

## **Emergência e reconhecimento de um problema a investigar em modelagem matemática por alunos do Ensino Fundamental**

**Silvia Regina Potulski dos Santos<sup>1</sup>**

**Michele Regiane Dias Veronez<sup>2</sup>**

**Resumo:** No presente estudo direcionamos o nosso olhar para o modo como emerge um problema a ser investigado em atividades de modelagem matemática, e consideramos que a problematização de uma situação de interesse dos alunos oportuniza ao professor debater acerca de aspectos da realidade deles e de conhecimentos diversos, para além de conceitos matemáticos, ao buscarmos por soluções para o problema que rege o desenvolvimento da atividade de modelagem matemática. Com o propósito de investigar que aspectos levam os alunos a reconhecerem um problema a investigar em atividades de modelagem matemática, além de apresentarmos nossas considerações sobre a Modelagem Matemática com alusão ao problema, trazemos para discussão duas atividades de modelagem matemática desenvolvidas por alunos do Ensino Fundamental. A opção metodológica que fundamenta nosso estudo é a abordagem qualitativa, sendo os materiais de análise constituídos das transcrições das gravações em áudio das aulas e dos registros escritos dos alunos e da professora. Com base nas ações e argumentações dos alunos inferimos que, em uma atividade de modelagem matemática, o problema emerge e se sustenta segundo dois aspectos: pela curiosidade dos alunos associada ao envolvimento deles para com o tema em estudo; pela intervenção do professor durante o desenvolvimento das atividades.

**Palavras-chave:** Práticas com Modelagem Matemática. Problema em Modelagem Matemática. Ações dos Alunos. Ações do Professor.

## **Emergence and recognition of a problem to be investigated in mathematical modeling by Elementary School students**

**Abstract:** In this study we focus on the way a problem to be investigated in mathematical modeling emerges, and consider that the exploration of a situation that is interesting for the students gives the teacher an opportunity to debate aspects of their reality and of general knowledge, going beyond mathematical concepts, as they search for solutions for the problem which guides the development of the mathematical modeling activity. Aiming to investigate which aspects get the students to recognize a problem to be investigated in mathematical modeling activities, as well as to present our considerations on mathematical modeling alluding to the problem, we discuss two mathematical modeling activities developed by Elementary School students. The methodological option that supports our study is the qualitative approach, and the materials analyzed are transcriptions of audio recordings of classes, as well as the students' and the teacher's written registers. Based on the students' actions and reasoning we infer that, in a mathematical modeling activity, the

<sup>1</sup> Mestre em Ensino de Ciências Naturais e Matemática pela Universidade Estadual do Centro-Oeste (UNICENTRO). Brasil, Paraná. ✉ [emesil@hotmail.com](mailto:emesil@hotmail.com)  <https://orcid.org/0000-0003-0751-7056>.

<sup>2</sup> Doutora em Ensino de Ciências e Educação Matemática. Professora do Programa de Pós-Graduação Mestrado em Ensino de Ciências Naturais e Matemática da Universidade Estadual do Centro-Oeste (UNICENTRO). Paraná, Brasil. ✉ [miredias@gmail.com](mailto:miredias@gmail.com)  <https://orcid.org/0000-0001-9464-1498>.

problem emerges and is sustained according to two aspects: by the students' curiosity combined to their involvement with the subject being studied; by the teacher's intervention during the development of activities.

**Keywords:** Mathematical Modeling Practices. Problems in Mathematical Modeling. Students' Actions. Teacher's Actions.

## **Surgimiento y reconocimiento de un problema a ser investigado en modelización matemática por estudiantes de Primaria**

**Resumen:** En este estudio, centramos nuestra atención en la forma en que surge un problema a investigar en las actividades de modelado matemático, y consideramos que problematizar una situación de interés para los estudiantes le da al docente la oportunidad de debatir aspectos de su realidad y diferentes conocimientos además de los conceptos matemáticos, a la hora de buscar soluciones al problema que rige el desarrollo de la actividad de modelado matemático. Con el fin de investigar qué aspectos llevan a los estudiantes a reconocer un problema a investigar en las actividades de modelado matemático, además de presentar nuestras consideraciones sobre el modelado matemático con referencia al problema, traemos a discusión dos actividades de modelado matemático desarrolladas por estudiantes de primaria. La opción metodológica que subyace a nuestro estudio es el enfoque cualitativo, estando los materiales de análisis compuestos por las transcripciones de las grabaciones de audio de las clases y los registros escritos de los alumnos y del docente. A partir de las acciones y argumentos de los estudiantes, inferimos que, en una actividad de modelado matemático, el problema emerge y se sustenta de acuerdo a dos aspectos: por la curiosidad de los estudiantes asociada a su implicación con el tema en estudio; por la intervención del docente durante el desarrollo de las actividades.

**Palabras clave:** Prácticas de Modelado Matemático. Problema de Modelado Matemático. Acciones de los Estudiantes. Acciones del Maestro.

### **Introdução**

A elaboração de problemas é uma prática que pode ser concebida em diversas metodologias de ensino de matemática, entre elas a Modelagem Matemática. A compreensão que temos acerca da Modelagem Matemática a coloca como uma tendência metodológica da Educação Matemática que valoriza produção de conhecimento e, além disso, propicia estudar matemática partindo de um contexto da realidade do aluno, o que possibilita que ele atue como agente ativo no seu processo de aprendizagem. Isso porque essa compreensão de Modelagem Matemática alia às práticas de sala de aula o envolvimento dos alunos com uma situação a ser estudada, que pode, inclusive, ser por eles sugerida; e a procura por solução para um problema oriundo dessa situação em foco.

Ponderamos, nesse sentido, que o desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática ocorre a partir da definição de um tema (do interesse/da realidade do aluno) a ser estudado bem como do(s) problema(s) elaborados relacionados ao tema em questão, o que atribui ao problema um papel significativo em Modelagem Matemática.

Por estar associada à busca por uma solução para um problema e também ao fato de que tal problema pode ser elaborado pelos protagonistas do contexto escolar, ou seja, pelo professor, pelos alunos, ou por um acordo entre ambos, a Modelagem Matemática requer atitudes investigativas e reflexivas e pode desenvolver nos alunos (e também no professor) capacidades que extrapolem àquelas exigidas apenas quando esses sujeitos se envolvem com o processo de resolver um problema e reconhecer a resposta como uma solução aceitável.

