UMA MATEMÁTICA PARA O ENSINO DO CONCEITO DE COMBINAÇÃO SIMPLES A PARTIR DE UMA REVISÃO SISTEMÁTICA DE LITERATURA

Jean Lázaro da Encarnação Coutinho
Mestre em Educação
Instituto Federal da Bahia - Brasil
jeancoutinho@ifba.edu.br

Jonei Cerqueira Barbosa
Doutor em Educação Matemática
Universidade Federal da Bahia - Brasil
jonei.cerqueira@ufba.br

Resumo

Neste artigo, buscamos modelar uma Matemática para o Ensino do conceito de *combinação simples* a partir de uma Revisão Sistemática de literatura. Para isto, analisamos um *corpus* de dez artigos de periódicos brasileiros avaliados no sistema *WebQualis* do portal da *CAPES* com classificações A1, A2, B1 e B2 nas áreas de Educação e Ensino. Em seguida, apresentamos um modelo parcial, a partir das diferentes formas de *realizações*, categorizados em quatro *panoramas*: formalista, instrumental, ilustrativo e comparativo. Esses *panoramas* explicitam uma variabilidade de formas – e suas *vinculações* – que são utilizadas para comunicar o conceito de *combinação simples*.

Palavras-Chave: Matemática para o Ensino. Revisão Sistemática. Combinação Simples.

Abstract

In this article we seek to model a mathematics for teaching of the concept of simple combination from a systematic review of literature. For this, we analyse a *corpus* of ten papers of Brazilian journals evaluated as A1, A2, B1 e B2 in Education and Teaching areas by the WebQualis system of the CAPES Brazilian Funding Agency. Following, we present a partial model with four landscapes built from different realizations: formal, instrumental, illustrative, and comparative. These landscapes make explicit a variability of forms – and their entailments – that are used to communicate the concept of simple combination.

Keywords: Mathematics for Teaching. Systematic Review. Simple Combination.

INTRODUÇÃO

Os estudos com foco em Análise Combinatória (AC) vêm ganhando visibilidade no campo da Educação Matemática, tanto no que se refere à aprendizagem (CORREA; OLIVEIRA, 2011; PESSOA; BORBA, 2010), quanto no que se refere ao ensino (ALVES; SEGADAS, 2012; BORBA, 2013). Neste trabalho, lançamos olhares sobre discussões que vêm sendo feitas no Brasil em torno do ensino desse ramo da Matemática, convergindo para os entendimentos sobre o conceito de *combinação simples* que também será chamado neste estudo apenas de *combinação.* As ideias desse conceito serão tratadas ao longo do texto.

Buscando nos aproximar da estrutura metodológica que utilizaremos neste trabalho, tomaremos a definição de conceito matemático como a composição da palavra – que referencia o tema abordado – e todas as suas formas de representação (símbolos, imagens, metáforas, analogias e outros recursos textuais) que se reconhecem como parte da Matemática (DAVIS; RENERT, 2009). Neste trabalho, quando nos referimos ao conceito de *combinação* temos como interesse lançar olhar sobre as possíveis formas de comunicação utilizadas na tarefa de ensinar - toda situação ligada ao ensino, por exemplo, elaboração e execução de uma aula - esse conceito.

No que se referem à tarefa de ensinar Matemática, pesquisas atuais têm reconhecido a existência de uma Matemática específica mobilizada pelos professores ao fazê-la, que se diferencia da utilização da Matemática em outros domínios de prática (ADLER, 2005; DAVIS; RENERT, 2009, 2012; DAVIS; SIMMT, 2006). Em outras palavras, podemos entender que, da mesma maneira como um enfermeiro ou um engenheiro mobiliza uma Matemática específica para desempenhar suas respectivas tarefas, a Matemática mobilizada pelo professor em sua tarefa de ensinar também possui as suas características particulares. Essas especificidades vêm sendo discutidas em termos de Matemática para o Ensino (ADLER, 2005; DAVIS; RENERT, 2009, 2012; DAVIS; SIMMT, 2006), conforme discutiremos adiante.

