

Modelos Matemáticos em Atividades de Modelagem Matemática: considerações a partir da filosofia da linguagem de Wittgenstein

Bárbara Nivalda Palharini Alvim Sousa¹

Emerson Tortola²

Resumo: Neste artigo, temos o objetivo de apresentar uma reflexão de natureza filosófica sobre os usos da expressão *modelo matemático* por meio de uma análise de diferentes práticas em que o uso de modelos matemáticos entra em 'cena' quando consideramos atividades de modelagem matemática na Educação Matemática. Inspiramo-nos no método terapêutico usado pelo filósofo Ludwig Wittgenstein em sua obra *Investigações Filosóficas* e as reflexões apresentadas, de natureza sobretudo conceitual, pretendem colaborar com a elucidação de possíveis confusões conceituais no âmbito dessas práticas. A partir da filosofia tardia de Ludwig Wittgenstein, nas análises abordamos exemplos de modelos matemáticos tratados em atividades de modelagem matemática, a partir de publicações da área e a partir de práticas pedagógicas com modelagem, cuja coleta de dados foi feita em registros de relatórios de oito atividades desenvolvidas em diferentes contextos. Nos resultados, indicamos desdobramentos decorrentes dos usos de modelos matemáticos, suas finalidades e intencionalidades, diferentes possibilidades de estruturas matemáticas que são envolvidas na ação dos sujeitos no contexto escolar, e sobre o papel do professor para sistematizar e guiar o desenvolvimento dos modelos.

Palavras-chave: Educação Matemática. Modelagem Matemática. Modelos Matemáticos. Filosofia. Wittgenstein.

Mathematical Models in Mathematical Modelling Activities: philosophical considerations

Abstract: In this paper, we aim to present a philosophical reflection on the *mathematical model* term uses through different practices in which the use of mathematical models comes into the 'scene' when we consider mathematical modelling activities in Mathematics Education. We inspired ourselves by the therapeutic method used by the philosopher Ludwig Wittgenstein in his book *Philosophical Investigations* and the reflections presented, of nature above all conceptual, intends to collaborate with the elucidation of possible conceptual confusions within the scope of these practices. Based on the foundations of the late philosophy of Ludwig Wittgenstein, on the analyses we approach examples of mathematical models treated in mathematical modelling activities, from the area publications and from pedagogical practices with modelling, which data collection was done by the records of reports of eight developed activities in different contexts. On the results we indicate developments resulting from the uses of mathematical models, these purposes and intentionalities, different possibilities of mathematical structures that are involved in the

¹ Doutora em Ensino de Ciências e Educação Matemática. Professora do Programa de Pós-Graduação em Ensino da Universidade Estadual do Norte do Paraná (UENP). Paraná, Brasil. ✉ barbara.palharini@uenp.edu.br  <https://orcid.org/0000-0002-3712-9663>.

² Doutor em Ensino de Ciências e Educação Matemática. Professor do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR). Paraná, Brasil. ✉ emersontortola@utfpr.edu.br  <https://orcid.org/0000-0002-6716-3635>.

action of the subjects in the scholar context, and regarding the teacher role of to systematize and guide the development of models.

Keywords: Mathematics Education. Mathematical Modelling. Mathematical Models. Philosophy. Wittgenstein.

Modelos matemáticos en actividades de modelación matemática: consideraciones filosóficas

Resumen: En este artículo, pretendemos presentar una reflexión filosófica sobre los usos del término modelo matemático a través del análisis de diferentes prácticas en las que el uso de modelos matemáticos entra en ‘escena’ cuando consideramos las actividades de modelación matemática en la Educación Matemática. Inspirados en el método terapéutico utilizado por el filósofo Ludwig Wittgenstein en su obra Investigaciones filosóficas y las reflexiones presentadas, de la naturaleza sobre todo conceptual, pretende colaborar con la elucidación de posibles confusiones conceptuales en el ámbito de esas prácticas. De la filosofía tardía de Ludwig Wittgenstein, en los análisis nos apoyamos en ejemplos de modelos matemáticos tratados en el contexto de actividades de modelación matemática, de publicaciones en el área, y de prácticas pedagógicas con modelación, cuya recolección de datos se realizó a través de los registros de ocho actividades desarrolladas en diferentes contextos. En los resultados indicamos desarrollos derivados del uso de modelos matemáticos, sus propósitos e intencionalidades, diferentes posibilidades de estructuras matemáticas que se involucran en la acción de los sujetos en el contexto escolar, y el rol del docente de sistematizar y orientar el desarrollo de modelos.

Palabras clave: Educación Matemática. Modelación Matemática. Modelos Matemáticos. Filosofía. Wittgenstein.

Introdução

Na literatura contemporânea sobre modelagem matemática na Educação Matemática, diferentes entendimentos são compartilhados acerca da atividade matemática que está associada à abordagem de situações-problema da realidade por meio de conceitos matemáticos (KLÜBER, 2012). Nesse contexto, o uso do termo *modelo matemático*, sua definição, sua elaboração, ou seu papel no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática também ocorrem de modo diverso (SOUSA; TORTOLA; SILVA, 2018)³.

A literatura sobre modelagem matemática aborda a diversidade de entendimentos e os desdobramentos sobre os usos de modelos matemáticos em atividades de modelagem matemática, seja com vistas às práticas de sala de aula, seja com vistas à abordagem da modelagem matemática sob um ponto de vista metodológico, ou ainda, no que tange à conceituação de modelagem matemática no âmbito acadêmico (LESH; CARMONA;

³ Uma discussão preliminar acerca da problemática detalhada neste artigo foi iniciada em Sousa, Tortola e Silva (2018).

HJALMARSON, 2006; ALMEIDA; SOUSA; TORTOLA, 2015; BARBOSA, 2009; DOERR; ENGLISH, 2003; ALMEIDA; TORTOLA; MERLI, 2012; ALMEIDA, 2018; CARREIRA; BAIOA, 2018; entre outros).

Nessas diferentes vozes repercute a ideia de modelo matemático como uma estrutura matemática que visa representar uma situação-problema em estudo (BASSANEZI, 2002). A estrutura matemática denominada modelo matemático é geralmente descrita por meio de linguagem matemática, símbolos e relações, cuja organização ao ser interpretada revela características e comportamentos da situação-problema sob investigação na atividade de modelagem matemática. A organicidade do sistema matemático aparece nas atividades de modelagem matemática sob a forma de gráficos, tabelas, equações, funções, figuras, entre outros.

A ressonância dessa definição, de um dos precursores da modelagem matemática na Educação Matemática brasileira, aparece em diferentes trabalhos posteriores, como por exemplo em Almeida, Sousa e Tortola (2015) que colocam o uso de modelos matemáticos como constituintes de atividades de modelagem matemática, e cujo entendimento se expressa como “uma estrutura matemática que deve incorporar, com certo nível de fidelidade, características essenciais do fenômeno, indicando uma possível solução para um problema associado a esse fenômeno” (ALMEIDA; SOUSA; TORTOLA, 2015, p. 3).

No que tange à definição de modelagem matemática por meio do uso de modelos matemáticos, para além de clássicas perspectivas como a veiculada por Bassanezi (2002), uma perspectiva se assenta na análise de modelos como atividade de modelagem matemática (JAVARONI; SOARES, 2012).

Tomam lugar ainda discussões sobre modelagem matemática como uma atividade em que o uso ou a dedução de modelos matemáticos não está no cerne da atividade, quando, a depender dos conhecimentos dos alunos e dos objetivos educacionais, o uso ou não de modelos matemáticos não descaracteriza a atividade de modelagem matemática (CALDEIRA, 2007; BURAK, 2010).

Para Barbosa (2009), as teorias matemáticas dão suporte aos usos que os sujeitos fazem dos modelos matemáticos. O autor infere sobre os papéis dos modelos matemáticos quando o foco está na sala de aula, podendo “oferecer argumentos para sustentar a introdução de um novo conceito” (BARBOSA, 2009, p. 77), no sentido de justificar, de criar uma necessidade de aprender a usar determinados conceitos; ser colocado como próprio conceito, no sentido de ser utilizado como uma definição ou teoria; e “cumprir o papel de deslocar partes do discurso pedagógico da matemática para o ordenamento de fenômenos

focalizados na educação científica” (BARBOSA, 2009, p. 79), tendo seu uso como estruturante, uma vez que viabiliza conclusões e compreensões de fenômenos de outras áreas da ciência, principalmente pelo uso da matemática.

