao questionarmos esses dois participantes sobre o que eles acharam desse problema, ADR1 afirmou que no início teve dificuldade em relacionar as medidas, mas depois de encontrar o primeiro valor (8 cm), ficou fácil encontrar os demais pela proporcionalidade.

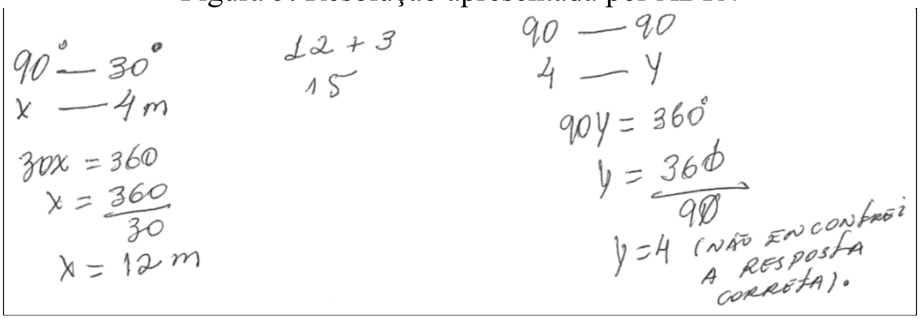
ADR3 declarou que ao começar a resolver, encontrou "pequena" dificuldade; entretanto, desenhando os três triângulos, ficou fácil identificar o que estava sendo pedido, e percebeu que utilizando as funções trigonométricas básicas (seno, cosseno e tangente), a regra de três e o conceito de proporcionalidade poderia resolvê-lo. Ele concluiu sua declaração, dizendo:

> — Ao chegar ao final, depois de ter encontrado todos os resultados, percebi que se tratava de um triângulo com dois lados iguais; logo, não precisava ter calculado todos os lados, ou seja, x, y e z, mas apenas x e y, pois o z seria o mesmo valor de x.

Apesar da imprecisão ao afirmar que "z é o mesmo que x" (na realidade z = x + 3), sua fala expressa a percepção que ele teve de mais uma possível estratégia para a resolução do problema.

Outro licenciando (ADR4) tentou resolver o problema utilizando uma estratégia diferente das resoluções anteriores:

Figura 5: Resolução apresentada por ADR4



Fonte: Arquivo dos pesquisadores.

O licenciando tentou resolver direto pela regra de três, mas não conseguiu encontrar a solução correta. Ele se justifica dizendo que encontrou dificuldade na resolução; pensou que seria fácil resolver pela regra de três, mas, como não conseguiu, concluiu que não estava entendendo, de fato, o que estava sendo solicitado.

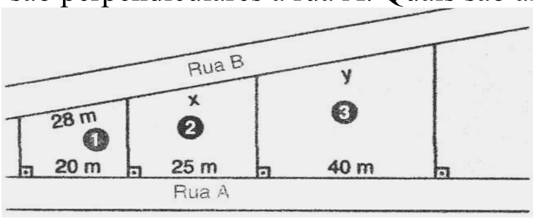
Nessa resolução, percebemos claramente a dificuldade do licenciando em entender o uso das ideias de proporção; isto se deu, provavelmente, porque em sua formação básica não foram exploradas as relações existentes entre as grandezas, mecanizando sem compreensão a utilização da regra de três para solucionar problemas envolvendo o conceito de proporcionalidade, conforme aponta Tinoco (1996). Este não estabeleceu conexão com a Trigonometria, como fizeram ADR1 e ADR3, e não conseguiu resolver corretamente o problema.

Consideramos, aqui, importante registrar as atitudes desses licenciandos ao apresentarem suas tentativas de resolução, embora conscientes das dificuldades e de não terem conseguido obter a solução correta. Não raro os estudantes se recusam a apresentar seus “escritos” quando percebem que “não sabem” ou que “não conseguem” chegar à resposta correta.