Nosso interesse neste estudo é mapear, utilizando uma literatura pré-definida, a Matemática específica, a partir das diversas formas utilizadas para comunicar o conceito de *combinação simples* na específica tarefa de ensinar. Com o intuito de circunstanciar o nosso objeto e apresentar o objetivo em termos mais específicos, faremos uma breve discussão sobre AC e a motivação pela escolha do conceito de *combinação simples*, bem como uma melhor descrição do que apresentaremos como concepção de Matemática para o Ensino.

MATEMÁTICA PARA O ENSINO DE COMBINAÇÃO SIMPLES

Segundo Morgado et al. (1991), AC é a parte da Matemática que analisa estruturas e relações discretas. Podemos dizer que a AC estuda e desenvolve técnicas de contagem de elementos de um conjunto que satisfazem certas condições, sem necessariamente enumerar todos esses elementos (PESSOA; BORBA, 2009). Outro termo também utilizado na literatura para se referir a situações ligadas a AC é o Raciocínio Combinatório. Para Borba (2013), o Raciocínio Combinatório é

> [...] um modo específico de pensamento, caracterizado pela análise de situações nas quais são dados elementos de um ou mais conjuntos e estes elementos devem ser agrupados em combinações que atendem a relações específicas de escolha e ordenação dos elementos (p. 3).

No que diz respeito à importância do estudo de AC, Pessoa e Borba (2010) e Borba, Pessoa e Rocha (2013) argumentam que o desenvolvimento de pensamentos utilizados em problemas combinatórios é útil no pensar matemático e no pensar de outras áreas do conhecimento e em aplicações práticas do cotidiano. Lopes e Rezende (2010) defendem que as discussões sobre AC têm importância fundamental para argumentação hipotético-dedutiva, pois cada situação nos leva a operar por combinação e avaliação das possibilidades que as satisfazem. Essa defesa pode ser validada pelo fato de o assim chamado pensamento combinatório operar pela decisão das possibilidades que são válidas ou não, em cada situação e, a partir daí, avaliar o melhor caminho para sua solução.

Entretanto, de que maneira podemos perceber o potencial gerado pelo ensino de AC para soluções de problemas e para o desenvolvimento do fazer matemático? Uma resposta a essa pergunta é encontrada em Pessoa e Borba (2010), quando apontam que esse desenvolvimento depende da maneira como ela é trabalhada na escola. Há uma dificuldade do professor ao ensinar AC – e cujo problema pode estar na formação combinatória do professor – que leva os alunos a não elaborarem estratégias diversificadas para as soluções e compreensões das diferentes lógicas dos problemas, nos quais o único papel que lhes resta é o de tentar enquadrar as soluções em aplicações de fórmulas (BORBA; ROCHA; MARTINS; LIMA, 2009; PESSOA; BORBA, 2010).

Tal enquadramento nem sempre se apresenta como a forma mais indicada para as soluções dos problemas, pois, segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais Complementares (PCN+), "as fórmulas devem ser consequência do raciocínio combinatório desenvolvido frente à resolução de problemas diversos [...]" (BRASIL, 2002, p. 126). Esse quadro nos leva a perceber a existência de uma problemática em torno do ensino de AC.

Ferraz, Borba e Azevedo (2010, p. 4) sintetizam o papel do ensino formal (ensino ocorrido na escola) quando afirmam que tal ensino "deve possibilitar o uso de estratégias informais e formais na resolução de situações combinatórias, baseadas sempre na compreensão das situações por parte dos alunos". Isso mostra que outros estudos já sugerem a variabilidade na forma de comunicar conceitos em AC. No entanto, nos perguntamos se isso tem sido feito e de que maneira. Essas dúvidas evidenciam os professores, responsáveis pelo seu ensino nas salas de aulas. Particularmente, esses questionamentos lançam olhares sobre as várias formas que eles têm mobilizado para ensinar AC.

Essa variabilidade pode ter origem nas diferentes formações a que os professores de Matemática tiveram acesso e nas experiências já adquiridas com o ensino de Matemática (SABO, 2010). Entendemos que isso pode refletir nas diferentes formas como conduzem as comunicações acerca de AC em salas de aula.

As formas de soluções em AC podem variar de um problema para outro, o que requer estratégias diferentes de busca para suas soluções. Essas estratégias podem variar de uma aplicação direta do PFC (Princípio Fundamental da Contagem) ao conhecimento de técnicas de contagem que, embora sejam aplicações do PFC, se apresentam de formas mais elaboradas (CORREA; OLIVEIRA, 2011). Essas técnicas, também conhecidas como modos de formar agrupamentos, são apresentadas na educação básica por permutações simples, arranjos simples e *combinações simples*.