Nesse contexto, também há espaço nas publicações sobre modelagem matemática na Educação Matemática para pesquisas que visam identificar e detalhar o uso de modelos matemáticos em atividades de modelagem matemática, denominando-os também de conhecimentos matemáticos mobilizados ou produzidos pelos sujeitos modeladores no âmbito dessas práticas (SOUSA; TORTOLA; ALMEIDA, 2014; MARTINS; SEKI; ALMEIDA, 2018; PEREIRA; KLÜBER, 2019; ZANELATO; KLÜBER, 2019).

Em âmbito internacional Sriraman e Lesh (2006) fazem referência aos modelos matemáticos como pedaços de conhecimento, que assinalam que é comum os modelos serem utilizados para descrever, explicar e, inclusive, conceituar (no sentido de quantificar, dimensionar, coordenar, enfim, matematizar). Para esses autores, em modelagem matemática os modelos matemáticos carregam com si ou constituem teorias e devem ser considerados para o ensino e a aprendizagem dos alunos, para que possam se preparar para atuar na sociedade, particularmente os que se envolverão com matemática, ciência e tecnologia.

Lesh, Carmona e Hjalmarson (2006), por sua vez, abordam que um modelo matemático pode ser entendido como um sistema conceitual expresso por meio de uma linguagem matemática e seus usos e produção ocorrem com diferentes finalidades. Nessa perspectiva, a pesquisa de Doerr e English (2003) indica que os modelos matemáticos fornecem meios para descrever, explicar ou prever o comportamento de fenômenos.

Ao abordar esse cenário, começamos a demarcar alguns dos usos feitos do termo *modelo matemático* em práticas de modelagem matemática, considerando, em particular, o escopo da pesquisa. Mas, as reverberações da pluralidade de usos e intenções culminam também em implicações para as práticas educacionais atreladas ao uso de atividades de modelagem matemática. O modo como professores e pesquisadores veiculam entendimentos sobre modelos matemáticos pode, por vezes, colocar “certezas” e empecilhos para o planejamento e a execução de práticas docentes, o que, por sua vez, pode acarretar confusões conceituais.

Neste artigo, objetivamos apresentar uma reflexão de natureza filosófica sobre os usos da expressão modelo matemático por meio de diferentes práticas em que o uso de modelos matemáticos entra em ‘cena’ quando consideramos atividades de modelagem matemática na Educação Matemática. Para tanto, apresentamos uma concepção filosófica

a partir da filosofia da linguagem de Ludwig Wittgenstein. Inspiramo-nos em seu método terapêutico, usado em sua obra *Investigações Filosóficas*, para balizar a reflexão de natureza conceitual a partir da descrição e da análise de diferentes usos de modelos matemáticos em práticas com modelagem matemática.

Este artigo está organizado de modo a contemplar uma abordagem da literatura sobre modelagem e modelos na Educação Matemática; aspectos da filosofia wittgensteiniana que nos guiam em nossas reflexões; aspectos metodológicos e contexto da pesquisa; bem como um processo analítico que leva em conta a descrição dos usos de modelos matemáticos em práticas de modelagem matemática. Por fim, os resultados são discutidos e possibilidades de desdobramentos da pesquisa são colocados.

Modelos e Modelagem na Educação Matemática

No contexto de uma atividade de modelagem matemática, o modelo matemático “é o que ‘dá forma’ à solução do problema e a modelagem matemática é a ‘atividade’ de busca por esta solução” (ALMEIDA; TORTOLA; MERLI, 2012, p. 217). Dar forma à solução significa explicar ou expor características do fenômeno sob a perspectiva do problema, por meio de uma estrutura matemática (LINGEFJÄRD, 2006) ou de um sistema conceitual (LESH; CARMONA; HJALMARSON, 2006), isto é, buscar na linguagem matemática elementos, operações, relações e regras (DOERR; ENGLISH, 2003) que pautem e viabilizem uma solução. Nesse sentido, entendemos que ser capaz de usar ou elaborar modelos matemáticos pressupõe o domínio de técnicas e regras matemáticas para descrever, explicar e fazer previsões (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012) acerca de quantidades e relações observadas no comportamento de um fenômeno.

Sob essa perspectiva, atividades de modelagem matemática possibilitam “uma leitura, ou até mesmo uma interpretação, ainda que parcial e idiossincrática, de fenômenos não matemáticos com o apoio da matemática” (ALMEIDA; SOUSA; TORTOLA, 2015, p. 3). Essa leitura consiste em “observar um fenômeno, conjecturar relações, aplicar análises matemáticas (equações, estruturas simbólicas, etc.), obter resultados matemáticos e reinterpretar o modelo” (LINGEFJÄRD, 2006, p. 96). O modelo matemático, portanto, não pode ser entendido como um fim em si só, mas é o que lança luz sobre o problema e viabiliza a explicação ou entendimento, por meio da matemática, de determinadas situações.

Bassanezi (2002, p. 25) argumenta que “a obtenção do modelo matemático, pressupõe, por assim dizer, a existência de um dicionário que interpreta, sem

ambiguidades, os símbolos e operações de uma teoria matemática em termos da linguagem utilizada na descrição do problema estudado, e vice-versa”. Isso porque, uma das ações características de atividades de modelagem matemática é a idealização da situação, isto é, a atribuição de uma roupagem matemática ao fenômeno, tornando-o passível de ser interpretado matematicamente. Essa ação é denominada por Almeida, Silva e Vertuan (2012) de matematização e, de acordo com esses autores, envolve a simplificação da situação, a definição de variáveis e a formulação de hipóteses que direcionam a resolução do problema e viabilizam a obtenção de uma solução.

Ao se referir ao uso da matemática como uma interpretação que foge a ambiguidades, Bassanezi (2002) traz à tona o papel gramatical da linguagem matemática. Uma regra matemática, por exemplo, não depende de um contexto empírico para sua existência, mas, o uso dessas regras quando feito com vistas à elaboração de modelos matemáticos visa indicar e, por vezes, formatar e normatizar o comportamento do fenômeno sob investigação. O uso da matemática quando aplicado para dar sentido às nossas experiências com o mundo não é ambíguo, nos serve como amostras de como as coisas podem ser e como podemos inferir sobre elas. E, a cada contexto de uso, seja interior ou exterior à matemática, as interpretações são feitas com base na própria estrutura matemática em questão. Podemos pensar na pertinência do zero ao conjunto dos números naturais, ao abordá-lo no contexto de um tratado de Álgebra, certamente o encontraremos dentre os elementos que pertencem a esse conjunto, se observarmos, porém, um livro de Análise, dificilmente ele será indicado como tal (LIMA, 1982).

Proposições como “ $2 + 2 = 4$ ”, no âmbito da matemática, via de regra tornam-se verdades inquestionáveis, uma vez que proposições gramaticais têm natureza normativa, ou seja, servem como normas, como placas de orientação para indicar o caminho a seguir (WITTGENSTEIN, 2012). Nesse contexto, definida uma hipótese não há mais o que se discutir quanto ao encaminhamento matemático (ALMEIDA; SOUSA; TORTOLA, 2015), regras matemáticas são colocadas em jogo, bem como seus instrumentos e artefatos (STILLMAN; BROWN; GEIGER, 2015), e, em consequência, a hipótese seguida conduz a uma resposta para o problema. Por outro lado, essa resposta, ainda que fundamentada em teorias matemáticas e obtida seguindo regras, deve ser analisada com base nas características do fenômeno que deu origem ao problema, pelo mesmo motivo da idealização da situação. A resposta, obtida por meio do modelo, deve ser interpretada conforme o uso que terá, conforme a atividade que lhe significará, ou como coloca Wittgenstein (2012), segundo esse jogo de linguagem.

Nesse sentido, atividades de modelagem matemática mostram-se como um meio importante de conscientizar e preparar os alunos para os usos de modelos matemáticos na sociedade (FREJD, 2015), usos esses que são diversos e contemplam desde a formação, extensão ou adequação de teorias até a descrição, explicação ou generalização do comportamento de fenômenos ou experimentos (CARREIRA; BAIOA, 2018).

Da concepção wittgensteiniana de jogos de linguagem ao seu uso na terapia filosófica

No âmbito da filosofia da linguagem, Wittgenstein (2012) apresenta uma investigação que detalha o funcionamento da linguagem e o modo como atribuímos sentido aos fatos do mundo. Ao se debruçar na descrição dos usos das palavras com a finalidade de elucidar e sanar confusões conceituais acerca do emprego dos conceitos, Wittgenstein delinea uma terapia conceitual e coloca em evidência a descrição gramatical de vários usos de determinados conceitos para fazer emergir uma rede de semelhanças entre eles.