Com base nesses fatos nos motivamos a refletir acerca do problema em Modelagem Matemática no contexto de uma investigação maior<sup>3</sup> e da qual fazemos alguns recortes que seguem discutidos neste artigo. Assim, o que trazemos são algumas de nossas reflexões acerca dos aspectos que levam os alunos a reconhecerem um problema a investigar a partir de duas atividades de modelagem matemática desenvolvidas, uma por alunos de um 7º ano e outra por alunos de um 8º ano do Ensino Fundamental de uma escola da rede pública do estado do Paraná.

Considerada a problemática enunciada, este texto segue organizado em quatro seções, além da presente introdução. Na primeira seção expomos considerações sobre Modelagem Matemática e elucidamos aspectos acerca do problema em atividades de modelagem matemática. Na segunda, apresentamos nossa opção metodológica e, na terceira, as atividades de modelagem matemática desenvolvidas. Por fim, na quarta seção, trazemos algumas reflexões, considerações e conclusões que decorrem do nosso mergulho no estudo empreendido.

### **Aspectos relativos ao problema em Modelagem Matemática**

A Modelagem Matemática, na Educação Matemática, sofre variações em relação à forma como é apontada por diversos autores: estratégia, metodologia, abordagem, para o ensino e aprendizagem de Matemática; no entanto, entre eles há um reconhecimento de que ela desempenha um papel importante no quesito relacionado ao despertar o interesse dos alunos nas aulas e de que ela tem potencial para fomentar e possibilitar mobilização, construção e/ou produção de conhecimentos.

A Modelagem Matemática, conforme apontado por Meyer, Caldeira e Malheiros (2013), consiste em abordar problemas ou situações da realidade ao passo que requer dos

---

<sup>3</sup> Neste artigo trazemos um recorte da investigação intitulada Um estudo sobre o problema em atividades de modelagem matemática, desenvolvida pela primeira autora do artigo (sob orientação da segunda autora) no âmbito do mestrado vinculado ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática.

alunos que eles se envolvam em todo processo de busca por respostas ou compreensões desses problemas ou situações, alicerçados em conhecimentos matemáticos e extra matemáticos. Nesse ambiente de ensino, os alunos têm oportunidades de discutir sobre conhecimentos matemáticos, bem como da situação em estudo, por meio da interação entre eles e o professor, tendo como pano de fundo todo o contexto de onde emergiu a situação investigada (SKOVSMOSE, 2001).

Almeida e Dias (2004, p. 25), ao considerar que a Modelagem Matemática se configura como uma alternativa para o ensino e para a aprendizagem da Matemática escolar, expõem que ela pode proporcionar “aos alunos oportunidades de identificar e estudar situações da sua realidade, despertando maior interesse e desenvolvimento de conhecimento mais crítico e reflexivo em relação aos conteúdos da Matemática”.

Nessa perspectiva, o processo de ensino e aprendizagem assume uma dinâmica diferenciada, visto que o aluno é estimulado a participar efetivamente do desenvolvimento da atividade de modelagem matemática a começar pela escolha do tema de estudo. Essa forma de promover o ensino de Matemática, com introdução de atividades de modelagem matemática nas aulas de matemática tem, segundo Carreira e Baioa (2018), o desafio de recriar, na sala de aula, ambientes que favoreçam ações educativas com maior centralidade no aluno.

Sendo que o desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática se dá a partir da escolha do tema ou da definição de um problema, tanto o tema quanto o problema ocupam um papel de destaque na Modelagem Matemática. Pollak (2015) nos coloca que a ideia central sempre é formular um problema, e que dessa formulação decorre fazer uso de conceitos matemáticos e no final, decidir se os resultados podem, em alguma medida, ser úteis para entender a situação original.

O problema em Modelagem Matemática, de modo geral, está relacionado a uma pergunta, a uma questão. Veronez, Castro e Martins (2018, p. 224), expõem que “[...] um problema em Modelagem Matemática corresponde a algo cuja resposta não é conhecida, mas que se deseja conhecer. Também carrega características do contexto em que emergiu e as condições que o colocaram nesta posição de problema”. Ainda, segundo esses autores, o problema não termina quando é solucionado, ou seja, o problema não é substituído por uma resposta. Nesse contexto ponderamos que em Modelagem Matemática o problema relaciona-se a um fato do tema que se pretende estudar; um delineamento da temática sobre a qual o aluno procederá a sua investigação. As perguntas ou questões definidas são assumidas como o problema que se pretende resolver, ou seja, são elas que

dão origem à atividade de modelagem matemática (BURAK, 2010).

Ampliando o debate instaurado no trabalho de Rehfeldt et.al (2018), no qual os autores enfatizam que um dos objetivos centrais da Modelagem Matemática se relaciona à resolução de problemas reais, incluímos que a identificação e reconhecimento de tais problemas também compõem esses objetivos, amparados no fato de que sendo a Modelagem Matemática orientada pela busca por soluções para um problema que não necessariamente precisa ser, ou vir escrito, em linguagem matemática; a atividade de modelagem matemática só existe se houver um problema a resolver e ele ser do interesse daquele que a desenvolve.

No campo teórico, o problema se apresenta como podendo ser sugerido pelo professor, proposto pelos estudantes ou emergir de um acordo entre ambos. Porém, em Nunes, Nascimento e Sousa (2020), os autores ao refletirem sobre práticas de modelagem matemática desenvolvidas por professores da Educação Básica sinalizam que elas se apresentam de forma tímida, dando indícios de que elas não estão efetivamente considerando atitudes ativas dos alunos, principalmente no que tange à escolha de um problema para estudo. De qualquer modo, independentemente de como ele “nasce”, há possibilidade de se alinhar interesses pedagógicos, no sentido de promover processos de ensino e fomentar processos de aprendizagem de Matemática com olhar crítico e atento para as esferas do mundo.

O problema, visto como uma “questão maior”, dá aos alunos oportunidades de aprender conceitos diversos (matemático ou não) e na tentativa de solucioná-lo envolver-se em um conjunto de atitudes e procedimentos que podem confirmar, ou não, suas previsões acerca do problema. A resolução do problema também favorece possibilidades de compreender aspectos da situação da qual advém o problema e de refletir sobre as soluções que obtiveram de modo a serem capazes de julgar a eficiência ou não delas no recorte que investigam. Inerente a esse conceito de Modelagem Matemática relacionado a um problema a ser investigado, bem como, com a busca de uma solução para o mesmo, Almeida, Silva e Vertuan, expõem que

uma atividade de modelagem matemática pode ser descrita em termos de uma situação inicial (problemática), de uma situação final desejada (que representa uma solução para a situação inicial) e de um conjunto de procedimentos e conceitos necessários para passar da situação inicial para a situação final (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012, p. 12).