A compreensão dessas diferentes técnicas, bem como de suas aplicações em problemas específicos trazem dificuldades para os alunos. Borba et al. (2009), em trabalho que sintetizou alguns estudos sobre Análise Combinatória, indicam a necessidade de uma formação docente mais profunda em AC, para que os professores não reduzam o ensino a aplicações de fórmulas, permitindo aos alunos desenvolverem ferramentas que os auxiliem nos diversos problemas combinatórios. Em particular, os problemas de *combinações simples* são os que apresentam os menores índices de acertos ou são indicados como os mais difíceis para os alunos (CORREA; OLIVEIRA, 2011; PESSOA; BORBA, 2010). Essas dificuldades apresentadas pelos alunos podem ser consequência do que e de como os professores têm mobilizado o conceito em suas salas de aulas (SABO, 2010).

Sinteticamente, as *combinações simples* dão conta da seleção de p objetos de um conjunto com n objetos (com $p \leq n$), em que as diferentes ordenações dos mesmos objetos não formam novas possibilidades, ou seja, nas *combinações simples* a ordem com que os elementos são escolhidos é irrelevante (MORGADO et al., 1991)

Dessa forma, a dificuldade de compreensão e operacionalização ocorre, segundo Correia e Fernandes (2007), pelo fato dos alunos considerarem a ordem em que os elementos são selecionados como respostas diferentes. Como exemplo, podemos citar o seguinte problema: *De um grupo composto por 6 (seis) pessoas (Carlos, Maria, Diego, Rafaela, Pedro* *e Glória), de quantas maneiras diferentes podemos formar uma comissão com 3 (três) pessoas apenas?* Neste caso, a ordem em que se escolhem os três integrantes da comissão não gera novas possibilidades. Assim, a comissão formada por {Carlos, Glória, Rafaela} é idêntica à comissão formada por {Rafaela, Carlos, Glória}. Na maioria das vezes os alunos não percebem a igualdade desses subconjuntos e acabam considerando os mesmos agrupamentos mais de uma vez em suas soluções.

Diante do que foi exposto até aqui, especialmente no que tange ao conceito de *combinação simples*, surge o nosso interesse em tornar visível e sistematizar o que pesquisadores têm apresentado de contribuições referentes ao ensino de AC no Brasil. Neste sentido, sugerimos que o ensino de AC precisa abordar as diversas *realizações* que permeiam o conceito de *combinação simples*, em que essa variabilidade de formas de comunicar esse conceito passa pela figura do professor na condução de sua tarefa de ensinar.

Em Davis (2012) e Davis e Renert (2012, 2014), as *realizações* são as diversas associações (definições, algoritmos, analogias, metáforas, imagens, aplicações, gestos) utilizadas para comunicar certo conceito matemático na tarefa específica de ensinar. Como dito anteriormente, essas especificidades que permeiam a tarefa de ensinar vêm sendo investigadas em termos de Matemática para o Ensino.

Segundo Davis e Renert (2014), Matemática para o Ensino representa o modo como o professor organiza suas aulas, interpreta as ações dos alunos e responde aos questionamentos que lhe são feitos. Para nós, a Matemática para o Ensino tem referência na Matemática específica que é mobilizada na tarefa de ensinar. Em outras palavras, é o conjunto das formas com que um determinado conceito é comunicado no ensino.

Para Adler et al. (2005), a ideia é marcar a Matemática para o Ensino como uma forma diferente de mobilizar essa Matemática, produzida na prática e utilizada para a prática do professor. Para eles, essa diferença é evidenciada pelas especificidades nas formas de utilização da Matemática em diferentes práticas culturais, e para o grupo dos professores não seria diferente. Em outras palavras, da mesma forma que diferentes profissionais mobilizam uma Matemática específica nas suas tarefas, os professores, como uma categoria de profissionais, também mobilizam algo que é específico deles. Sendo assim, questionamo-nos sobre que Matemática para o Ensino é mobilizada no ensino do conceito de *combinação simples* em AC.