A perspectiva wittgensteiniana de linguagem se caracteriza como de natureza conceitual, pois embora sua terapia leve em consideração o contexto de uso das palavras, ela traz à tona a noção de gramática. De acordo com Moreno (1995, p. 15) na concepção veiculada pelas Investigações Filosóficas,

a linguagem passa a ser considerada como um caleidoscópio de situações de uso das palavras em que o contexto pragmático não pode mais ser eliminado. A palavra “linguagem” indica, a partir de então, um conjunto aberto de diferentes atividades envolvendo palavras, uma “família” de situações em que usamos palavras relativamente a circunstâncias extralinguísticas.

Os jogos de linguagem estão associados às formas de vida e se caracterizam pela linguagem e as atividades com as quais está entrelaçada. Para Wittgenstein (2012, § 23) “a expressão *jogo de linguagem* deve salientar aqui que falar uma língua é parte de uma atividade ou de uma forma de vida”. Nesse contexto, vários exemplos de jogos de linguagem emergem: *fazer um cálculo, cantar uma música, recitar um poema, encenar uma peça de teatro*. Atividades que têm a elas relacionadas um conjunto de regras, que regidas por uma gramática, são convencionadas no interior de uma comunidade. Nesse sentido, a matemática se caracteriza como um jogo de linguagem, e a atividade matemática pode ser considerada como uma atividade humana regida por regras convencionadas no âmbito de nossas práticas linguísticas (GOTTSCHALK, 2018; CARVALHO; SILVEIRA, 2019).

O uso das proposições matemáticas, de natureza gramatical, para formatar e dar

sentido às nossas experiências com o mundo, é uma das possibilidades dos modelos matemáticos. Mas, dificuldades podem emergir quando usamos proposições matemáticas na análise de situações exteriores à matemática, cujas proposições, muitas vezes, são de natureza empírica, ou seja, baseadas na observação dos fatos. Ou ainda, quando caímos no equívoco de requerer que os fatos do mundo confirmem ou não uma proposição matemática. Não se trata de buscar uma delimitação para o uso do termo *modelo matemático*, até porque o caráter convencional das proposições usadas em nossa linguagem está associado ao que Wittgenstein (2012) denomina de ‘vagueza’ dos conceitos, isto é, o solo no qual se assentam nossos conceitos está nos jogos de linguagem, que, por sua vez, são determinados por regras de natureza convencional, as quais mudam de acordo com as necessidades do contexto histórico-cultural que vivemos. Trata-se, portanto, de elucidar a partir dos usos que fazemos desses modelos seu funcionamento nos diversos jogos de linguagem e sua articulação com os usos da matemática na modelagem matemática.

Podemos dizer, então, que modelos matemáticos fazem sentido no uso que deles fazemos. A máxima wittgensteiniana “não pense, mas olhe” (WITTGENSTEIN, 2012, § 66) é empregada neste artigo com a intenção de contribuir com as reflexões em torno dos usos de modelos matemáticos em atividades de modelagem, bem como o método de exemplificação, por meio de analogias ou metáforas, pois acreditamos que só faz sentido investigar algo no interior do contexto de seu uso. A concepção de pensamento sugerida pela terapia filosófica, de acordo com Moreno (2003, p. 131) “supõe exclusivamente conceitos operatórios cujo sentido pode ser explicitado através de aplicações e de exemplos – como é, aliás, o caso da significação conceitual em geral”. Reflexões dessa natureza são, portanto, gramaticais, pois se amparam nas regras convencionadas nos diferentes jogos de linguagem.

A terapia filosófica mostra que a gramática dos conceitos engendra o objeto em si, assim como o destrói, anulando-o pela linguagem; daí sua autonomia. São gramaticais as condições de possibilidade do objeto em si, assim como o são as dos objetos naturais, suas propriedades empíricas, tais como estudadas pelo cientista (MORENO, 2003, p. 132).

Seguir uma regra, não significa, no entanto, agir cegamente de acordo com a regra, mas considerá-la em seu contexto de uso (WITTGENSTEIN, 2012). O que determina se uma proposição é de natureza empírica ou gramatical é o uso que dela fazemos nos jogos de linguagem, que por sua vez é diverso e depende do contexto de aplicação dos conceitos.

A busca pela generalização, por um critério único para o que denominamos, por exemplo, modelo matemático em atividades de modelagem matemática, pode sugerir uma concepção dogmática, baseada em verdades válidas para casos específicos, pois quando tomamos um único critério ou uma única interpretação como válida a consequência é “descolar” realidade e linguagem e assumir uma posição dogmática.

A descrição metodológica da pesquisa incide, assim, tendo como norte a natureza convencional das regras que seguimos para usar nossos conceitos em geral, e a possibilidade de refletir sobre os usos que fazemos de nossos conceitos a partir de como estes funcionam em nossos jogos de linguagem.

Aspectos metodológicos e contexto da pesquisa

Inspiramo-nos na terapia filosófica de Wittgenstein, assim como já se debruçaram Gottschalk (2004, 2008), Cardoso (2009), Miguel (2014, 2015), entre outros. De acordo com Moreno (2012, p. 93) a terapia filosófica wittgensteiniana “não é uma tese sobre o conhecimento, mas, apenas, um esclarecimento conceitual que permite situar, com mais clareza, o estatuto teórico relativo das categorias de certeza e de conhecimento”.

Gottschalk (2010), por sua vez, indica que por meio da terapia filosófica acerca de um conceito consideram-se as circunstâncias efetivas em que o conceito é aplicado e os critérios a que recorremos para identificar quando alguém o está utilizando, o que ocorre independentemente de eventuais processos mentais ou outros comportamentos que podem ocorrer simultaneamente.

Nesse contexto, abordamos neste artigo resultados de uma pesquisa conduzida pelos autores em diferentes contextos e níveis de escolaridade, tendo como base teórica a modelagem matemática na Educação Matemática e como base filosófica a filosofia tardia da linguagem de Wittgenstein.

A discussão conta com exemplos de modelos matemáticos tratados no âmbito de atividades de modelagem matemática, seja a partir de publicações da área, seja a partir de práticas pedagógicas com modelagem, cuja coleta de dados foi feita mediante os registros de relatórios de oito atividades desenvolvidas em diferentes contextos: relação entre comprimento e peso de um peixe, desenvolvida por dois alunos de um curso de Licenciatura em Matemática na disciplina de Modelagem Matemática; volume de água em um aquário, modelagem desenvolvida nos anos iniciais do Ensino Fundamental com crianças de 6 anos; volume de água em um aquário, modelagem desenvolvida com alunos do Ensino Superior; quantidade de homicídios na cidade de Toledo - PR, desenvolvida por alunos de um curso

de Licenciatura em Matemática; lançamento de foguetes por meio de um protótipo, desenvolvida por dois alunos de um curso de Licenciatura em Matemática na disciplina de Modelagem Matemática; gastos com Energia Elétrica, desenvolvida por alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental; construindo um criadouro de peixes, desenvolvida por três alunos de um curso de Licenciatura em Matemática na disciplina de Modelagem Matemática.

Modelos Matemáticos e a pluralidade de entendimentos: uma reflexão a partir dos usos

Entendemos que discutir os usos de modelos matemáticos pode incitar uma discussão de natureza teórica em modelagem matemática, visto que o uso do termo *modelo matemático* traz à tona um conceito que pode estar no âmbito da significação de modelagem matemática e dos sentidos que os sujeitos atribuem às suas práticas. No entanto, a discussão filosófica que segue não visa teorizar, mas apresentar reflexões que podem auxiliar na elucidação de confusões, como a busca por uma generalização que balize usos do termo *modelo matemático* em práticas de modelagem matemática, ou ainda, da preconização das ações com modelagem matemática em sala de aula. Na tentativa de abordar tal complexidade, tomamos o cuidado na diversificação da descrição gramatical dos usos e trazemos para o diálogo asserções teóricas e indicações filosóficas.

De modo geral, a ênfase constante nos diferentes entendimentos e na multiplicidade de maneiras de abordar determinados conceitos pode preconizar uma tentativa de sistematização e generalização, ou ainda, enfatizar a proficiência associada às múltiplas abordagens do conceito em diferentes jogos de linguagem. A primeira posição pode acarretar a tentativa de uma única imagem associada ao termo *modelo matemático* o que, por vezes, pode implicar em uma visão unilateral de modelo e repercutir, por exemplo, nas asserções que consideram modelos matemáticos como funções ou equações algébricas.

Em práticas de sala de aula, muitas vezes, o tratamento de estruturas matemáticas como a definição de modelo matemático, tratada por Bassanezi (2002), acarreta a imagem de modelo matemático como uma estrutura simbólica, geralmente expressa em linguagem matemática. No entanto, essa idealização pode ser pluralizada quando consideramos as práticas de modelagem matemática no seu contexto de uso na Educação Matemática.