Atividades de modelagem matemática, nesta configuração, consideram um trânsito

de uma situação inicial para uma situação final, sendo que nesse trânsito diversos aspectos podem e precisam ser evidenciados, sejam relativos aos conceitos matemáticos, sejam relativos aos fatores extramatemáticos. Para esses autores são nas relações entre realidade (origem da situação inicial) e matemática (área em que os conceitos e os procedimentos matemáticos estão fundamentados), discutidas ao longo do desenvolvimento de atividades de modelagem matemática, que é possível ativar, produzir e/ou integrar conhecimentos matemáticos e não matemáticos.

Como uma extensão dessa visão, Veronez (2013) salienta que é no trânsito da situação inicial para a situação final que o professor tem oportunidade de ensinar matemática, ao passo que proporciona aos alunos o envolvimento deles com conceitos matemáticos e com os diversos aspectos relevantes da situação definida para estudo. Assim, de acordo com a autora, o papel do professor em Modelagem Matemática é, de modo geral, incentivar o espírito crítico dos alunos e os colocar a refletir e buscar por argumentos que proporcionem verificar ou não suas hipóteses e conclusões.

Um aspecto considerado por Littig *et al.* (2019) e que se alinha ao nosso estudo é que a investigação de um problema em Modelagem Matemática é, na maioria das vezes, sustentada pela motivação e engajamento dos alunos em solucioná-lo, mas que pode ser também sustentada pelo professor na sua forma de orientar o trabalho dos alunos e de apresentar os conteúdos matemáticos que se fazem necessários durante o processo de investigação de forma interligada com outros conhecimentos mobilizados para se resolver o problema.

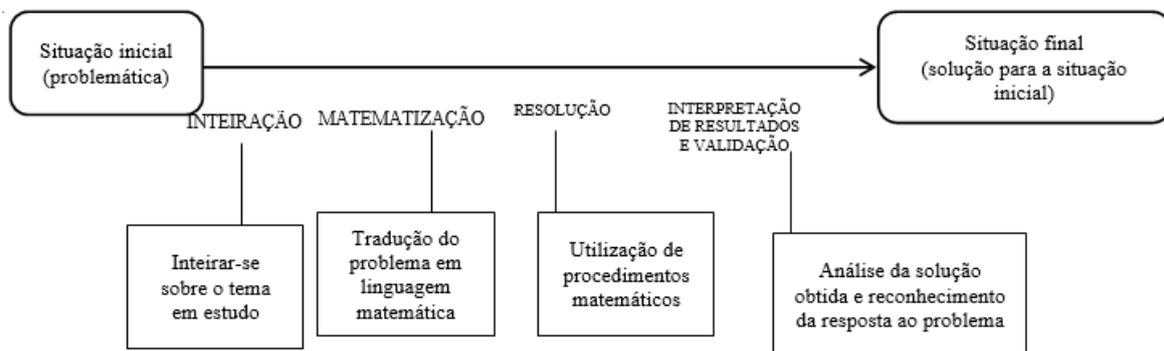
Em Modelagem Matemática tem relevância o professor oportunizar aos alunos refletir sobre os caminhos por eles assumidos, sobre a resposta obtida poder, ou não, ser reconhecida como solução para o problema em foco e também sobre o problema em si e sobre a situação geradora desse problema. Veronez (2013) ao destacar que ainda que, mesmo os alunos tendo uma situação definida para estudo, não é garantia de que dela possa emergir um problema imediato, quer dizer, uma situação pode não vir acompanhada de um problema a ser investigado; sendo assim, se faz extremamente necessária e importante uma orientação do professor, com vistas a definir tal problema para estudo. Em Almeida, Silva e Vertuan (2012) encontramos o que pode ser compreendido por orientar em atividades de Modelagem Matemática:

- a) orientar é indicar, caminhos, é fazer perguntas, é não aceitar o que não está bom, é sugerir procedimentos;
- b) orientar é não dar respostas prontas e acabadas, orientar não é sinalizar

- que “vale tudo”;
- c) orientar não é esperar que o aluno simplesmente siga exemplos;
  - d) orientar não é livrar-se de estudar, de se preparar para o exercício da função;
  - e) orientar não é despir-se da autoridade de professor (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012, p. 24).

Falar de problema em Modelagem Matemática também nos remete a localizá-lo nas fases da Modelagem Matemática (inteiração, matematização, resolução e interpretação e validação dos resultados) definidas por Almeida, Silva e Vertuan (2012) e ilustradas na Figura 1. Contudo, esses autores defendem que a ordem em que as fases aparecem pode variar de acordo com a dinâmica estabelecida na aula, e que, o “ir e vir” de uma fase para outra pode ser diferente em cada atividade.

Figura 1: Fases da Modelagem e suas características



Fonte: Veronez e Velede, 2016 (Adaptado de Almeida, Silva e Vertuan, 2012)

De modo geral, é na fase *inteiração* que o problema pode emergir, já que nessa fase se busca por informações sobre o tema, situação-problema a qual se tem interesse em estudar. A definição do problema pode acontecer em decorrência dessa busca, caso ele ainda não apareça formulado, e ainda ser traçadas as metas e definidas estratégias que orientam a sua resolução. Pesquisar, registrar, e discutir sobre as informações coletadas, auxiliam a conhecer aspectos da situação em foco e sustentam o desenvolvimento da atividade.

Para Almeida, Silva e Vertuan (2012) a fase *inteiração* é marcada por tornar conhecidos fatos relativos ao tema em estudo o que pode conduzir à formulação ou identificação do problema a ser investigado bem como a definição de estratégias para a sua resolução. Embora ela seja uma fase inicial do desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática, pode se estender durante todo o seu desenvolvimento. Essa fase conduz à formulação do problema, assim o problema é o foco central dessa fase como de toda a atividade. O problema elencado na fase inteiração pode apresentar-se em linguagem natural e, na fase da *matematização* ser transcrito para a linguagem matemática, ou seja,

nessa fase o problema vem descrito matematicamente.

Em todas as fases da Modelagem Matemática é esperado que “[...] o aluno possa estudar, formular, resolver e decidir e, embora não seja possível ao professor ensinar ou mostrar toda a Matemática que os alunos necessitarão, é preciso habilitá-los a ter confiança para resolver questões relacionadas a sua realidade e/ou ao seu cotidiano extraescolar” (CASTRO, 2017, p. 14). Tais ações, no entanto, podem ocorrer sob a orientação do professor ou tão somente pelos alunos, quando já tiverem desenvolvido autonomia para isso e não precisarem de ajuda para julgar, avaliar e ratificar suas escolhas.