O segundo problema foi proposto com o objetivo de verificar se os (futuros) professores compreenderam a aplicação do conceito de proporcionalidade na resolução de problemas envolvendo o Teorema de Tales:

Problema 2: proporcionalidade e Teorema de Tales

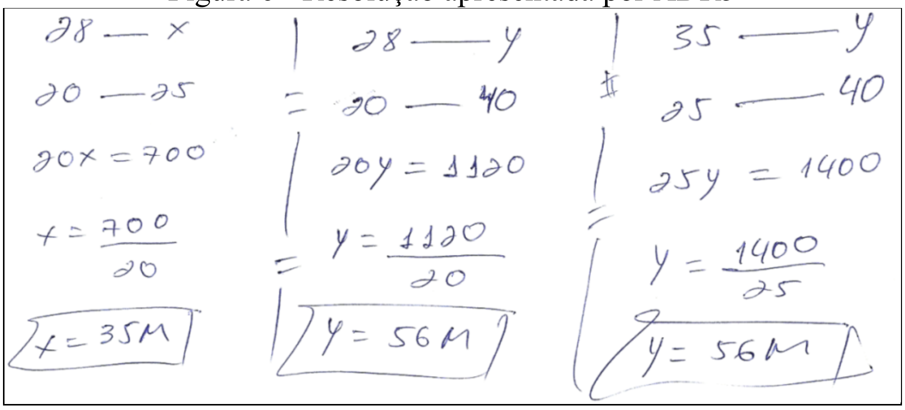
A planta abaixo mostra as medidas de três lotes que têm frente para a rua A e para a rua B. As divisas laterais são perpendiculares à rua A. Quais são as medidas de x e y na figura?



Fonte: Andrini e Vasconcellos (2006).

Apresentaremos algumas resoluções construídas pelos (futuros) professores, analisando as estratégias utilizadas por eles em relação ao conceito de proporcionalidade:

Figura 6 - Resolução apresentada por ADR5

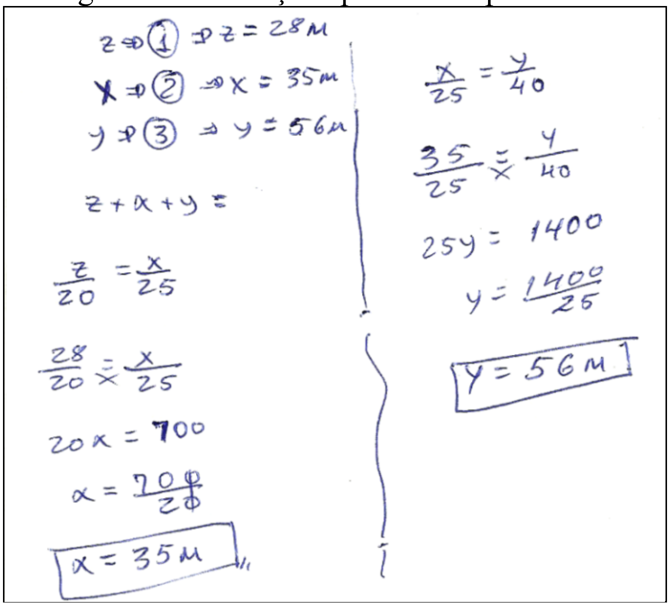


Fonte: Arquivo dos pesquisadores.

Em conversa com o (futuro) professor ADR5 após a resolução, ele afirmou que o problema foi de fácil interpretação. Percebemos que o aluno procurou confirmar a solução encontrada para “y” de duas maneiras. Isso nos leva a crer que ele não tinha certeza; entretanto, persistiu e buscou uma confirmação do valor encontrado de imediato. Essa busca pela solução do problema por meio de tentativas, conforme destacam Allevato e Onuchic (2009), é também uma característica da metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação através da resolução de problemas.

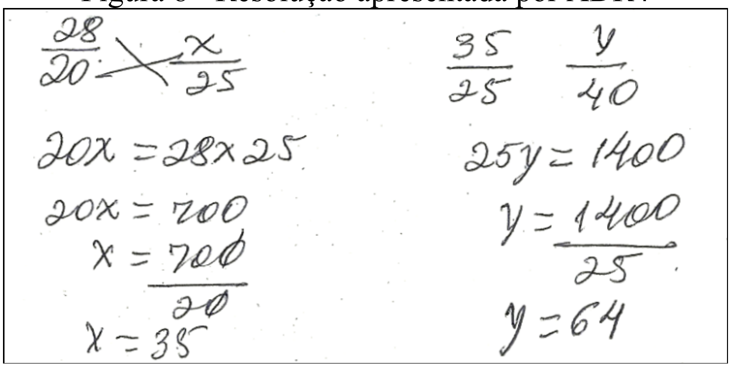
A seguir, apresentaremos outras resoluções:

Figura 7 - Resolução apresentada por ADR1



Fonte: Arquivo dos pesquisadores

Figura 8 - Resolução apresentada por ADR4



Fonte: Arquivo dos pesquisadores.