Atividades de modelagem desenvolvidas com o propósito ora de ensinar matemática, ora de ensinar modelagem matemática estão associadas, geralmente, a problemas abertos, como os colocados por Sant'Ana e Sant'Ana (2009); à uma atividade

investigativa, como caracterizada por Almeida, Silva e Vertuan (2012); e à formulação de problemas matemáticos para o tratamento de situações-problema reais, como indicada por Pollak (2015), sendo essa ação para o autor o 'coração' da modelagem matemática.

Esse tipo de atividade matemática, segundo Tortola (2012), conta com a transição entre dois jogos de linguagem, na perspectiva de Wittgenstein (2012), em que o jogo de linguagem da situação-problema inicial está associado a diferentes regras quando comparado ao jogo de linguagem da matemática, em que as proposições, de natureza gramatical, muitas vezes se afastam, pelo menos em sua natureza, das proposições empíricas associadas à situação inicial (SOUSA, 2017). É nesse solo que tecemos considerações acerca dos modelos matemáticos, quando seu uso educacional é realizado tendo por contexto essa transição entre diferentes jogos de linguagem. Para além da complexidade inerente às situações de ensino e de aprendizagem, os atores envolvidos nesse cenário carregam responsabilidades em torno da situação formal de ensino.

Mas de que usos falamos quando tecemos considerações acerca de modelos matemáticos? Falamos ao mesmo tempo da estrutura matemática que mostra a organicidade de um crescimento populacional e daquela que permite a inferência sobre como se comportará um avião caso ocorra uma falha mecânica. Ou, ainda, tecemos considerações acerca de como interpretar matematicamente o crescimento de plantas na natureza e sobre como construir uma estrutura geométrica com vistas à criação de peixes. Note que em cada uma das situações colocadas há o uso de modelos matemáticos para auxiliar em sua leitura, interpretação e estudo. Os usos, no entanto, diferem, e as estruturas matemáticas utilizadas em cada caso respeitam, por sua vez, diferentes regras (da matemática e da situação-problema), mas a todas elas nomeamos modelos matemáticos.

Essa multiplicidade de usos dos modelos matemáticos na sociedade, com fins científicos ou com a finalidade de melhor viver em sociedade, transparece na literatura quando diferentes papéis são atribuídos aos modelos matemáticos que usamos em modelagem matemática. Para Doerr e English (2003), por exemplo, modelos matemáticos fornecem meios para descrever, explicar ou prever o comportamento de fenômenos. Já Sousa, Tortola e Silva (2018) indicaram, em uma análise localizada, três usos para os modelos matemáticos, o uso descritivo, o uso prescritivo e o uso explicativo.

A partir do direcionamento de uma atividade de modelagem matemática, dadas as intencionalidades e perspectivas assumidas nas situações de ensino e de aprendizagem, o estudante em sua atividade de modelagem matemática é orientado por aspectos da situação-problema, os quais servem como um guia para a estruturação de modelos

matemáticos, são elementos do jogo de linguagem inicial, como dados e características da situação-problema que normatizam os usos dos modelos matemáticos que entram em cena na atividade de modelagem matemática. A descrição, previsão ou explicação possível por meio do modelo matemático tem sempre em conta os objetivos dos modeladores.

Por exemplo, vamos considerar atividades de modelagem matemática desenvolvidas por diferentes alunos com o tema “Peixes”. Peixes são seres vivos que coexistem conosco e estão associados a uma infinidade de situações cotidianas, que podem ou não se caracterizar como problemáticas a depender da situação que analisamos. Nesse contexto, o tema peixes aparece, por vezes, em atividades de modelagem matemática, ora propostas por professores, ora pelos próprios alunos.

Uma atividade de modelagem matemática clássica identificada na literatura relata o desenvolvimento de modelos matemáticos para o crescimento populacional de tilápias e para o crescimento populacional das tilápias com taxa de sobrevivência (Quadro 1).

Quadro 1: Modelo matemático para a dinâmica populacional das tilápias

1	$\begin{cases} p_n = p_{n-1} + \alpha p_{n-2} \\ p(0) = p_0 \text{ e } p_1 = p_0 \end{cases}$ <p>Modelo para o crescimento da população p de tilápias por meio de uma equação de diferenças</p>	2	$\begin{cases} a_n = \delta a_{n-1} + \beta b_{n-1} \\ b_n = c_{n-1} \\ c_n = \gamma a_{n-1} + \gamma \beta b_{n-1} \end{cases}$ <p>Modelo para o crescimento da população de tilápias considerando a taxa de sobrevivência</p>
---	--	---	---

Fonte: Adaptado de Bassanezi (2002, p. 105)

O Quadro 1 retrata dois modelos que usam de equações de diferenças para descrever o crescimento das tilápias. No item 1 do Quadro 1 a população p cresce em decorrência da população nos pontos de tempo n anteriores, mas não considera especificidades da dinâmica populacional como no item 2 do Quadro 1, em que ovos, alevinos e adultos, juntamente com sua taxa de sobrevivência são considerados (a_n quantidade de adultos em cada estágio n , δ sua taxa de sobrevivência; b_n quantidade de jovens, alevinos, em cada estágio n e β sua taxa de conversão para adultos; c_n quantidade de ovos viáveis em cada estágio n e γ a taxa de sobrevivência da população de ovos).

Note que a situação descrita matematicamente no item 2 do Quadro 1 contempla mais especificidades da situação-problema referente ao crescimento da população de tilápias. Todavia, a partir do momento que na atividade de modelagem consideramos uma simplificação para chegar ao modelo matemático em 1, ou, as especificidades que nos permitem descrever o fato matematicamente por 2, regras matemáticas para o tratamento e a interpretação possível por meio do modelo matemático entram em ação. Tratamento

esse, por sua vez, que depende do conhecimento matemático já apreendido pelo modelador ou da instrução de ensino em que o sujeito se encontra.

Com a finalidade instrucional acerca da modelagem matemática voltada para o ensino e a aprendizagem de matemática, a abordagem de Bassanezi (2002) descreve modelos matemáticos clássicos, também para o crescimento populacional, e exemplares de como abordar tais modelos matematicamente em cada uma das situações, deixando em evidência as regras matemáticas envolvidas no uso de tais modelos.

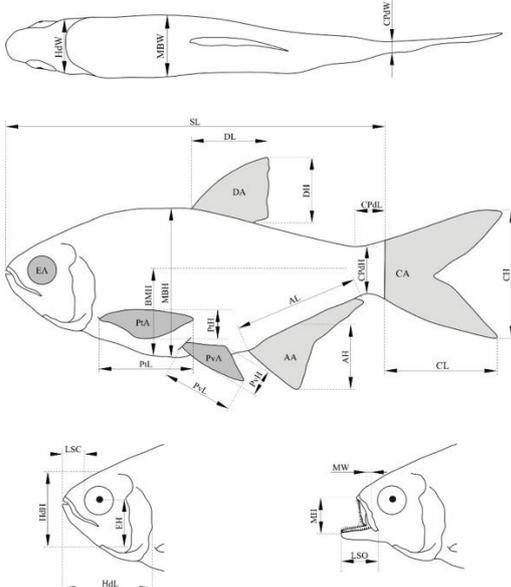
Uma das atividades de modelagem matemática que colaboram para nossas reflexões está associada à relação entre o peso e o comprimento de peixes, em particular a relação peso-comprimento de *Poecilia Reticulata* nas cabeceiras dos Ribeirões Cambé e Cafezal, no Estado do Paraná. Essa atividade, para além de ferramentas matemáticas na abordagem da situação idealizada matematicamente, traz para a discussão conhecimentos da biologia desse peixe, em seus aspectos de crescimento relativo, bem como estabelece comparações entre os pontos de coleta e detalha a interferência de habitat. Na atividade, os modeladores trazem dados de 56 peixes, seu peso e comprimento, em dois pontos de coleta, sendo que cada ponto é afetado de modo diferente: o primeiro ponto de coleta localiza-se próximo a uma região industrial com tráfego intenso; o segundo ponto localiza-se a jusante de uma barragem. Tendo por objetivo relacionar as medidas morfométricas do peixe, os alunos engajados nessa atividade ajustaram uma função logística que determina o comprimento do peixe em relação a seu peso (Quadro 2).

Veja que já existe na literatura trabalhos científicos associados à área do peixe e como relacionar as medidas morfométricas. No entanto, a investigação da biodiversidade de peixes próxima a áreas urbanas, seja no trabalho do biólogo, seja no trabalho do aluno do curso de matemática, incide sob dados coletados e no auxílio de ferramentas matemáticas que permitem modelar, nesse caso descrever, as relações observadas no conjunto de dados.