Para Davis e Renert (2009, 2012, 2014), a Matemática mobilizada no ensino emerge na própria tarefa de ensinar. Ou seja, por exemplo, os professores vão usar metáforas, situações, exemplos, os mais diversos possíveis, para realizar um conceito matemático em sala de aula. De posse disso, entendemos que a descrição dessa Matemática mobilizada na tarefa de ensinar não é exaustiva, mas, mesmo sem o intuito de mudar os termos já estabelecidos, propomos uma descrição parcial, propomos modelar teoricamente tal Matemática.

Retomando a ideia de tarefa de ensinar como toda situação que tenha referência ao ensino, a Matemática mobilizada para esse propósito pode ser observada em diversos contextos, como livros didáticos, documentos oficiais de orientações, salas de aula, curso com professores, publicações científicas, entre outros. Dito isto, podemos agora enunciar o objetivo do presente estudo: modelar uma Matemática para o Ensino do conceito de *combinação simples* a partir de uma Revisão Sistemática de literatura. Esse modelo pode contribuir com professores em todos os níveis de formação e atuação, além de oferecer à área científica da Educação Matemática uma sistematização das diversas formas que são, e podem ser utilizadas na comunicação do conceito de *combinação simples* em AC. Chamamos a atenção para o fato de que, embora alguns estudos utilizados para a construção deste trabalho tenham como objeto de investigação a aprendizagem, estaremos focados nos aspectos referentes ao ensino, às formas de comunicação do conceito de *combinação simples*.

PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

A Revisão Sistemática (RS) é um método de pesquisa bibliográfica que objetiva responder, a partir de uma síntese de diversos estudos, e com rigor metodológico, a uma questão específica. Este rigor metodológico aparece em termos de uma explicitação e transparência de todo o procedimento utilizado para identificar, selecionar, avaliar e sintetizar todos os estudos que forem incluídos na revisão (PETTICREW; ROBERTS, 2006; VICTOR, 2008).

Seguimos os seguintes passos: definição do objetivo da pesquisa (já enunciado); localização e coleta de estudos; avaliação e seleção de estudos; extração e agrupamento de informações; síntese descritiva das informações extraídas (PETTICREW; ROBERTS, 2006).

Com relação à localização e coleta dos estudos, optamos por analisar apenas artigos presentes em periódicos brasileiros de Educação Matemática no período de 2004 e 2014, configurando-se, assim, uma década de pesquisas publicadas anteriormente ao início da presente pesquisa. A escolha por artigos justifica-se por apresentarem resultados de pesquisa com análises mais sintetizadas.

Inicialmente, selecionamos os periódicos nacionais de maior abrangência em Educação Matemática, avaliados no sistema *WebQualis* do portal da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) com classificações A1, A2, B1 e B2 nas áreas de Educação e Ensino, resultando em uma lista com oito periódicos (Quadro 1). Em seguida, exploramos, no período de tempo definido, todos os volumes e números das publicações em cada periódico, processo em que coletamos artigos por títulos, resumos e/ou palavras-chave que fizessem qualquer referência a AC. Por algumas vezes, fez-se necessária a leitura do texto para permitir a escolha do artigo. Posteriormente, fizemos uma avaliação mais criteriosa dos artigos coletados, selecionando aqueles que, de alguma maneira, faziam referência à palavra "combinação", conceito foco desta pesquisa, resultando em um número de quatorze artigos.

A definição final do *corpus*, dez artigos (Quadro 1), estruturou-se após a leitura completa dos artigos. A partir das leituras, percebemos que três estudos faziam referência ao termo "combinação" como resultado de produto cartesiano (GAUTÉRIO; RODRIGUES; 2013; MORO; SOARES, 2006; MORO; SOARES; FILHO, 2010) e outro como sinônimo de possibilidades (SANTOS; GRANDO, 2011), o que não representava o nosso foco nas *combinações simples.* Esses quatro trabalhos foras desconsiderados como materiais de análise.

Quadro 1 – Relação dos periódicos e artigos selecionados

Periódicos selecionados	**Quantidade de artigos**	**Autores**
ACTA SCIENTIAE – Revista de Ensino de Ciências e Matemática	01	Alves e Segadas (2012)
ALEXANDRIA – Revista de Educação em Ciência e Tecnologia	01	Azevedo e Borba (2013a)
BOLEMA – Boletim de Educação Matemática	02	Groenwald, Zoch Neto e Homa (2009); Serrazina e Ribeiro (2012).
BOLETIM GEPEM	00	-
Educação Matemática em Revista (São Paulo)	02	Borba e Azevedo (2012); Barreto e Borba (2012).