Uma característica de atividades de modelagem matemática, no âmbito da Educação Matemática, é que elas são potencialmente cooperativas, uma vez que são atividades ancoradas em trabalhos em grupos. O trabalho em grupos oferece aos alunos oportunidades de desenvolver capacidades de aprendizagem tais como: falar, ouvir, pensar, criar, raciocinar, comunicar e questionar. Daí a indicação de que atividades de modelagem matemática devem ser desenvolvidas, prioritariamente, em grupo. Conforme Almeida e Dias (2004), um ambiente de cooperação e interação entre os alunos e entre professor e aluno, é fundamental para a construção do conhecimento, além de estimular a relação com a sociedade, visto que é nela que, geralmente, tem origem a situação problema a ser investigada pelo aluno.

Nesse sentido, Silva (2008, p. 82) afirma que, ao se envolverem com Modelagem Matemática organizados em grupos, os alunos “têm a possibilidade de discutir as diferentes estratégias para resolver um mesmo problema, e isso pode contribuir significativamente para a aprendizagem dos conceitos envolvidos”. Quando os alunos interagem, desenvolvem capacidades e dominam novos conhecimentos; podem enriquecer o seu processo de aprendizagem e também o processo de ensino.

A seguir elucidamos nossas escolhas metodológicas e apresentamos aspectos relacionados ao processo de coleta e análise dos dados.

### **Nossas opções metodológicas**

Para implementação das atividades de modelagem matemática em sala de aula regular nos apoiamos nas orientações de Almeida e Dias (2004), que sugerem que tal implementação ocorra gradativamente, a partir do que denominam de 1º, 2º e 3º momentos. Contudo, neste trabalho consideramos duas atividades desenvolvidas no terceiro momento, já que nelas temos maior envolvimento dos alunos. Ao debater acerca das atividades selecionadas focalizamos aspectos relativos ao problema que as originaram.

O gravador de voz foi usado em todas as aulas nas quais foram desenvolvidas atividades de modelagem matemática, ficando disponível um por grupo de alunos. Posteriormente, todas as gravações foram transcritas e constituíram nosso material de análise, assim como as produções escritas dos alunos.

Para procedermos à análise dos dados direcionamos olhares atentos para todos os registros que tínhamos: transcrição, na íntegra, dos diálogos dos alunos no decorrer das aulas que desenvolveram as atividades de modelagem matemática aqui consideradas; produtos dos alunos, resultados de ações decorrentes de suas estratégias com vistas a resolver o problema em foco.

Assim, ao longo de nossa análise, considerando as atividades de modelagem matemática que trazemos a seguir, buscamos identificar aspectos que sugerem ou indicam relações entre os alunos, a professora e o problema investigado. Saliemos que foge do escopo deste texto a descrição de forma integral das atividades. Nosso objetivo é compreender como emerge o problema nas atividades por eles desenvolvidas, além de buscar entender como os alunos identificam ou reconhecem o problema como tal. Convém destacar que ambas as atividades foram desenvolvidas nas turmas da primeira autora desse artigo.

### **As atividades desenvolvidas**

As atividades de modelagem matemática que ora apresentamos foram desenvolvidas em uma escola estadual da rede pública do estado do Paraná, em duas turmas de Ensino Fundamental, uma de 7º ano e uma de 8º ano, no turno matutino. Para o desenvolvimento dessas atividades de modelagem matemática as turmas foram divididas em grupos e a composição desses grupos foi organizada por escolhas entre os próprios alunos, consideradas as afinidades entre eles. A atividade denominada Atividade I foi desenvolvida por alunos do 7º ano do Ensino Fundamental e a Atividade II, por alunos do 8º ano. Contudo, os fragmentos que apresentamos na forma de episódios são de apenas um dos grupos de alunos dessas respectivas turmas. Na Atividade I consideramos os relatos do grupo A e nominamos os alunos por A1, A2, A3, A4 e A5 e, na Atividade II os alunos foram denominados B1, B2, B3, B4, B5 e B6, já que trazemos os relatos do grupo B. A saber, a professora é indicada pela letra P.

### **Atividade I: comparando o giro da nossa cabeça com a cabeça de uma coruja**

A atividade de modelagem matemática I, proposta por um grupo de alunos do 7º ano, foi orientada pela professora/(primeira autora) ao longo de 5 horas/aula e está relacionada a uma comparação. Os alunos tinham por interesse comparar o giro da cabeça do ser humano com o giro da cabeça de uma coruja. Tal tema surgiu após conversa informal entre os alunos do grupo ao apontarem esta curiosidade, conforme denotado no fragmento a seguir.

- A1: *Professora nós já decidimos o tema que vamos estudar. Queremos comparar o giro da nossa cabeça com o giro da cabeça de uma coruja.*
- P: *Interessante, me digam porque escolheram esse tema.*
- A1: *Ah professora é assim: desde que a senhora começou a fazer as atividades que a professora chamou de primeiro e segundo momento, nós conversamos e ficamos curiosos para saber sobre o giro da cabeça da coruja e da nossa.*

Satisfeitos com a escolha do tema começaram a realizar as primeiras pesquisas para responder a questionamentos simples por eles mesmos levantados como: a ideia que tinham de que a cabeça da coruja gira 360°. Assim, procuraram saber porque a coruja tem facilidade de girar mais a cabeça do que nós seres humanos. Essa busca por informações sobre o tema com vistas a obter respostas para a comparação que eles se propõem a fazer denota que os alunos têm certa autonomia e se aproxima do que é exposto na literatura em relação à fase inteiração indicada por Almeida, Silva e Vertuan (2012).