A atividade desenvolvida está associada a partir de seu interesse e contexto da localidade em que residiam. As ações dos alunos foram mediadas pelo uso de proposições empíricas, da situação em estudo, articuladas com proposições matemáticas, sinalizadas por Wittgenstein (2012) como proposições gramaticais. A partir dessas ações o uso dos modelos matemáticos é regido pelas regras gramaticais disponíveis na linguagem matemática, que dessa maneira normatizam os modos de ver as situações-problema sob investigação. Mas, observamos que mesmo as proposições gramaticais matemáticas podem ser interpretadas tendo como pano de fundo diferentes métodos e técnicas, como

detalhado na segunda coluna do Quadro 2.

Quadro 2: Modelo matemático para a relação entre comprimento e peso de um peixe

 <p>Modelo para medidas morfométricas De Oliveira et al. (2010).</p>	<p>$p = \text{peso}$; variável independente. $C = \text{Comprimento}$; variável dependente.</p> $C(p) = \frac{K}{be^{-\lambda p} + 1}$ <p>Em que K, b e $\lambda \in \mathbb{R}$.</p> <p>Usando o método de Ford Walford, descrito em Bassanezi (2002) e o método dos mínimos quadrados para ajuste dos parâmetros.</p> $C(p) = \frac{23,59}{1,976111682 * e^{-14,22343728p} + 1}$ <p>Usando o <i>software</i> GeoGebra</p> $C(p) = \frac{22,701}{1 + 1,5059 * e^{-11,8027p}}$ <p>Modelos para as relações de comprimento e peso de um peixe a partir de dados coletados.</p>
---	--

Fonte: Registros do relatório dos alunos

O uso de métodos de ajuste de curvas é algo possível e conduz a um conjunto de parâmetros que determina uma curva para a relação entre comprimento e peso dos peixes, no entanto, o uso de um *software* permite o ajuste do mesmo conjunto de dados, mas aproximando outra curva. Qual seria então o modelo matemático que descreve a situação em estudo?

Para aquele que busca um único modelo para cada situação, uma boa resposta seria nem o primeiro e nem o segundo, até porque em modelagem matemática partimos da premissa de que as hipóteses balizam o desenvolvimento matemático da situação em estudo (ALMEIDA; SOUSA; TORTOLA, 2015). E acreditamos, ainda, que um bom modelo matemático é aquele que pode ser revisitado, reformulado, aprimorado, ou seja, que permite ao modelador incorporar características fidedignas do problema investigado e ainda ser usado com vistas aos objetivos educacionais. Na atividade em questão, os alunos envolvidos na disciplina de modelagem matemática, tinham por objetivo o desenvolvimento de habilidades associadas ao fazer modelagem matemática, ou seja, desenvolver as fases da modelagem matemática descritas por Almeida, Silva e Vertuan (2012) de modo orgânico e independente.

Tanto os modelos trazidos por Bassanezi (2002), no Quadro 1, quanto os modelos abordados pelos alunos no Quadro 2, estão associados a uma estrutura matemática, que

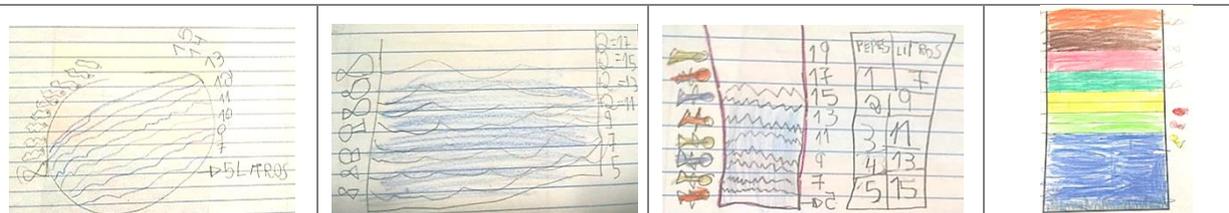
assim como Barbosa (2009) argumenta, dá suporte para o uso que os sujeitos fazem dos modelos matemáticos. No segundo caso, o uso do modelo matemático está associado também à introdução de conceitos, e tal uso se articula com as prerrogativas desse autor quando sinaliza que a matemática também auxilia a deslocar partes do discurso pedagógico da matemática para o ordenamento de fenômenos (BARBOSA, 2009). Esse papel normativo da matemática é enfatizado por Gottschalk (2018) e Wittgenstein (2012).

Já quando o objetivo educacional está associado ao ensino de matemática em outro nível de escolaridade, o uso do modelo matemático é outro. Tomamos como exemplar o uso da matemática feito por alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental quando investigam o volume de água necessário para um aquário (Quadro 3). O jogo de linguagem das crianças difere do jogo de linguagem utilizado no ambiente da formação inicial do professor de matemática. Tais especificidades dizem respeito também aos conhecimentos matemáticos dos sujeitos envolvidos na atividade de modelagem matemática, bem como na autonomia dada pelo professor.

Quadro 3: Quantidade de água em um aquário, modelagem com crianças de 6 anos

Como calcular qual o volume de água deve ter em um aquário, considerando a quantidade de peixes?

Informações
Peixes Pequenos: 5 litros vagos + 2 litros por peixe



Peixes	Litros
19	7
18	7
15	9
13	11
11	13
9	15
7	17
5	19

Fonte: Adaptado de Tortola (2016)

Os primeiros modelos matemáticos produzidos nessa atividade, apresentados nas duas imagens à esquerda do Quadro 3, embora criados pelos alunos, em fase de alfabetização, com o intuito de descrever a relação entre volume de água e número de peixes, foram utilizados nesse contexto com a intenção de conhecer formas de registrar tal relação por meio da linguagem matemática, conforme modelos apresentados nas duas imagens à direita. Trata-se, portanto, de um uso ostensivo (WITTGENSTEIN, 2012), no sentido de mostrar aos alunos o que é uma tabela, do professor escrever no quadro e apontar e dizer “isto é uma tabela”, e de mostrar como organizar dados por meio dela, ou ainda, de auxiliar os alunos no uso das regras de contagem, no caso de 2 em 2.

Observe na sequência de números indicada (5, 7, 9, 11, 13, 15, ...) que logo nos primeiros desenhos os alunos têm noção das regras que regem a situação, isto é, aumentar

a quantidade de peixes implica em aumentar o volume de água, o que é indicado por eles pelas linhas horizontais, mas é apenas nas tabelas e no gráfico pictórico que fica clara a relação entre as variáveis, isto é, os números de uma mesma linha estão relacionados, e é essa regra que nos permite dizer que para 3 peixes 11 litros de água são necessários no aquário.

Essa situação abordada em um contexto de Ensino Superior, por exemplo, pode dar lugar a uma linguagem algébrica, cujo modelo é utilizado para generalizar a relação entre volume de água e número de peixes para qualquer tipo de peixes (Quadro 4).

Quadro 4: Quantidade de água em um aquário, modelagem com alunos do Ensino Superior

<p><i>Como calcular qual o volume de água deve ter em um aquário, considerando a quantidade de peixes?</i></p> <p>Informações</p> <p>Peixes Pequenos: 5 litros vagos + 2 litros por peixe Médios/pequenos: 10 litros vagos + 5 litros por peixe Médios/grandes: 20 litros vagos + 15 litros por peixe Grandes: 40 litros vagos + 40 litros por peixe Jumbos: 100 litros vagos + 100 litros por peixe</p>	<p>Seja x a quantidade de peixes:</p> <table border="1"> <tr> <td>Peixes pequenos</td> <td>$5 + 2x$</td> </tr> <tr> <td>Peixes médios/pequenos</td> <td>$10 + 5x$</td> </tr> <tr> <td>Peixes médios/grande</td> <td>$20 + 15x$</td> </tr> <tr> <td>Peixes grandes</td> <td>$40 + 40x$</td> </tr> <tr> <td>Peixes jumbos</td> <td>$100 + 100x$</td> </tr> </table> <p>Temos: $Lt = Lv + Lp \cdot x$</p> <p>$Lt = \text{Litros total}$ $Lp = \text{Litros por peixe}$ $Lv = \text{Litros vago}$ $x = \text{quantidade de peixes}$</p>	Peixes pequenos	$5 + 2x$	Peixes médios/pequenos	$10 + 5x$	Peixes médios/grande	$20 + 15x$	Peixes grandes	$40 + 40x$	Peixes jumbos	$100 + 100x$
Peixes pequenos	$5 + 2x$										
Peixes médios/pequenos	$10 + 5x$										
Peixes médios/grande	$20 + 15x$										
Peixes grandes	$40 + 40x$										
Peixes jumbos	$100 + 100x$										

Fonte: Registros do relatório dos alunos

Um uso comum dos modelos matemáticos por modeladores, para além da descrição de fenômenos está na previsão de casos futuros a partir de um conjunto de dados, sejam esses dados prontos ou dados coletados empiricamente. Sousa, Tortola e Silva (2018) apresentam uma investigação que incide sobre o número de homicídios no município de Toledo, Paraná. Os dados, coletados diretamente do fenômeno são idealizados em uma situação matemática que culmina no ajuste de uma função definida por partes (Quadro 5).