EMP – Educação Matemática Pesquisa	04	Fernandes, Carvalho e Carvalho (2010); Landín e Sánchez (2010); Santos-Wagner, Bortoloti e Ferreira (2013); Borba, Pessoa e Rocha (2013).
EM TEIA – Revista de Educação Matemática e Tecnológica Ibero-americana	01	Pessoa e Borba (2010)
JIEEM – Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática	01	Vega e Borba (2014)
Revista Eletrônica de Educação	01	Azevedo e Borba (2013b)
ZETETIKÉ – Revista de Educação Matemática	01	Pessoa e Borba (2009)

Fonte: Elaborado pelos autores.

Para extração, agrupamento e síntese das informações, enquadramos o nosso trabalho em estrutura similar do Estudo do Conceito (EC). Como o intuito aqui não é realizar um EC – vamos apenas nos apropriar dele e convertê-lo em uma estratégia metodológica de análise que cumpra o objetivo deste estudo – nós o apresentaremos de maneira sintética.

Na área de Educação Matemática, Davis e Renert (2009, 2012, 2014) utilizaram o EC para os professores trazerem à tona suas formas de comunicar determinados conceitos em Matemática. Segundo Davis e Renert (2009, p. 38, tradução nossa), o EC "são ocasiões para escavar os significados existentes de conceitos, bem como as oportunidades para críticas compartilhadas e extensões de possibilidades interpretativas para fins pedagógicos". Apropriando-nos do EC como uma estratégia metodológica para modelar uma Matemática para o Ensino de *combinação simples*, apresentamos a síntese da nossa RS em termos de *realizations (realizações); landscapes (panoramas); entailments (vínculos)*.

Como dito anteriormente, as *realizações* são as diversas associações (definições, algoritmos, analogias, metáforas, imagens, aplicações, gestos) que são utilizadas para dar sentido a certo conceito matemático, na tarefa específica de ensinar, e os *panoramas* são as observações das relações entre as *realizações,* são as organizações de listas de *realizações* que apresentam características semelhantes e possíveis contrastes (DAVIS; RENERT, 2009, 2012). Em síntese, "o *panorama* é uma visão de macro nível, ao passo que uma *realização* é uma visão de micro nível, de um conceito" (DAVIS; RENERT, 2014, p. 62, tradução nossa). Para os mesmos autores, cada uma das *realizações* está imbricada de implicações próprias.

O intuito da ênfase *vinculações*, descrito em Davis (2012) e adotado neste estudo, é identificar e descrever essas diferentes implicações e relevâncias das diversas *realizações* de um determinado conceito matemático. Utilizamos a literatura para mapear as *realizações* do conceito de *combinação simples* e as apresentarmos em termos de *panoramas* e suas *vinculações*.

APRESENTAÇÃO DESCRITIVA DOS PANORAMAS E SUAS VINCULAÇÕES

A construção feita aqui considera o viés da Matemática para o Ensino estruturada metodologicamente no EC, o qual se apresenta, neste trabalho, como uma ferramenta metodológica que conduz essa modelagem a partir do que foi definido como *realizações.* Assumiremos aqui a ideia de que a Matemática para o Ensino busca identificar e modelar de forma teórica a diversidade de realizações que podem ser mobilizadas na tarefa de ensinar Matemática.

Apresentaremos agora a diversidade de *realizações* observadas na literatura no que diz respeito ao conceito de *combinação simples*. Primeiramente, nossa intenção era identificar, implícita ou explicitamente, como *combinação* aparece ou é concebida na literatura selecionada. Salientamos, fundamentados em Davis e Renert (2014), que nossa intenção não é classificar as *realizações* listadas como adequadas ou inadequadas, mas como entendimentos particulares de um conceito matemático que, muitas vezes, surgem de forma emergente no contato com aqueles. Nessa identificação chegamos à seguinte lista de *realizações*: definição formal, fórmula, ordenação irrelevante; diagrama de árvore das possibilidades, desenho, listagem, tabela, comparação com arranjo simples*,* objetos concretos ou virtuais.