Segundo os (futuros) professores ADR1 e ADR4, entender o problema foi fácil. Segundo eles, para solucioná-lo registraram o conceito de proporcionalidade e utilizaram a regra de três. Além disso, ADR4 acrescentou que para ele não foi um problema, pois foi muito fácil encontrar a solução. No entanto, devemos destacar que ele não encontrou a solução correta para o valor do termo desconhecido denominado “y” devido a um erro de cálculo.

Também vale ressaltar que, em sua resolução, ADR4 fez uma indicação de produto cruzado, que é um procedimento da regra de três. No entanto, observamos que ele não utilizou o sinal de igualdade nem na primeira nem na segunda coluna. Isso nos leva a crer que ele não pensou na igualdade entre duas razões, ou seja, não fez associação à proporção apesar de ter comentado que fez esse registro.

Nas resoluções, nenhum dos dois licenciandos fez menção ao Teorema de Tales, embora ele possua diversas aplicações no cotidiano e em outras áreas que evidenciam sua importância. Através dele podemos perceber que retas paralelas cortadas por transversais formam segmentos correspondentes proporcionais. Portanto, podemos compreender o Teorema através do problema proposto, e até demonstrá-lo generalizando esse resultado. Com base na planta apresentada no problema, podemos perceber que os segmentos paralelos que separam os lotes 1, 2 e 3 são cortados pelas ruas transversais A e B. Portanto, a planta “satisfaz” a relação de Tales e, sendo assim, os participantes poderiam utilizá-lo para solucionar o problema.

As resoluções apresentadas mostram que, embora alguns (futuros) professores tivessem conseguido perceber a proporcionalidade existente no problema, não relacionaram esse fato ao chamado Teorema de Tales, ou seja, eles conhecem o resultado, mas não o conhecem com o nome de Teorema de Tales. Podemos, ainda, inferir sobre a possibilidade de que alguns até conhecessem o Teorema, mas não o relacionaram com a situação dada no problema, ou seja, os licenciandos não tiveram a percepção da configuração por meio do desenho (aspecto figural) das paralelas cortadas pelas transversais, o que caracteriza o Teorema de Tales.

As resoluções apresentadas indicam que não raro os (futuros) professores conduziram suas estratégias de resolução com base principalmente nos dados algébricos que o problema apresenta, não levando, muitas vezes, em consideração os dados relacionados à Geometria necessários para a compreensão da situação e a resolução correta.

Ao final da atividade, durante a plenária esses aspectos foram abordados; (re)construímos o conceito de proporcionalidade discutindo novamente quando duas grandezas são de fato proporcionais, as estratégias de resolução (regra de três, divisões sucessivas, montagem de tabelas), ou seja, as estratégias variadas, conforme indicação dos PCN (BRASIL, 1998), e a relação entre grandezas proporcionais que pode ser expressa por uma função linear do tipo $y=m.x$, em que $m€R^*$, além da relação existente entre a proporcionalidade e o Teorema de Tales.

Os dados obtidos na resolução dos problemas permitem afirmar que as principais dificuldades dos (futuros) professores na resolução do problema proposto estão associadas à execução. Tais dificuldades foram bem evidenciadas através das resoluções. Além disso, detectamos que os participantes apresentaram dificuldades em explorar o conceito de proporcionalidade apesar de já terem estudado esse conteúdo no Ensino Fundamental e

Médio, mas poucos lembraram, de fato, quando uma situação representa ou envolve proporcionalidade.

Os dados apresentados possibilitaram observar que uma das dificuldades apresentadas por eles está relacionada à compreensão de onde, de fato, está a proporcionalidade na situação expressa no problema. Essa falta de compreensão levou grande parte dos licenciandos a realizar várias tentativas para poder encontrar a solução correta.