- A4: *Porque a cabeça da coruja gira 360° e a nossa não?*
- P: *Mas, será que realmente o pescoço da coruja gira 360°?*
- A4: *É mesmo, não tem como saber se é 360°.*
- A3: *É, não podemos ter certeza, como vamos medir isso?*
- A5: *Acho melhor pesquisar sobre outra coisa, mais fácil.*
- P: *Realmente medir quantos graus gira a cabeça da coruja vai ser difícil, mas não tem outro jeito de descobrir isso?*
- A1: *E se nós pesquisássemos na internet?*
- A2: *Boa ideia, lá deve ter.*

Após a inteiração do grupo com o tema em decorrência das pesquisas realizadas pelos integrantes do grupo, a professora, no intuito de identificar o problema a ser investigado questiona os alunos:

- P: *E o que pretendem estudar dentro desse tema?*
- A1: *Professora pensamos em comparar quantos graus pode girar a nossa cabeça se comparada a de uma coruja.*
- A3: *Esse seria o nosso problema.*

Desse fato ponderamos que um problema a ser investigado em uma atividade de modelagem matemática pode surgir a partir da curiosidade dos alunos sobre determinado

tema por eles abordado e ser enunciado e reconhecido por eles de forma natural. Nesta atividade, em particular, o problema parecia já ter sido eleito pelos alunos desde a enunciação do tema para estudo.

Tendo definido o problema a investigar, e o reconhecido como tal, os alunos usaram como estratégia de resolução a construção de um grande transferidor, em cartolina, que lhes possibilitasse medir de forma aproximada quantos graus gira, em média, a cabeça do ser humano (Figura 2).

Figura 2: Transferidor sendo construído pelos alunos



Fonte: Santos (2019, p. 29)

Para medir o ângulo construíram uma espécie de arco com um barbante, o qual era colocado na cabeça da pessoa. Esse arco ainda possuía uma ponta comprida a qual um aluno acompanhava o giro da cabeça tanto para a esquerda quanto para a direita, marcando no transferidor o grau correspondente.

Envolvidos com estratégias que consideraram ser adequadas para resolver o problema em questão, surgiu entre os alunos um questionamento em relação à idade da pessoa enquanto realizavam as medições. Eles queriam saber se as crianças teriam mais flexibilidade que as pessoas mais velhas. Essa curiosidade aventada pelos alunos depõe que eles transitam de forma articulada entre as fases matematização e resolução sugeridas por Almeida, Silva e Vertuan (2012) e, indica que eles estão atentos ao problema que enunciaram para estudo.

Das reflexões por eles realizadas, optaram por realizar as medições com crianças de até 10 anos, com os integrantes do grupo que eram adolescentes entre 11 e 14 anos e também com funcionários e professores da escola que tinham idade superior a 35 anos. As medidas obtidas foram registradas em tabelas (Tabela 1, Tabela 2 e Tabela 3).

Tabela 1: Medidas do ângulo de giro da cabeça de alunos de até 10 anos

ALUNOS	IDADE	LADO DIREITO	LADO ESQUERDO	MÉDIA
Aluno 1	10 anos	93°	90°	92°

Aluno 2	6 anos	95°	100°	97,5°
Aluno 3	9 anos	90°	95°	92,5°
Aluno 4	9 anos	90°	95°	97°
Aluno 5	8 anos	100°	94°	94,3°

Fonte: Santos (2019)

Tabela 2: Medidas do ângulo de giro da cabeça de alunos entre 12 e 14 anos

ALUNOS	IDADE	LADO DIREITO	LADO ESQUERDO	MÉDIA
Aluno 1	12 anos	100°	90°	95°
Aluno 2	12 anos	85°	85°	95°
Aluno 3	14 anos	80°	110°	95°
Aluno 4	14 anos	90°	75°	82°

Fonte: Santos (2019)

Tabela 3: Medidas do ângulo de giro da cabeça de pessoas acima de 35 anos

Professores/funcionários da escola	IDADE	LADO DIREITO	LADO ESQUERDO	MÉDIA
Agente Educacional 1	40 anos	70°	70°	70°
Agente Educacional 2	63 anos	75°	77°	76°
Agente Educacional 3	56 anos	75°	70°	72°
Agente Educacional 4	42 anos	80°	90°	85°

Fonte: Santos (2019)

Um primeiro olhar para os dados coletados e para o tratamento que deram levou os alunos a constatar que havia uma diferença significativa entre o ângulo de giro da cabeça e a faixa etária das pessoas. O fragmento a seguir ilustra esse fato, e colabora com a formulação de suas conclusões sobre o problema investigado. Nesse fragmento também ficam explicitadas algumas interpretações realizadas pelos alunos, denotando que eles já reconhecem a existência de uma resposta para o problema que focalizam.

- A1: *Olha professora, as crianças menores conseguem girar mais a cabeça.*
- A3: *É mesmo, deu para perceber que a diferença é bem grande.*
- A5: *É mesmo, olha as medidas das criancinhas são todas maior que 90° já as das tias da cozinha, o máximo que conseguiram girar foi 90°.*

Levando em conta a questão abordada pelo grupo no início da atividade, os alunos enunciam algumas conclusões incentivados pela professora, já que ela tinha por interesse identificar se os alunos reconheciam ter obtido uma resposta para o problema que eles elegeram para estudo:

- P: *Mediante o problema levantado pelo grupo a que conclusões vocês chegaram?*
- A2: *Bom professora, como nós já suspeitávamos, as crianças menores giram mais a cabeça.*

- A4: *Também dá para perceber que todos têm um lado da cabeça que gira mais.*
- A3: *Quanto mais velhas as pessoas, menos elas conseguem girar a cabeça.*
- A5: *Professora, ainda se comparar quantos graus em média gira a cabeça de uma pessoa com quantos graus pode girar a cabeça de uma coruja, a cabeça das pessoas gira menos que a metade do que gira a cabeça da coruja.*
- A1: *É mesmo! Pesquisamos que a coruja pode girar até 270° e o máximo que nós medimos aqui nas pessoas foi 110°.*

A satisfação dos alunos com os resultados obtidos por eles fica evidente quando observam os resultados obtidos: *“olha professora, as crianças menores conseguem girar mais a cabeça”*, observamos também que os alunos analisam os dados: *“É mesmo, olha as medidas das criancinhas são todas maior que 90° já as das tias da cozinha, o máximo que conseguiram girar foi 90°.”*, expressam suas conclusões: *“Também dá para perceber que todos têm um lado da cabeça que gira mais”*, retomam o problema inicial para apresentar uma solução: *“Professora, ainda se comparar quantos graus em média gira a cabeça de uma pessoa com quantos graus pode girar a cabeça de uma coruja, a cabeça das pessoas gira menos que a metade do que gira a cabeça da coruja”*, e consideram ainda que a resposta que chegaram pode ser entendida como uma solução válida para o problema que propuseram: *“É mesmo, pesquisamos que a coruja pode girar até 270° e o máximo que nós medimos aqui nas pessoas foi 110°”*.