Quadro 5: Quantidade de homicídios em Toledo - PR.

<p>Variáveis:</p> <p> $\left\{ \begin{array}{l} \text{Número de homicídios: } f(t) \\ \text{Tempo: } (t) \\ \text{Variável auxiliar: } x, \\ \text{sendo que } x = t - 2005 \end{array} \right.$ </p>	<p>As razões entre os termos f_{x+1} e f_x se aproximam, e podemos supor por hipótese, que existe um $k = \frac{f_{x+1}}{f_x}$.</p> <p>Uma progressão geométrica poder ser utilizada como meio para obtenção do modelo, mas, optamos em trabalhar com uma função exponencial, da forma: $f(x) = ae^{bx}$</p>
<p>Modelo Matemático para 2005 a 2008</p> <p>$g(x) = 20,6930e^{0,36383x}$</p> <p>$g(t - 2005) = 20,6930e^{0,36383t - 729,47915}$</p>	<p>Modelo matemático para 2008 a 2013</p> <p>$i(x) = 118,8069e^{-0,2183x}$</p> <p>$i(t - 2005) = 118,8069e^{-0,2183t + 437,69150}$</p>
<p>De acordo com o modelo, a previsão para 2014 é de 17 homicídios; que para 2015 de 14 homicídios; já para 2020 de 5 homicídios.</p>	

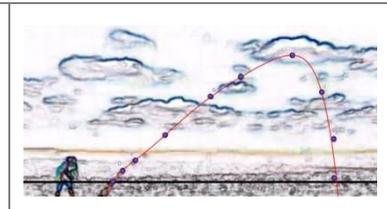
Fonte: Adaptado de Sousa, Tortola e Silva (2018)

Além da previsão do número de acidentes futuro a partir do modelo matemático, outra consequência é abordada pelos alunos, a instauração de um departamento de homicídios no município, o que justifica a mudança no comportamento dos dados observados e o uso da função definida por duas partes. O modelo matemático, portanto, foi utilizado no sentido de explicar o comportamento do fenômeno observado e, nesse caso, ‘ganha’ uma atribuição social, sinaliza a interferência e normatização do fenômeno.

Os modelos matemáticos abordados no Quadro 5, que possibilitaram a resolução da atividade estão ‘carregados’ de teorias matemáticas que visam dar suporte à sua construção para a situação-problema, como indica Barbosa (2009), como é o caso do número de homicídios, em que os parâmetros de uma progressão geométrica sinalizam o uso da função exponencial. Faz-se importante sinalizar que os usos de conceitos matemáticos podem colaborar, ou não, para que os modelos se constituam de “pedaços de conhecimento” (SRIRAMAN; LESH, 2006), pois a estrutura matemática subjacente ao uso dos modelos matemáticos em atividades de modelagem determinam, ou nas palavras de Wittgenstein (2012) normatizam, a estruturação gramatical do modelo desenvolvido, o qual deve carregar, ainda, para além das teorias matemáticas, especificidades da situação-problema investigada.

Outro uso de modelos matemáticos em atividades de modelagem matemática, diz respeito ao apoio em protótipos e experimentos na investigação e simulação de atividades do cotidiano de interesse dos alunos. Para detalhar esse tipo de atividade de modelagem matemática trazemos os registros de uma dupla de alunos que, no contexto da disciplina de Modelagem Matemática em um curso de Licenciatura em Matemática, investigou o “lançamento de foguetes”, a partir de um experimento com a produção do protótipo de um foguete de garrafa PET, água e ar comprimido. O protótipo serviu para os alunos coletarem dados, embasados nas três leis de Newton, que descrevem os objetos na terra e no espaço, e com isso se tornam condição de possibilidade para descrever sua aplicabilidade em um foguete de garrafa PET (Quadro 6).

Quadro 6: Análise do lançamento de foguetes por meio de um protótipo.

<p>O alcance (distância) percorrida por um protótipo de foguete (construído de garrafa PET) de acordo com a variação do volume de água em seu interior.</p>		<p>Lançamento</p> <p>v = Volume de água $f(v)$ = Distância percorrida</p>	
---	---	---	---

Modelo Matemático

Apesar de aparentemente num lançamento a construção de uma parábola fique evidente no vídeo e no experimento: $f(x) = -0,000000000125x^4 + 0,00000030625x^3 - 0,00025625x^2 + 0,095x + 9,7$

Para os nossos experimentos consideraremos apenas a parte crescente da mesma, pois num lançamento real a partir da queima de combustível temos um crescimento na distância percorrida:

H_{n1} : O crescimento é contínuo e exponencial em relação ao volume, e ainda o volume será: $0 < x \leq 2000$.

Obtendo pelo método dos mínimos quadrados:

$$f(v) = b * e^{av}$$

Usando os dados coletados em vídeo e o método dos mínimos quadrados para ajuste de curvas:

$$f(v) = 19,02566772 * e^{0,000444545v}$$

Fonte: Registros do relatório dos alunos

Na investigação de uma situação-problema cuja coleta de dados é possível por meio de um protótipo, os alunos encontram dificuldades acerca da simulação do lançamento do foguete ao espaço, e, nesse contexto, o uso de um modelo matemático que contempla a situação investigada se confunde. Vale notar que abordamos no Quadro 6 o ajuste quadrático considerando a trajetória que o protótipo toma a partir de seu lançamento, no entanto, essa consideração não está articulada às condições físicas de lançamento do foguete. Ou seja, um uso descritivo da experiência não é suficiente, é preciso trazer à tona especificidades das regras que regem a situação-problema em investigação. Como aponta Wittgenstein (2012), quando jogamos um jogo é dentro dele que devemos balizar nossas ações e uso de regras, mesmo que seja para elaborar uma interpretação pública por meio da matemática.

O experimento e a construção do protótipo servem nesse caso ao uso das regras matemáticas que são apreendidas no contexto de ensino e de aprendizagem. No contexto das ciências, no entanto, o próprio protótipo elaborado com materiais mais próximos da realidade e simulando o ambiente de lançamento do foguete poderia se caracterizar como o modelo matemático para resolução da situação.

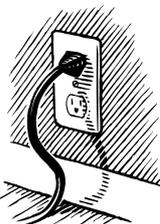
Entre os usos de modelos matemáticos caracterizados por Carreira e Baioa (2018), está a atividade de experimentação. Nesse contexto, Carreira, Baioa e Almeida (2020) abordam o uso de experimentos e protótipos em modelagem matemática e como eles podem ser pontes para o uso da matemática em situações de ensino, seja de matemática, seja de modelagem matemática.

Baseados nos protótipos, o uso da linguagem matemática atua em uma via de mão dupla entre o jogo de linguagem da situação-problema, que tem suas regras e de certo normatiza a coleta de dados, e o jogo de linguagem da matemática que, a partir das proposições assumidas, engendra a discussão e a interpretação possível. Desse modo, a linguagem matemática normatiza os usos de diferentes modelos matemáticos, com vistas

ao estudo de fenômenos, mas as proposições empíricas fundamentam quais estruturas matemáticas são possíveis para o estudo dos fenômenos. Nessa via de mão dupla e transição entre jogos de linguagem, hipóteses, regras e relação são usadas pelos sujeitos até que o modelo matemático seja usado/elaborado (STILLMAN, BROWN, GEIGER, 2015).

A conscientização social também é considerada nos usos de modelos matemáticos, em diferentes níveis de escolaridade, bem como a atuação e inserção dos modeladores na sociedade. Quando o foco está na conscientização e preparação, por exemplo, professores podem conduzir seus alunos no entendimento dos fatores com os quais temos que lidar diariamente (Quadro 7).

Quadro 7: Gastos de Energia Elétrica



Todo mês chega a nossa casa uma fatura que mostra os nossos gastos com energia elétrica. O valor cobrado depende de duas coisas:

- Quantidade de energia elétrica utilizada no mês, medida em quilowatts-hora (kWh);
- Valor da tarifa por kWh, determinada pela Companhia de Energia Elétrica de acordo com cada região.