Além disso, nas soluções apresentadas, vimos que os (futuros) professores apresentaram dificuldades em argumentar as posições tomadas nos resultados, limitando-se a dar uma resposta numérica baseada apenas nos resultados obtidos dos cálculos.

Através da análise das estratégias utilizadas pelos (futuros) professores detectamos alguns aspectos do seu pensamento, comportamento e conhecimento matemático, conforme já relatamos anteriormente; no entanto, as dificuldades na aplicação do conceito de proporcionalidade talvez sejam decorrentes do modo como eles organizaram seus conhecimentos.

Sendo assim, propusemos novo problema aos (futuros) professores para que, através da metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática, pudessem (re)construir o conceito de proporcionalidade, superando, assim, as dificuldades ainda apresentadas por alguns licenciandos, ou para que pudessem aplicá-lo em outras situações.

O problema apresentado foi o seguinte:

Problema 3 – proporcionalidade e função afim

A turma de um curso de licenciatura resolveu fazer uma "vaquinha" para dar um presente ao coordenador. Todos os alunos vão colaborar. Se o presente custar R$ 2.000,00, cada aluno vai participar com R$ 80,00.
Se a turma escolher um presente de R$ 3.500,00, quanto deverá dar para cada aluno?
Complete a tabela a seguir:

2.000	80
1.000	
500	
3.500	

Agora responda:
a) Que grandezas variam no problema?
b) Essas grandezas são proporcionais? Por quê?
c) Observe a tabela. Que número se mantém constante?
d) O que esse número representa?

Fonte: Tinoco (1996).

Nesse problema, resolvido individualmente, os licenciandos tiveram poucas dúvidas em relação ao enunciado, pois foram feitos poucos questionamentos; apenas um deles demonstrou mais dificuldade, principalmente em relação aos itens (c) e (d), por isso, procuramos esclarecer suas dúvidas para que pudesse dar prosseguimento à resolução.

Inicialmente solicitamos aos (futuros) professores que preenchessem a tabela de acordo com o enunciado do problema. Apresentaremos, a seguir, alguns protocolos:

Figura 9 - Respostas apresentadas por ADR5 e ADR3, respectivamente.

VALOR DO PRESENTE	COLABORAÇÃO POR ALUNO.
2.000	80
1.000	40
500	20
3.500	140

valor do presente	Aluno
2000	80
1000	40
500	20
3.500	140

500 — 20
3500 — x

$x = \frac{70\,\cancel{000}}{5\cancel{00}}$

$x = 140$

Fonte: Arquivo dos pesquisadores.

Percebemos que, para o preenchimento da tabela, o licenciando ADR5 utilizou uma estratégia diferente da do licenciando ADR3. Acreditamos que através de uma divisão sucessiva por 2, ADR5 tenha encontrado os valores da 2ª e da 3ª parcelas. Para obter os valores da 4ª linha da tabela, ele pode ter somado esses valores anteriores (1ª, 2ª e 3ª linhas) ou simplesmente pode ter multiplicado os valores da 3ª linha por 7. De qualquer modo, esse licenciando não fez o registro escrito do processo, ou seja, calculou mentalmente os valores, realizando, assim, o raciocínio proporcional. ADR3 utilizou a estratégia da regra de três, conforme podemos perceber no registro escrito por ele, o que nos leva a concluir que essa ainda é uma estratégia de resolução muito arraigada quando se trata de problemas envolvendo proporcionalidade, confirmando assim, o que apontam os estudos de Tinoco (1996) e de Oliveira e Santos (1999). Além disso, nem ADR3 nem ADR5 fizeram menção, em suas resoluções, ao fato de que se tratava de grandezas diretamente proporcionais.

Após o preenchimento da tabela, questionamos quais são as grandezas que variam no problema apresentado. Nesse item, alguns licenciandos tiveram dificuldades em identificar quais eram as grandezas envolvidas no problema.

Figura 10 - Resposta apresentada por ADR4

a) valor do presente e o valor que cada um vai colaborar

Fonte: Arquivo dos pesquisadores

Figura 11 - Resposta apresentada por ADR5

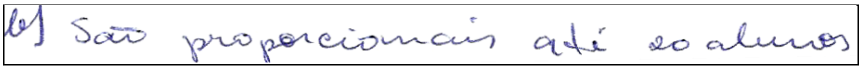
A/ A COLABORAÇÃO DOS ALUNOS.