Nessa atividade, o problema está relacionado a uma comparação desde a definição do tema, mesmo de maneira implícita. Ou seja, os alunos já consideravam a comparação como algo que orientaria o desenvolvimento da atividade de modelagem matemática deles. Isso fica nos diálogos quando a professora intervém questionando: *“E o que pretendem estudar dentro desse tema?”*, chamando a atenção quanto à definição de um problema a investigar e eles enunciam como problema *“[...] comparar quantos graus pode girar a nossa cabeça se comparada a de uma coruja”*. Desse fato evidenciamos que o problema emergiu da curiosidade dos alunos em relação ao tema e que o questionamento da professora auxiliou os alunos a reconhecerem o problema com tal.

## **Atividade II: filtro dos sonhos**

A atividade de modelagem matemática II foi desenvolvida por um grupo de alunos do 8º ano e orientada pela professora (primeira autora) ao longo de 5 horas/aula. Esta atividade está relacionada ao tema Filtros dos Sonhos. O grupo demonstrou interesse em

estudar sobre esse assunto devido ao fato de a professora de artes da escola ter desenvolvido no início do semestre um trabalho com as turmas dos 9º anos com esse tema. Ademais, esse tema foi aventado pelos alunos logo no início da implementação das atividades de modelagem com a turma (primeiro momento da familiarização com atividades de modelagem matemática).

Apesar de o grupo ter definido o tema rapidamente e com facilidade, os alunos não tinham clareza do que pretendiam estudar acerca desse tema. Então, optaram por fazer uma pesquisa, buscando resgatar os aspectos históricos a ele relacionados, bem como questões de ordem religiosa ou mística que se remetem aos filtros de sonhos.

- B1: *Professora, acho que nós temos que fazer um filtro dos sonhos como era feito quando ele surgiu.*
- P: *Interessante, com isso vocês conseguem resgatar um pouco a tradição e cultura em torno dos filtros dos sonhos.*
- B3: *Também acho que podemos construir um filtro dos sonhos como é feito nos dias de hoje, com aquela argola que a gente compra e com o fio próprio para isso.*

Esse momento de inteiração com o tema de estudo, mesmo não tendo definido uma questão ou problema para investigar, provoca os alunos a criarem estratégias de resolução que, de algum modo, atendessem ao que eles pretendiam. Assim, realizam a construção dos filtros dos sonhos; cada aluno optando por fazer o seu filtro. Como existem vários modelos de filtro dos sonhos, cada aluno fez o filtro do modelo de sua preferência. Na intenção de aproveitar a construção dos alunos, a professora os indaga, promovendo o seguinte diálogo:

- P: *Agora vocês conseguem observar as semelhanças e diferenças entre os filtros que construíram.*
- B6: *E com isso já podemos definir uma questão para nós investigarmos?*
- B1: *Mas só ver as diferenças não é um problema.*
- B3: *Mas o que estamos fazendo já não é uma investigação?*

Embora tenham surgido várias sugestões de questões por parte dos alunos como: verificar quantas figuras geométricas podem ser observadas em cada filtro construído; o custo para confeccionar um filtro dos sonhos; determinar a área do filtro dos sonhos; quantas partes tem um filtro dos sonhos, entre outras, em decorrência da ausência de uma questão no diálogo anterior, todas elas eram descartadas pelos próprios integrantes do grupo ao mesmo tempo em que eram por eles levantadas. As falas dos alunos B1 e B3, embora não sequenciais, ilustram esse fato:

- B1: *Mas daí dá uma resposta direta, e fica igual aqueles problemas do*

*livro quanto isso ou quanto aquilo, bem sem graça, acho que se é para fazer uma pesquisa ou investigação não pode ter uma resposta direta.*

B3: *Não sei, parece ser pouco, acho que temos que pensar um pouco mais.*

Essas observações dos alunos sinalizam que eles reconhecem que um problema em modelagem matemática, assim como propõem Veronez, Castro e Martins (2018), é algo que carece de investigação e, sendo assim, não vem acompanhado de uma resposta tão imediata. Ademais, essas observações também depõem que os alunos não têm um problema definido para investigar; o que os leva a buscar por mais informações sobre o tema em foco e, nesse sentido, permanecer na fase inteiração.

No fragmento a seguir os alunos tentam evidenciar um problema, estabelecendo um diálogo entre eles e também com a professora.

B1: *Professora, eu estava olhando aqui que o filtro dos sonhos é uma circunferência e que para fazer o filtro dos sonhos temos que dividir ela em algumas partes, por exemplo, esse filtro está dividido em 10 partes, que vão formando os desenhos de dentro do filtro. Será que todos os filtros são divididos em apenas 10 partes?*

B5: *Não, olha esse aqui, tem 12 partes, e esse de cipó que nós fizemos só tem 8.*

B4: *Então pode ser dividido em quantas partes eu quiser?*

B2: *Acho que não é bem assim, depende do desenho que você quer formar no filtro.*

P: *E será que todas as partes são iguais?*

B2: *Não sei, nem medimos para fazer.*

A professora, visando provocar os alunos de modo a definirem um problema a ser investigado segue orientando os alunos.

P: *Por que não medem para sair da dúvida? Para verificar se as medidas dos ângulos formados em cada parte são iguais.*

B3: *Podemos medir com o transferidor para ver se são iguais.*

B2: *Será que dá para fazer um filtro com todas as medidas iguais?*

P: *Parece ser interessante observar se é possível que um filtro dos sonhos apresenta alguma simetria entre os ângulos formados.*

Tal apontamento causa dúvidas e desperta a curiosidade dos alunos em relação a alguns aspectos relacionados ao tema em questão. Desse fato ponderamos que os alunos assumem um papel investigativo ao buscarem solucionar os questionamentos da professora. Esse despertar dos alunos, provocado pela professora, leva-os a transpor as fases da Modelagem Matemática.

Quando a professora intervém no diálogo dos alunos e chama a atenção para a simetria presente nos filtros dos sonhos parece despertar neles uma possibilidade de

investigação que ainda não tinham aventado. Porém, alguns alunos não demonstram satisfação com essa “dica” por parecerem esperar uma “questão” meramente matemática para resolverem. Esse fato fica explicitado no comentário do aluno B5.