A partir de análises e reflexões em torno das *realizações,* e considerando que algumas não são disjuntas, ou seja, podem ocorrer ao mesmo tempo, esboçamos um primeiro quadro de Matemática para o Ensino do conceito de *combinação simples* em termos de *panoramas*. (Quadro 2).

Quadro 2 – Panoramas construídos.

Panorama	**Realizações originárias**
Formalista	Definição formal
Instrumental	Fórmula
Ilustrativo	Diagrama de árvore das possibilidades; Desenho; Listagem; Tabela; Objetos concretos ou virtuais.
Comparativo	Ordenação irrelevante; Comparação com arranjo simples.

Fonte: Elaborado pelos autores.

A seguir, a descrição dos *panoramas*, suas manifestações na literatura estudada e algumas *vinculações*.

PANORAMA FORMALISTA

Neste *panorama*, o conceito de *combinação* é comunicado a partir da definição matemática formal, onde é apresentado em termos de uma generalização da contagem de subconjuntos que possuem determinadas características.

A *realização* de *combinação simples* como definição formal tem como propósito a apresentação formal das relações e propriedades que se mantêm constantes no conceito. No caso das *combinações*, essas relações e propriedades são referentes à característica dos elementos que formam o agrupamento e da irrelevância da ordem com que os elementos são escolhidos no processo. Exemplos dessa situação podem ser encontrados na literatura pesquisada.

Para Pessoa e Borba (2010, p. 5), *combinação* pode ser definida da seguinte forma: "Tendo **n** elementos, poderão ser formados agrupamentos ordenados de 1 elemento, 2 elementos, 3 elementos... **p** elementos, com 0 < **p** < **n**, **p** e **n** naturais; a ordem dos elementos não gera novas possibilidades".

Pessoa e Borba (2009, p. 116) e Santos-Wagner, Bortoloti e Ferreira (2013, p. 609) citam a definição utilizada por Merayo (2001) quando, a partir de um conjunto formado por **m** elementos, define *combinação* de ordem **n** desses elementos como

> [...] cada grupo formado por n elementos tomado dos m, tal que duas combinações se consideram distintas se diferem em algum de seus elementos. Nesta ordenação não influi a ordem de colocação, isto quer dizer que dois agrupamentos são iguais se contém os mesmos elementos, ainda que colocados em distinta ordem.

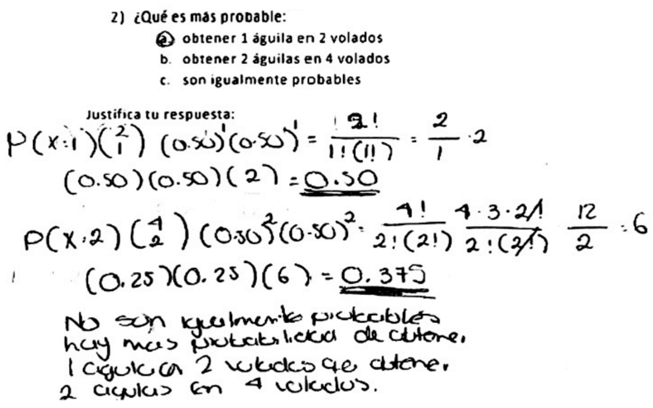
As manifestações do *panorama* formalista do conceito de *combinação simples* são vistas em séries mais avançadas do Ensino Básico, mais precisamente no Ensino Médio (AZEVEDO; BORBA, 2013a; PESSOA; BORBA, 2009; 2010), o que sugere que o *panorama* tenha mais visibilidade nesse momento. Analisando a carga teórica e generalista da definição formal, sugerimos que a utilização exclusiva deste *panorama* pode acarretar a falta de compreensão por parte de estudantes, uma vez que essa definição se apresenta pronta e não reflete o entendimento dos alunos em cada etapa de sua construção. Como exemplo, Santos-Wagner, Bortoloti e Ferreira (2013), em discussão sobre o que os alunos compreendiam dos conceitos de combinatória, perceberam que muitos os definiam de forma errada ou imprecisa.