Fonte: Arquivo dos pesquisadores

Ressaltamos que embora tenham preenchido corretamente a 1ª linha da tabela (Figura 10) indicando quais eram essas grandezas, os licenciandos não relacionaram com o que lhes foi solicitado no item (a). Isso sugere que o registro feito na tabela não estava acompanhado da compreensão de quais eram as grandezas envolvidas no problema.

No item (b), o problema pergunta se as grandezas são proporcionais. Nesse item, percebemos que alguns licenciandos ainda apresentavam dificuldades em identificar uma proporção, ou seja, em compreender a relação existente entre duas grandezas diretamente proporcionais, que deveria ser expressa por uma função linear:

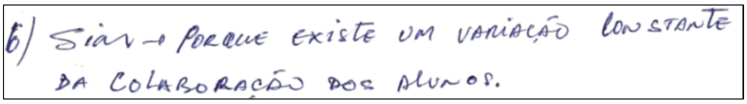
Figura 12 - Resposta apresentada por ADR3


b) São proporcionais até os alunos

Fonte: Arquivo dos pesquisadores.

Quando duas grandezas x e y são diretamente proporcionais, a razão y/x entre o valor de y e o valor correspondente de x é constante. Se o valor dessa constante é m, então $y/x = m$, ou seja, $y = m \cdot x$. Assim, dado o valor de x, para obtermos o valor correspondente a y, basta multiplicarmos x pela constante m. Então, dizemos que a expressão $y= m.x$ define y como uma função linear de x. ADR5 conseguiu notar a presença da constante na relação:

Figura 13 - Resposta apresentada por ADR5

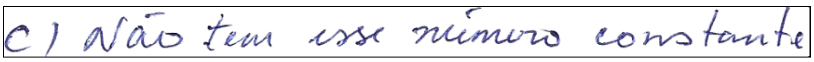

b) Sim → PORQUE EXISTE UM VARIAÇÃO CONSTANTE DA COLABORAÇÃO DOS ALUNOS.

Fonte: Arquivo dos pesquisadores.

O problema trata de grandezas diretamente proporcionais, logo, existe uma constante. Por isso, foi solicitado aos licenciandos que observassem a tabela preenchida e respondessem ao seguinte questionamento: Que número se mantém constante?

Alguns dos participantes, mesmo depois de algumas discussões sobre o tema, ainda apresentaram essa dificuldade. ADR1 respondeu, no item (b), que as grandezas do problema são proporcionais; no entanto, no item (c), ele respondeu:

Figura 14 - Resposta apresentada por ADR1


c) Não tem esse número constante

Fonte: Arquivo dos pesquisadores

Durante nossas observações ADR3 fez o seguinte questionamento:

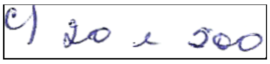
— Professor, não tem somente um número constante?

E ainda perguntou:

— Então, como saber o que ele representa?

A dúvida expressa por ele pode ser observada no protocolo a seguir:

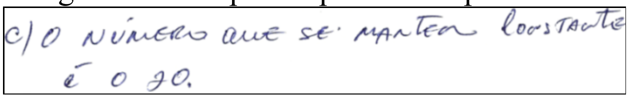
Figura 15 - Resposta apresentada por ADR3



Fonte: Arquivo dos pesquisadores

Outros responderam que existe, sim, um número constante, no entanto, indicaram:

Figura 16 - Resposta apresentada por ADR5



Fonte: Arquivo dos pesquisadores

A resposta apresentada por ADR3 mostra que ele teve dúvidas em relação a esse item e que, mesmo esclarecendo no início, antes de começar a resolver, ele não respondeu corretamente.

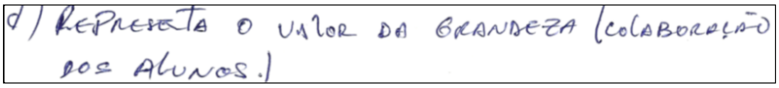
Apenas um licenciando (ADR2) apresentou o número constante de forma correta $\boxed{25}$; para ele, as grandezas são proporcionais, e ainda acrescentou:

> — O custo do presente aumenta ou diminui na mesma proporção, de acordo com o valor que cada aluno contribui.