QUANTA ENERGIA ELÉTRICA É GASTA EM SUA CASA?
E QUANTO SE PAGA POR ISSO?

desenho
20 minutos
 $20 \times 0,0016666 = 0,033332 \text{ kWh}$
a quantidade de energia gasta é de
0,033332
Tarifa 0,22 \$ 35
 $0,033332 \times 0,22 \$ 35 = 0,00 \$ 89$
Total de duas 30 x = R\$ 0,22

Cálculo do valor a ser pago - Televisão

Chuveiro
15 minutos
 $15 \times 0,0383333 = 0,549995 \text{ kWh}$
a quantidade gasta de energia elétrica é de
0,549995
Tarifa 0,22 \$ 35
 $0,549995 \times 0,22 \$ 35 = 0,121999$
Total de duas 30 x = R\$ 5,96

Cálculo a ser pago - Chuveiro

Fonte: Adaptado de Tortola e Almeida (2013)

Seja para descrever ou para prescrever especificidades da situação-problema, os usos dos modelos matemáticos são expressos por meio da linguagem, para resolver um problema ou para viabilizar a sistematização do conteúdo matemático subjacente à estruturação do modelo matemático, como ressaltam Tortola e Almeida (2013). Nesse caso, o modelo matemático indica ao aluno quanto apenas ele gasta com energia elétrica para assistir seu desenho predileto ou para tomar um banho. Embora os valores encontrados, R\$ 0,22 e R\$ 5,96, pareçam pequenos, quando somados aos gastos de outros aparelhos, a conta pode totalizar mais do que se pode imaginar. Temos aqui um uso explicativo, de como calcular quanto se gasta com energia elétrica para usar um determinado aparelho. Observe que não há qualquer texto explicativo ou fórmula nos registros dos alunos, mas uma estrutura nas contas que revelam como eles devem proceder para determinar o valor a ser pago. Esse conjunto de operações e relações observadas entre consumo, potência

do aparelho e tarifa, organizadas e ordenadas da forma como apresentam as resoluções do Quadro 7, caracteriza o modelo matemático para a situação.

Modelos matemáticos também podem colaborar para balizar práticas sociais e a inserção dos sujeitos modeladores no mercado de trabalho. O Quadro 8 aborda os registros do desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática por um grupo de alunos cujo interesse estava na criação de peixes em um espaço rural em que um dos integrantes do grupo residia com sua família.

Quadro 8: Construindo um criadouro de peixes

<p>Projeção do volume do tanque Relacionamos inicialmente a altura, o raio (metade do diâmetro), e a altura da estrutura do tanque, com base nesses dados calculamos o volume utilizando a expressão do cálculo do volume de um cilindro.</p> $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$ <p>Em que: $V = \text{volume}$; $r = 1,30 \text{ m}$; $h = 100 \text{ m}$ Substituindo em $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$ obtemos que:</p> $V = 3,14 \cdot 1,30^2 \cdot 100$ $V = 5.300 \text{ litros}$	<p>Entrevista com os pequenos agricultores da associação de peixes:</p> <p>Capacidade do tanque: 50 kg e $\frac{1}{2}$ inicial, com o peixe começando seu desenvolvimento com cerca de 200 gramas, o que dará um início de 250 peixes em desenvolvimento.</p> <p>Modelos para o custo da obra e a receita obtida foram desenvolvidos e indicaram a viabilidade do empreendimento.</p>
--	--

Fonte: Registros do relatório dos alunos

Em práticas de modelagem matemática como a que acarreta o uso de modelos matemáticos próximos ao do Quadro 8, não conseguimos perceber a rigidez de uma situação matemática idealizada, visto que a finalidade do uso da matemática está na investigação da situação-problema em si, e esse uso é normatizado não apenas pelas regras do jogo de linguagem da matemática, mas também pelas convenções e experiências da comunidade que trabalha com a criação e implantação de tanques de peixe. Entrevistas com produtores locais permitem não só dar sentido aos usos da matemática na situação, mas também estimar o lucro e as ações que serão possíveis com a implantação do tanque de criação. Como Frejd (2015) sinaliza, é importante conscientizar e preparar os alunos quanto ao uso dos modelos matemáticos na sociedade, mas para além dessa preparação auxiliar na atribuição de sentidos aos modelos matemáticos nos papéis que eles podem desempenhar em nossas atividades diárias.

Dado esse cenário colocado, diferentes usos de modelos matemáticos entraram em cena, e, embora produzidos com diferentes finalidades, ao olharmos para seus usos, como sugere Wittgenstein (2012), uma rede de semelhanças vai se delineando. Encaminhamos agora para a discussão final em que sistematizamos as reflexões e apontamos novas possibilidades.

Para finalizar esse cenário e abrir o leque para outras incursões possíveis

Modelos matemáticos são utilizados em diferentes esferas da vida cotidiana, e na ciência, por vezes, aparecem como forma de explicar relações que ocorrem na natureza e nas interações do ser humano com ela. Neste artigo, norteamos-nos pelo objetivo de apresentar uma reflexão de natureza filosófica sobre os usos da expressão *modelo matemático* por meio de diferentes práticas em que o uso de modelos matemáticos entra em ‘cena’ quando consideramos atividades de modelagem na Educação Matemática.

A partir da descrição de oito usos de modelos matemáticos em atividades de modelagem matemática, inspiramo-nos na terapia filosófica de Wittgenstein para tratar desses usos. Para além de exemplos de usos, tivemos a intenção de trazer à tona uma discussão gramatical, delineando especificidades dos usos que engendram regras associadas às especificidades da modelagem matemática e a transição entre os jogos de linguagem em que os modelos atuam como ‘pontes’ para a atribuição de sentido às situações-problema da realidade quando investigadas por meio da matemática.

Entre as confusões conceituais possíveis está a busca por uma generalização que balize todos os usos desse termo em práticas de modelagem matemática, sendo esses usos, também, decorrentes de finalidades distintas, com diferentes objetivos educacionais e intencionalidades diversas. Nesse contexto, os modelos matemáticos aparecem com diferentes vieses e finalidades, pontuados por aspectos das atividades dos estudantes e de sua experiência com o mundo, e se colocam como um dos usos da matemática feitos para atribuir sentido às nossas experiências com o mundo.

Os usos dos modelos matemáticos se mostraram ora descritivos, ora prescritivos, ora explicativos. No entanto, as finalidades do modelo matemático com vistas à situação-problema investigada devem ser levadas em conta, bem como a intencionalidade dos professores e alunos no desenvolvimento das atividades de modelagem matemática.

Reconhecer a modelagem matemática na Educação Matemática como um campo de articulação entre os usos da matemática e diferentes jogos de linguagem pode colaborar com a investigação de desdobramentos nos processos de ensino e de aprendizagem decorrentes do uso de modelos matemáticos em sala de aula, seus papéis, sua finalidade, sua relação e articulação com as regras matemáticas e como elas são vistas para o entendimento e a organização das experiências dos sujeitos com o mundo, bem como com o tratamento disponibilizado a elas nos contextos educacionais.

Referências

ALMEIDA, L. M. W. Considerations on the use of mathematics in modeling activities. **ZDM**,

Berlim, v. 50, p. 19-30, 2018. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11858-017-0902-4>.

ALMEIDA, L. M. W.; SOUSA, B. N. P. A.; TORTOLA, E. Desdobramentos para a Modelagem Matemática Decorrentes Da Formulação De Hipóteses. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 6., Pirenópolis. **Anais...** Pirenópolis: Sbem, 2015.

ALMEIDA, L. M. W.; TORTOLA, E.; MERLI, R. F. Modelagem Matemática – Com o que Estamos Lidando: Modelos Diferentes ou Linguagens Diferentes? **Acta Scientiae**, Canoas, v. 14, n. 2, p. 215-239, maio/ago. 2012.

ALMEIDA, L. W.; SILVA, K. P.; VERTUAN, R. E. **Modelagem Matemática na Educação Básica**. São Paulo: Contexto, 2012.

BARBOSA, J. C. Modelagem e Modelos Matemáticos na Educação Científica. **Alexandria - Revista de Educação em Ciência e Tecnologia**, v. 2, n. 2, p. 69-85, 2009.

BASSANEZI, R. C. **Ensino-Aprendizagem com Modelagem Matemática**: uma nova estratégia. São Paulo: Contexto, 2002.

BURAK, D. Modelagem Matemática sob um olhar de Educação Matemática e suas implicações para a construção do conhecimento matemático em sala de aula. **Revista de Modelagem na Educação Matemática**, Blumenau, v. 1, n. 1, p. 10-27, 2010.

CALDEIRA, A. D. Etnomodelagem e suas relações com a Educação Matemática na infância. In: BARBOSA, J. C.; CALDEIRA, A. D.; ARAÚJO, J. L. (org.). **Modelagem Matemática na Educação Matemática Brasileira**: pesquisas e práticas educacionais. Recife: SBEM, 2007, p. 81-97.