B5: *Isso seria um problema para ser estudado, professora? Que estranho, não parece estar ligado com a matemática.*

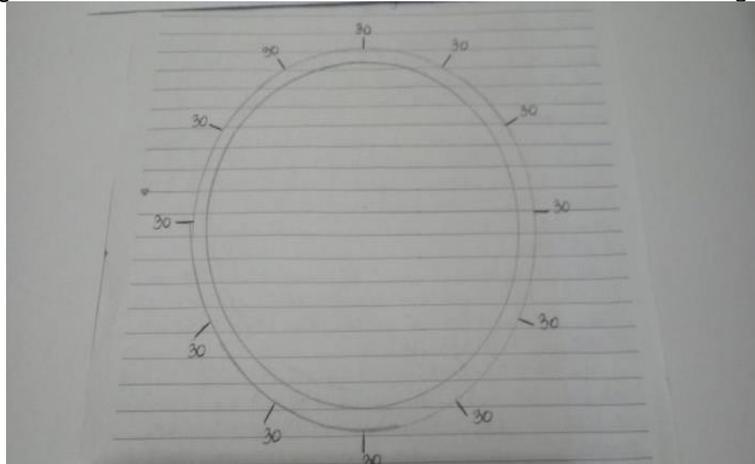
B2: *Então será que é possível fazer um filtro dos sonhos dividindo-o em partes iguais, com as mesmas medidas dos ângulos entre as partes?*

Aqui fica evidenciada a importância das intervenções da professora para que os alunos reconheçam que um problema em Modelagem Matemática pode ter uma conotação diferente daqueles comumente encontrados em livros didáticos e que ele não precisa ter resposta única ou vir expresso com um ponto de interrogação (VERONEZ; CASTRO; MARTINS, 2018). Nas falas dos alunos, ao buscarem por um problema a investigar, eles dão indícios de que um problema é uma questão, uma pergunta, que necessariamente, precisa de uma resposta única, que é obtida de forma imediata, a partir de algoritmos matemáticos.

A ação da professora ao perceber a dificuldade dos alunos em compreender o que é um problema e identificá-lo durante o desenvolvimento da atividade foi orientar, direcionar os questionamentos de modo que eles, apoiados nas intervenções realizadas pela professora, identificassem um problema a ser investigado. Essa atitude corrobora com que é apresentado por Almeida, Silva e Vertuan (2012) em relação ao papel do professor em atividades de modelagem matemática.

Após a identificação do problema, os alunos definiram algumas estratégias para buscar uma solução para ele, dentre as quais destacamos o desenho de uma circunferência com o intuito de representar o filtro dos sonhos que desejavam construir (Figura 3). Essa representação dos alunos indica que o trânsito entre as fases da Modelagem Matemática acontece ao passo que os alunos vão desenvolvendo a atividade de modelagem matemática e que elas, de fato, como sugerem Almeida, Silva e Vertuan (2012) não seguem uma sequência linear; ou seja, há idas e vindas entre elas.

Figura 3: Desenho do Filtro dos sonhos com as medidas dos ângulos



Fonte: Santos (2019, p. 36)

De posse do desenho, o qual serviu de esboço do filtro que pretendiam construir, construíram o filtro dos sonhos (Figura 4), representando as divisões de forma que este fosse simétrico.

Figura 4: Filtro dos Sonhos e verificação das medidas dos ângulos



Fonte: Santos (2019, p. 36)

A resolução do problema, embora genérica, gerou satisfação nos alunos, como denotado na fala do aluno B3: “Então conseguimos mesmo construir um filtro dos sonhos com todas as partes tendo a mesma medida. Se circunferência tem  $360^\circ$  e dividimos ela em 12 partes, cada parte com  $30^\circ$ , assim o filtro também tem 12 partes e cada uma tem  $30^\circ$ ”. Nesse sentido, entenderam que essa poderia ser uma solução válida, porém, que existiriam outras, seguindo sempre a mesma lógica.

### Discussão dos resultados e algumas considerações finais

Ao olharmos para as atividades desenvolvidas temos como uma de nossas constatações que um problema a ser investigado em uma atividade de modelagem matemática nem sempre emerge de forma natural, a partir da curiosidade dos alunos sobre

um determinado tema por eles abordado. Desse fato identificamos que, quando os alunos já têm definido o problema, todo o desenvolvimento da atividade ocorre de forma mais espontânea e, dessa identificação, ponderamos que as estratégias para buscar uma solução para o problema vão sendo traçadas pelos alunos de forma integrada. Eles vão se envolvendo naturalmente e a participação do grupo acontece de forma bastante ativa e crítica, no sentido proposto por Skovsmose (2001).

Na Atividade I, por exemplo, o grupo não apresentou grandes dificuldades durante o desenvolvimento, haja visto que tinham definido desde o início de forma clara e objetiva o tema e, principalmente, o problema que queriam investigar. As estratégias nas quais se apoiaram na busca por solução para o problema também foram surgindo naturalmente, vez ou outra precisavam de alguns ajustes. Elas também foram sendo descartadas e substituídas por outras pelos próprios alunos, sem muitas intervenções da professora.

O desenvolvimento que os alunos deram à Atividade I, por vezes, traz um indicativo interesse que também aparece discutido na literatura nas palavras de Burak (2010), Meyer, Caldeira e Malheiros (2013), entre outros, de que o problema não necessariamente precisa se apresentar na forma de uma pergunta. Nesta atividade o problema teve essa característica e, dele, decorreu o desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática.

Evidenciamos também que, na intenção de formular/identificar um problema, há uma busca constante dos alunos por fazer algo, representar de alguma forma uma ideia ou questão relacionada ao tema, bem como, relacioná-lo com algum conteúdo ou conceito matemático. Por vezes, até apresentam soluções para o problema que ainda não foi integralmente definido. Dessa evidência ponderamos que o ato de participar na formulação do problema favorece com que os alunos tenham oportunidade de acessar seus conhecimentos, os mobilizá-los e também organizar seu pensamento, e desenvolver habilidades que auxiliem na sua aprendizagem em matemática.

Almeida, Silva e Vertuan (2012) também chamam atenção no que concerne às práticas de sala de aula baseadas na realização de atividades investigativas, como é o caso das atividades de modelagem matemática, requererem um novo comportamento diante dos problemas, ao passo que envolvem os alunos com a própria definição de um problema e projetam no professor atitudes que consideram articular e significar conceitos matemáticos.

Outro aspecto que evidenciamos nesta investigação é que ter um tema definido para estudo não garante a definição do problema de imediato, ou seja, um tema pode não vir acompanhado de um problema a ser investigado, conforme apontado por Veronez (2013).