Finalizamos o problema questionando, no item (d), o que representa o número que se mantém constante (item c). Nesse item, as respostas foram bem diversificadas. Houve quem afirmasse (ADR1) que Não tem esse número constante.

Outros afirmaram que o número constante,

Figura 17 - Resposta apresentada por ADR5



Fonte: Arquivo dos pesquisadores.

As respostas indicam que, de fato, os (futuros) professores ainda apresentavam dificuldade em "enxergar" que em grandezas proporcionais existe uma constante. Nesse item, percebemos também a dúvida que o licenciando ADR3 demonstrou e que permaneceu até o momento da formalização, quando esses aspectos foram discutidos. Nas discussões, foi destacada a relação entre a constante que existe na relação multiplicativa entre as grandezas do problema e os fatos ligados à função afim que essa relação expressa.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Uma das lacunas que detectamos durante a resolução desses problemas foi a dificuldade dos (futuros) professores em utilizar as diferentes estratégias de resolução, sugeridas pelos PCN (BRASIL, 1998). A estratégia que apareceu fortemente foi a regra de três, nomeada pelo documento de estratégia convencional. Em relação a essa estratégia de resolução, Tinoco (1996) faz uma crítica à forma como a proporcionalidade tem sido trabalhada com os estudantes em sala de aula, pois ela aparece sob os mais distintos aspectos, ora na resolução de problemas aritméticos, como a regra de três, ora na resolução de problemas de Geometria, como o Teorema de Tales; no entanto, os alunos não percebem a relação entre eles.

O presente trabalho se diferencia dos já existentes por explorarmos a proporcionalidade como eixo integrador envolvendo outros tópicos e ramos da Matemática, como a Trigonometria, o Teorema de Tales, as semelhanças de figuras planas e as funções, por meio de problemas desafiadores. Essa abordagem ajudou os licenciandos a perceber a possibilidade de resolver esses problemas por outras estratégias, por exemplo, via interpretação de gráficos e construção de tabelas. Esse aspecto integrador é destacado em Tinoco (1996), nos PCN (BRASIL, 1998) e nos NCTM (2007) como sendo um dos aspectos importantes no trabalho do professor no ensino de Matemática.

Além disso, na visão de Onuchic e Allevato (2005), a compreensão da Matemática por parte dos estudantes envolve a ideia de que compreender é necessariamente relacionar, ou seja, a compreensão dos alunos acerca de um determinado conteúdo aumenta quando eles são capazes de relacionar uma determinada ideia matemática em uma variedade de contextos, de relacionar um dado problema a um grande número de ideias matemáticas implícitas nele.

Onuchic (1999), Allevato (2005) e Nunes (2010) afirmam, ainda, que o professor deve proporcionar a seus alunos, por meio do ensino, a oportunidade de interpretar problemas e relembrar seus conhecimentos obtidos anteriormente (conhecimentos prévios) a fim de que possam construir novos conhecimentos. No entanto, elas enfatizam que a falta de conhecimentos prévios não pode ser usada como “desculpa” para limitar a oportunidade dos estudantes de resolverem problemas, estudarem novos conteúdos e, dessa forma, aprenderem algo novo. Esses argumentos estão em consonância com as ideias de Van de Walle (2009), segundo as quais o ensino deve estar atrelado ao que os estudantes já sabem. Partindo dos conhecimentos que trouxeram, de sua experiência escolar anterior, os (futuros) professores ampliaram seus conhecimentos sobre o conceito de proporcionalidade, sobre as estratégias de resolução de problemas (função, tabelas) e sobre as estratégias de ensino para o conteúdo.