CARDOSO, V. C. **A Cigarra e a Formiga**: uma reflexão sobre educação matemática brasileira na primeira década do século XXI. Tese (Doutorado em Educação) - Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2009.

CARREIRA, S.; BAIÓIA, A. M. Mathematical modelling with hands-on experimental tasks: on the student's sense of credibility. **ZDM**, Berlin, v. 50, p. 201-215, 2018. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11858-017-0905-1>.

CARREIRA, S.; BAIÓIA, A. M.; ALMEIDA, L. M. W. Mathematical models and meanings by school and university students in a modelling task. **AIEM - Avances de Investigación en Educación Matemática**, v. 17, p. 67–83, 2020.

CARVALHO, D. S.; SILVEIRA, M. R. A. Jogos de linguagem na perspectiva de Wittgenstein evidenciados em atividades de Modelagem Matemática. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, v. 10, n. 5, p. 171-190, out. 2019.

DOERR, H. M.; ENGLISH, L. D. A Modeling Perspective on Students' Mathematical Reasoning About Data. **Journal of Research in Mathematics Education**, v. 34, n. 2, p. 110-136, 2003.

FREJD, P. Mathematical Modellers' Opinions on Mathematical Modelling in upper Secondary Education. In: STILLMAN, G.; BLUM, W.; BIEMBENGUT, M. S. (Eds.) **Mathematical Modelling in Education Research and Practice**: Cultural, Social and

Cognitive Influences. New York: Springer, 2015. p. 327-338.

GOTTSCHALK, C. M. A atividade matemática escolar como introdução de paradigmas na linguagem. **Revista de Educação, Ciência e Cultura**, Canoas, v. 23, n. 1, p.113-124, 2018.

GOTTSCHALK, C. M. C. A Natureza do Conhecimento Matemático sob a Perspectiva de Wittgenstein: algumas implicações educacionais. **Caderno de História e Filosofia da Ciência**, Campinas, v. 14, n. 2, p. 305-334, 2004.

GOTTSCHALK, C. M. A Transmissão e Produção do Conhecimento Matemático sob uma Perspectiva Wittgensteiniana. **Cadernos Cedes**, Campinas, v. 28, n. 74, p. 75-96, 2008.

GOTTSCHALK, C. M. C. O Papel do Método no Ensino: da maiêutica socrática à terapia wittgensteiniana. **ETD – Educação Temática Digital**, Campinas, v. 12, n. 1, p. 64-81, 2010.

JAVARONI, S. L.; SOARES, D. S. Modelagem Matemática e Análise de Modelos Matemáticos na Educação Matemática. **Acta Scientiae**, Canoas, v. 13, n. 2, p. 260-275, maio/ago. 2012.

KLÜBER, T. E. **Uma metacompreensão da modelagem matemática na educação matemática**. 2012. 396 f. Tese (doutorado) – Universidade Federal de Santa Catarina, Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica. Florianópolis, 2012.

LESH, R.; CARMONA, G.; HJALMARSON, M. Models and Modeling. In: ANNUAL MEETING OF THE NORTH AMERICAN CHAPTER OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 28., Mérida. **Proceedings...** Universidad Pedagógica Nacional: Mérida, 2006. p. 92-95.

LIMA, E. L. Conceitos e Controvérsias. **Revista do Professor de Matemática**, São Paulo, n. 1, p.1-5, 1982.

LINGEJÄRD, T. Faces of mathematical modeling. **ZDM**, Berlim, v. 38, n. 2, p. 96-112, 2006.

MARTINS, B. O.; SEKI, J. T. P.; ALMEIDA, L. M. W. Modelos Matemáticos em Atividades de Modelagem Matemática: um olhar a partir das duas últimas edições do ICTMA. In: ENCONTRO PARANAENSE DE MODELAGEM NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 8., Cascavel. **Anais...** Cascavel, Paraná, 2018. p. 1-16.

MIGUEL, A. A Terapia Gramatical-Desconstrucionista como Atitude de Pesquisa (Historiográfica) Em Educação (Matemática). **Perspectivas da Educação Matemática**, Campo Grande, v. 8, n. 18, p. 607-647, 2015.

MIGUEL, A. Is the Mathematics Education a Problem for the School or is the School a Problem for the Mathematics Education? **Ripem - Revista Internacional de Pesquisa em Educação Matemática**, SBEM, v. 4, n. 2, p. 5-35, 2014.

MORENO, A. R. Introdução a uma epistemologia do uso. **Caderno CRH**. v. 25, n. spe 2, p. 73-95, 2012.

MORENO, A. R. Descrição Fenomenológica e Descrição Gramatical – ideias para uma pragmática filosófica. **Revista Olhar**, São Carlos, v. 4, n. 7, p. 93-139, 2003.

MORENO, A. R. **Wittgenstein através das imagens**. Campinas: São Paulo, Editora da UNICAMP, 1995.

OLIVEIRA, P. T. S.; ALVES SOBRINHO, T.; STEFFEN, J. L.; RODRIGUES, D. B. B. Caracterização morfométrica de bacias hidrográficas através de dados SRTM. **Revista Brasileira de Engenharia Agrícola e Ambiental**, Campina Grande, v. 14, n. 8, p. 819-825, 2010.

PEREIRA, E.; KLÜBER, T. E. Uma Análise sobre os Diferentes Modelos Matemáticos Apresentados em Relatos Publicados na X CNMEM. In: CONFERÊNCIA NACIONAL SOBRE MODELAGEM NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 11., Belo Horizonte. **Anais...** Belo Horizonte: UFMG, Minas Gerais, 2019. p. 1-15.

POLLAK, H. O. The Place of Mathematical Modelling in the System of Mathematics Education: Perspective and Prospect. In: STILLMAN, G. A.; BLUM, W.; BIEMBENGUT, M. S. (Eds.). **Mathematical Modelling in Education Research and Practice: Cultural, Social and Cognitive Influences**. New York: Springer, 2015. p. 265-276.

SANT'ANA, A. A.; SANT'ANA, M. F. Uma experiência com a elaboração de perguntas em modelagem matemática. In. VI Conferência Nacional sobre Modelagem na Educação Matemática. **Anais...** UEL, Londrina, 2009. p. 1-13.

SOUSA, B. N. P. A. **A Matemática em atividades de modelagem matemática: uma perspectiva wittgensteiniana**. 2017. 316 p. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, UEL, Londrina, 2017.

SOUSA, B. N. P. A.; TORTOLA, E.; ALMEIDA, L. M. W. A Linguagem em Atividades de Modelagem Matemática: Caracterizações nos “Três Mundos da Matemática”. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, v. 5, n. 1, p. 1-20, ago. 2014.

SOUSA, B. N. P. A.; TORTOLA, E.; SILVA, C. Modelos Matemáticos em Atividades de Modelagem Matemática: uma terapia filosófica. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 7., Foz do Iguaçu. **Anais...** Foz do Iguaçu: SBEM, 2018. p. 1-13.

SRIRAMAN, B.; LESH, R. Modeling Conceptions Revisited. **ZDM**, Berlim, v. 38, n. 3, p. 247–254, 2006.

STILLMAN, G. A.; BROWN, J. P.; GEIGER, V. Facilitating Mathematisation in Modelling by Beginning Modellers in Secondary School. In: STILLMAN, G.; BLUM, W.; BIEMBENGUT, M. S. (Eds.) **Mathematical Modelling in Education Research and Practice: cultural, social and cognitive influences**. New York: Springer, 2015. p. 93-104.

TORTOLA, E. **Configurações de modelagem matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental**. 2016. 306 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2016.

TORTOLA, E. **Os usos da linguagem em atividades de Modelagem Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental**. 2012. 168 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2012.

TORTOLA, E.; ALMEIDA, L. M. W. Reflexões a Respeito do uso da Modelagem Matemática

em Aulas nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental. **Revista Brasileira de Estudos Pedagógicos**, Brasília, v. 94, n. 237, p. 619-642, 2013.

WITTGENSTEIN, L. **Investigações Filosóficas**. 7. ed. Tradução de Marcos G. Montagnoli. Petrópolis: Editora Vozes; Bragança Paulista: Editora Universitária São Francisco, 2012. (Coleção Pensamento Humano). Tradução de: *Philosophische Untersuchungen*.

ZANELATTO, H.; KLÜBER, T. E. Modelos Matemáticos na Conferência Nacional sobre Modelagem na Educação Matemática, In: ENCONTRO PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 15., Londrina. **Anais...** Londrina, Paraná, 2019. p. 1-12.