PANORAMA INSTRUMENTAL

Neste *panorama*, o conceito de *combinação* é concebido a partir do uso de fórmulas e é caracterizado pelo foco em procedimentos mecânicos de algoritmos sem, necessariamente, preocupar-se com a compreensão do que está sendo desenvolvido (SANTOS-WAGNER; BORTOLOTI; FERREIRA, 2013). O que vemos neste *panorama* é a tentativa, tanto de alunos como de professores, de enquadrar as soluções dos problemas de combinação na fórmula: $C_{n,p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$, onde n representa a quantidade de elementos do conjunto do qual se quer tomar p elementos distintos.

A *realização* de *combinação simples* como fórmula tem como propósito contar elementos em uma determinada situação sem ter que enumerá-los (PESSOA; BORBA, 2010; SANTOS-WAGNER; BORTOLOTI; FERREIRA, 2013). Manifestações deste panorama podem ser vistas em alguns estudos (LANDIN; SÁNCHEZ, 2010; SANTOS-WAGNER; BORTOLOTI; FERREIRA, 2013) como ilustrados nas Figuras 1 e 2, respectivamente.

Figura 1: Exemplo de utilização da fórmula de combinação simples


2) ¿Qué es más probable:
a. obtener 1 águila en 2 volados
b. obtener 2 águilas en 4 volados
c. son igualmente probables

Justifica tu respuesta:

$P(x=1)\binom{2}{1}(0.50)^1(0.50)^1 = \frac{2!}{1!(1!)} = \frac{2}{1} = 2$

$(0.50)(0.50)(2) = \underline{0.50}$

$P(x=2)\binom{4}{2}(0.50)^2(0.50)^2 = \frac{4!}{2!(2!)} = \frac{4\cdot3\cdot2\cdot1}{2!(2\cdot1)} = \frac{12}{2} = 6$

$(0.25)(0.25)(6) = \underline{0.375}$

No son igualmente probables
hay mas probabilidad de obtener
1 aguila en 2 volados que obtener
2 aguilas en 4 volados.

Fonte: Landin e Sánchez (2010, p. 611).

Figura 2: Interação discursiva entre professor e alunos

Aluno L*: [...] ele foi buscando modos pra satisfazer uma resposta [...]. Na verdade ele não compreendeu a pergunta da questão. Tipo assim ele só queria colocar isso na fórmula. Os dados que ele tinha ele queria colocar na fórmula e dar uma resposta [...]*

Professor I*: e porque você acha que o aluno faz isso?*

Aluno L*: ...ée...condicionado, a utilizar fórmulas...ele tem essa fórmula e ele tem alguns valores ele vai jogar na fórmula.*

Prof. I: *A pergunta é: daqui há um ano ou menos vocês vão se formar. Tá certo? Como vocês vão ensinar Análise Combinatória?*

Aluno B: *eu sinceramente, eu vou pegar o meu caderno do 3° ano e pegar um livro pra estudar... tentar passar pelo menos do mesmo jeito que a minha professora passou.*

Aluno L: *E a gente pensa assim também, a gente só ensina o que a gente aprendeu. Você só vai ensinar aos alunos no nível que a gente aprendeu. Você não vai ensinar nada além.*

Fonte: Santos-Wagner, Bortoloti e Ferreira (2013, p. 619).

Landin e Sánchez (2010) chamam a atenção para a utilização da fórmula de *combinação* pelos estudantes em soluções de problemas de distribuição binomial e probabilidade, sugerindo que o domínio sobre ela é item necessário para o sucesso nessas soluções. Dessa forma, conceber *combinação* através da fórmula não pode ser um passo descartável.

Santos-Wagner, Bortoloti e Ferreira (2013) trazem reflexões de outros autores quando dizem que até mesmo os professores admitem não possuir os conceitos de combinatória construídos de maneira sólida e significativa e que optam por ensiná-los como um processo de aplicação de fórmulas prontas. Para os mesmos autores, as fórmulas existem para facilitar a contagem de elementos sem ter que listá-los; no entanto, conhecer apenas as fórmulas não garante sucesso na solução de problemas combinatórios.