No entanto, os autores apontam uma situação difícil que o professor geralmente enfrenta ao tratar da resolução de problemas como meio para ensinar Matemática. Muitas vezes, o professor fica em dúvida em relação ao que deve, ou não, dizer no momento em que os estudantes estão resolvendo um problema. E ainda fazem uma advertência: se o professor manifestar preferência por uma determinada estratégia, dificilmente os alunos irão usar seus próprios meios ou estratégias para resolver um determinado problema. Acrescentamos essas ideias com relação ao que se deve, ou não, dizer. Essa dificuldade não é somente dos professores; quem faz pesquisa utilizando essa metodologia de ensino também a enfrenta. De fato, ela foi sentida por nós ao propormos aos licenciandos a vivência da resolução de problemas como metodologia de ensino. Eles faziam muitas perguntas, e nem sempre é fácil responder sem "dizer tudo" ou sem "dizer demais".

Apesar das dificuldades, a experiência foi muito rica: criou-se um ambiente de cooperação, de busca, de exploração e de descobertas entre os licenciandos, deixando claro que mais importante do que obter a solução final era a estratégia utilizada por eles para solucioná-los. Observou-se um trabalho compartilhado, que possibilitou a mobilização e produção de novos saberes, tanto sobre proporcionalidade, em que tiveram a oportunidade de construir e compreender algumas estratégias, quanto aos conhecimentos metodológicos desse conteúdo e dos eixos de conexão no momento em que essas diferentes estratégias foram surgindo e sendo discutidas.

REFERÊNCIAS

ALLEVATO, N. S. G. **Associando o Computador à Resolução de Problemas Fechados**: Análise de uma Experiência. 2005. 370 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, UNESP, Rio Claro, 2005.

ALLEVATO, N. S. G.; ONUCHIC, L. R. Ensinando Matemática na Sala de Aula através de resolução de Problemas. **Boletim GEPEM**, Rio de Janeiro, n. 55, p. 1-19, 2009. Disponível em: <http://www.ufrrj.br/SEER/index.php/gepem/article/view/54/87>. Acesso em: 11 maio 2011.

______ ; ______. Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática: Por que através da Resolução de Problemas? In: ONUCHIC, L. R. et al (Org). **Resolução de Problemas:** Teoria e Prática. Jundiaí, SP: Paco Editorial, 2014. p. 35-52.

ANDRINI, A.; VASCONCELLOS, M. J. **Novo Praticando Matemática**, v. 4. São Paulo: Editora do Brasil, 2006.

BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais** - Matemática 1º e 2º ciclos: Matemática. Brasília: MEC, 1998.

CAI, J.; LESTER, F. Por que o Ensino com Resolução de Problemas é Importante para a Aprendizagem do Aluno? **Boletim GEPEM**. Tradução: BASTOS, Antonio Sergio Abrahão Monteiro; ALLEVATO, Norma Suely Gomes. Rio de Janeiro, n. 60, p. 241-254, 2012.

CASTRO-FILHO et al. Gangorra Interativa: um objeto de aprendizagem para os conceitos de grandezas inversamente proporcionais. **Workshop de Informática Educativa – WIE**, Campo Grande, 2006.

COSTA JUNIOR, J. R. **Atribuição do Significado ao Conceito Proporcionalidade**: Contribuições da História da Matemática. 2010. 237 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Naturais e Matemática) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2010.

COSTA, M. S.; ALLEVATO, N. S. G. Resolução de Problemas: Fixação de Conteúdos Matemáticos ou Metodologia de Ensino? **Anais do V CIEM** - Congresso Internacional de Ensino da Matemática, Canoas: Universidade Luterana do Brasil, 2010.

CRAMER, K.; POST, T.; BEHR, M. Interpreting proportional reasoning. **Mathematics Teacher**, v. 82, n. 6, p. 445-452, 1989.

DANTE, L. R. **Tudo é matemática,** 7ª série. São Paulo: Ática, 2004.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigações em educação matemática**: percursos teóricos e metodológicos. 3. ed. rev. Campinas, SP: Autores Associados, 2009.

GOLDENBERG, M. **A arte de pesquisar**: como fazer pesquisa qualitativa em ciências sociais. Rio de Janeiro: Record, 2007.

HELDER, R. R. **Como fazer análise documental**. Porto: Universidade de Algarve, 2006.

HELLER, P.; AHLGREN, A.; POST, T. Proportional reasoning: the effect of won context variables, rate type, and problem setting. **Journal of Research in Science Teaching**, p. 205-220, 1989.