Um exemplo disso acontece na Atividade II sob dois fatores: apesar do grupo ter definido o tema rapidamente e com facilidade, não tinham clareza do que pretendiam estudar acerca desse tema e; ao mesmo tempo que os alunos entendem que um problema a investigar não pode ter uma resposta “direta” eles têm dificuldade em enunciar/identificar um problema com tal característica. Uma reflexão acerca dessa dificuldade nos sugere que ela esteja assentada nos indicativos abordados no texto de Nunes, Nascimento e Sousa (2020).

Convém destacar que na Atividade II o problema só foi definido pelos alunos mediante as intervenções realizadas pela professora, nesse sentido, inferimos que mesmo que o problema tenha se originado de uma parceria entre os alunos e a professora, associado à inteiração com o tema, o reconhecimento do problema esteve atrelado à atitude da professora. Mesmo assim, como o tema foi eleito pelos alunos, sua participação e interesse em obter uma resposta para tal problema foi mantida e conservada até eles reconhecerem que tinham elaborado uma solução, mesmo que genérica.

Da análise que realizamos a partir dessas atividades de modelagem matemática, cuja investigação aqui discutida tinha por objetivo investigar que aspectos levam os alunos a reconhecerem um problema a investigar em atividades de modelagem matemática, inferimos que há formas distintas de os alunos identificarem/formularem um problema a ser investigado em atividades de modelagem matemática. Na Atividade I, o problema emergiu da curiosidade dos alunos acerca do tema em estudo e, na Atividade II os alunos tinham claro o tema de interesse, porém o problema emergiu mediante às intervenções da professora considerando a dificuldade dos alunos quanto à identificação do problema. Sendo assim, o problema foi identificado pelos alunos mediante intervenções da professora.

Sobre as intervenções da professora em ambas as atividades ponderamos, assim como apresentam Veronez e Castro (2018) que elas têm características distintas e, portanto, ocorrem de maneiras distintas também. Na Atividade I a intervenção da professora foi no sentido de contribuir para que os alunos identificassem o problema já que eles sabiam o que pretendiam estudar. Já na Atividade II, as orientações da professora foram no sentido de sugerir, de indicar caminhos; e foram fundamentais para a elaboração do problema.

Para finalizar, destacamos que o papel do professor durante o desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática é fundamental. Seja para acompanhar, orientar ou corroborar as ações dos alunos, seja para intervir, sugerindo ou os questionando. Suas intervenções também se fazem importantes na medida em que elas possibilitam o trabalho com conteúdos matemáticos e favorecem com que os alunos atuem ativamente ao longo do desenvolvimento da atividade de modelagem matemática e se tornem corresponsável

por suas aprendizagens.

## Referências

ALMEIDA, L. M. W. de; DIAS, M. R. Um estudo sobre o uso da Modelagem Matemática como Estratégia de Ensino e Aprendizagem. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, ano 17, n. 22, p. 19-35, 2004.

ALMEIDA, L. M. W.; SILVA, K. P.; VERTUAN, R. **Modelagem Matemática na Educação Básica**. São Paulo: Contexto, 2012.

BURAK, D. Modelagem Matemática sob um olhar de Educação Matemática e suas implicações para a construção do conhecimento matemático em sala de aula. **Revista de Modelagem na Educação Matemática**, v. 1, n. 1, p. 10-27, 2010.

CARREIRA, S.; BAILOA, A. M. Mathematical modelling with hands-on experimental tasks: on the student's sense of credibility. **ZDM**, v. 50, n. 1-2, p. 201-215, 2018.

CASTRO, É. M. V. **Procedimentos dos alunos associados às suas ações cognitivas em atividades de modelagem matemática**. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Naturais e Matemática) – Universidade Estadual do Centro-Oeste, Guarapuava, 2017.

LITTIG, J.; LORENZONI, L. L.; TEIXEIRA, O. L. de; FERREIRA, M. A. V. A Modelagem Matemática na perspectiva sociocrítica e a Teoria da Situação Didática: identificando aproximações potencializadores da aprendizagem e do desenvolvimento do conhecimento reflexivo. **REnCiMa**, v. 10, n. 1, p. 01-13, 2019.

MEYER, J. F. C.; CALDEIRA, A. D.; MALHEIROS, A. P. S. **Modelagem em Educação Matemática**. 3.ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2013.

NUNES, A. da S.; NASCIMENTO, W. J.; SOUSA, B. N. P. A. Modelagem Matemática: um panorama da pesquisa brasileira na Educação Básica. **REnCiMa**, v. 11, n. 4, p. 232-253, 2020.

POLLAK, H. O. The Place of Mathematical Modelling in the System of Mathematics Education: Perspective and Prospect. In: STILLMAN, G. A.; BLUM, W.; BIEMBENGUT, M. S. (Eds). **Mathematical Modelling in Education Research and Practice**. Cham, Switzerland: Springer, p. 265-276, 2015.

REHFELDT, M. J. H.; NEIDE, I. G.; BÖCKEL, W. J.; BROILO, A. P.; PISCHING, I.; HEINEN, C. A.; KÖNIG, R. I. Modelagem Matemática no Ensino Médio: uma possibilidade de aprendizagem a partir de contas de água. **REnCiMa**, v. 9, n. 1, p. 103-121, 2018.

SKOVSMOSE, O. **Educação matemática crítica: a questão da democracia**. São Paulo: Papirus, 2001.

SANTOS, S. R. P. dos. **Um estudo sobre o problema em atividades de modelagem matemática**. 2019. Dissertação (Mestrado em Ciências Naturais e Matemática) – Universidade Estadual do Centro-Oeste do Paraná, Guarapuava, 2019.

SILVA, K. A. P. **Modelagem Matemática e semiótica: algumas relações**. 2008.

Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2008.

VERONEZ, M. R. D. **As funções dos signos em atividades de modelagem matemática.** 2013. 176p. Tese de Doutorado (Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013.

VERONEZ, M. R. D.; CASTRO, E. M. V. de. Intervenções do professor em atividades de modelagem matemática. **Acta Scientiae**, Canoas, v. 20, n. 3, p. 431-450, maio/junho 2018.

VERONEZ, M. R. D.; CASTRO, E. M. V.; MARTINS, M. A. Uma Investigação Acerca o Problema em Atividades de Modelagem Matemática. **VIDYA**, Santa Maria, v. 38, n. 1, p. 223-235, jan./jun. 2018.

VERONEZ, M. R. D.; VELEDA, G. G. Reflexões sobre a Realidade em uma Atividade de Modelagem Matemática. **Perspectivas da Educação Matemática**, v. 9, n. 21, p. 1237-1252, 2016.