HOFFER, A. Ratios and proportional thinking. In: POST, T. (Org.). **Teaching Mathematics in Grades K-8**. Boston: Allyn & Bacon, 1988.

MARANHÃO. Secretaria de Estado da Educação. **Proposta Curricular do Estado do Maranhão** – Matemática: Ensino Fundamental – 5ª a 8ª série, 2000.

MARANHÃO, C.; MACHADO, S. Uma meta-análise de pesquisas sobre o pensamento proporcional. **Educar em Revistas**, Curitiba, n. 1, p. 141-156, 2011.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHER OF MATHEMATICS (NCTM). **Professional standards for teaching mathematics**. Reston, VA: Author, 1991.

______. **Princípios e Normas para a Matemática Escolar**. Lisboa: APM, 2007.

NUNES, C. B. **O Processo Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Geometria através da Resolução de Problemas**: perspectivas didático-matemáticas na formação inicial de professores de matemática. 2010. 430 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2010.

NUNES, T.; BRYANT, P. O progresso para a multiplicação e a divisão. In: ______; ______. **Crianças fazendo matemática**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1997. p. 141-190.

OLIVEIRA, I. A. F. G.; SANTOS. M. C. Problemas de proporção: uma análise da apropriação do seu significado. **Anais** do IV EPEM-Encontro Pernambucano de Educação Matemática. Recife: Universidade Federal de Pernambuco, 1999.

ONUCHIC, L. R. Ensino-Aprendizagem de Matemática através de Resolução de Problemas. In: BICUDO, M. A. V. (Org.). **Pesquisa em Educação Matemática**: Concepções e Perspectivas. São Paulo: Editora UNESP, 1999.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V.; BORBA, M. C. (Org.). **Educação Matemática**: pesquisa em movimento. 2. ed. São Paulo: Cortez, 2005, p. 213-231.

PONTE, J. P. A vertente profissional da formação inicial de professores de Matemática. **Educação Matemática em Revista**. a. 9, n. 11A – Edição Especial. Abril, 2002.

______. Números e álgebra no currículo escolar. In: VALE, I.; PIMENTEL, T.; BARBOSA, A.; FONSECA, L.; SANTOS, L; CANAVARRO, P. (Orgs.). **Números e álgebra na aprendizagem Matemática e na formação de professores**. Lisboa: SEM-SPCE, p. 5-27, 2006.

SCHLIEMANN, A. D.; CARRAHER, D. W. **Razões e Proporções na vida diária e na escola.** Estudos em Psicologia da Educação Matemática. Recife: Editora da Universidade Federal de Pernambuco, 1997, p. 13-37.

SILVESTRE, A.; PONTE, J. P. Ser ou não ser uma relação proporcional: uma experiência de ensino com alunos do 6º ano. **Actas do XX Seminário de Investigação em Educação Matemática**: Associação de Professores de Matemática, 2009.

SPINILLO, A. G. Proporções nas séries iniciais do primeiro grau. In: SCHILIEMANN, A.; CARRAHER, D.; SPINILLO, A.; MEIRA, L.; FALCÃO, J.; ACIOLY-RÉGNIER, N. (Orgs.). **Estudos em Psicologia da Educação Matemática**. Recife: Editora da Universidade Federal de Pernambuco, 1997. p. 40-61.

TINOCO, L. A. A. Como e quando os alunos utilizam o conceito de proporcionalidade. **Revista do professor de Matemática (RPM)**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, n. 14, 1989.

______ (Coord.). **Razões e Proporções**. Instituto de Matemática / UFRJ – Projeto Fundão – SPEC/PADCT/CAPES. Rio de Janeiro: Editora UFRJ, 1996.

VAN DE WALLE, J. A. **Matemática no ensino fundamental**: formação de professores e aplicação em sala de aula. Trad. Paulo Henrique Colonese. 6. ed. Porto Alegre: Artmed, 2009.

VERGNAUD, G. Multiplicative structure. In: HIEBERT, J.; BEHR, M. (Orgs.). **Number Concepts and Operations in the Middle Grades**. Reston, VA: NCTM, 1988.

______. A Teoria dos Campos Conceituais. In: BRUN, J. **Didactica das Matematicas**. Lisboa: Instituto Piaget, 1996. p. 155-191.