Pessoa e Borba (2010) sublinham que problemas de *combinação* com números grandes – o que torna a enumeração dos casos impraticáveis – requerem um procedimento mais formal, ou seja, aplicação de fórmula. Ainda assim, as autoras trazem a preocupação pela maneira inadequada com que alunos utilizam essas fórmulas, pois isso evidencia um entendimento de que a aplicação da fórmula deve ser priorizada nas soluções de problemas de *combinação.*

Alves e Segadas (2012) em trabalho desenvolvido com alunos de graduação constataram que a utilização de fórmulas domina as tentativas de soluções de problemas de *combinação* e sugerem que a motivação disso está na ênfase que é dada na aplicação de fórmulas nas séries anteriores. A quantidade de soluções erradas que utiliza a via das fórmulas levou-nos a concluir que, embora a utilização das fórmulas seja um caminho possível, nem sempre ele é feito de maneira eficaz (ALVES; SEGADAS, 2012).

A utilização da fórmula não deve ser um passo descartado no processo de discussão do conceito de *combinação*, uma vez que problemas com quantidades muito grandes requerem um processo mais instrumental (PESSOA; BORBA, 2010), mas deve ser considerado como ferramenta de apoio e não como elemento indispensável na solução de problemas. Os alunos precisam ser levados, antes, a compreender a fórmula em lugar de sua utilização de maneira mecânica/instrumental (SANTOS-WAGNER; BORTOLOTI; FERREIRA, 2013).

A forma de ensino por meio de aplicações diretas de fórmulas pode não contribuir para uma efetiva compreensão das relações matemáticas, criando como consequência obstáculos à sua aprendizagem (PESSOA; BORBA, 2010; SANTOS-WAGNER; BORTOLOTI; FERREIRA, 2013).

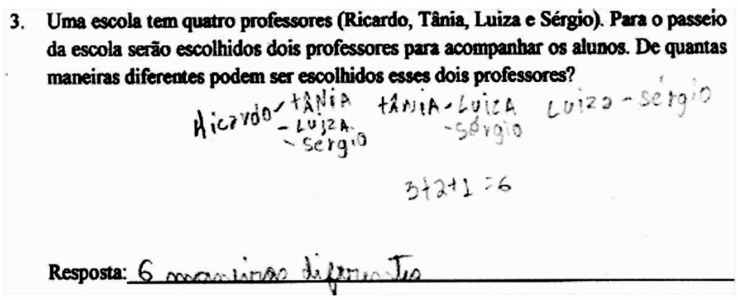
PANORAMA ILUSTRATIVO

Neste *panorama*, o conceito de *combinação* é concebido a partir de diversas representações ilustrativas (diagrama de árvores ou árvore de possibilidades; desenhos; listagens; tabela; objetos concretos ou virtuais) e é caracterizado pelo foco em procedimentos visuais na busca de contagem dos elementos em questão. A ocorrência deste *panorama* é mais perceptível nas soluções de problemas com número pequeno de objetos a serem combinados e com alunos que estão iniciando sua trilha nos problemas combinatórios (AZEVEDO; BORBA, 2013a, 2013b; PESSOA; BORBA, 2009). As diversas *realizações* que compõem este *panorama* podem ser percebidas em diversos estudos (AZEVEDO; BORBA, 2013a, 2013b; FERNANDES; CARVALHO; CARVALHO, 2010; GROENWALD; ZOCH NETO; HOMA, 2009; PESSOA; BORBA, 2009; SANTOS-WAGNER; BORTOLOTI; FERREIRA, 2013; SERRAZINA; RIBEIRO, 2012).

A *realização* de *combinação simples* como árvore das possibilidades tem como propósito servir como recurso útil à visualização da estrutura do problema de forma macro (AZEVEDO; BORBA, 2013a, 2013b).

Azevedo e Borba (2013a) fazem uma discussão em torno das possibilidades de aprendizagens geradas a partir da utilização de árvores das possibilidades (diagrama de árvores) por alunos dos anos iniciais e trazem exemplo (Figura 3) de problema resolvido de maneira correta com utilização desse recurso. Concluem que "alunos que constroem árvore de possibilidades [...] avançam em seus raciocínios combinatórios" (2013a, p. 137).

Figura 3: Exemplo da utilização da árvore de possibilidades


3. Uma escola tem quatro professores (Ricardo, Tânia, Luiza e Sérgio). Para o passeio da escola serão escolhidos dois professores para acompanhar os alunos. De quantas maneiras diferentes podem ser escolhidos esses dois professores?

Ricardo - Tânia - Luiza - Sergio Tânia - Luiza - Sérgio Luiza - Sergio

3+2+1=6

Resposta: 6 maneiras diferentes

Fonte: Azevedo e Borba (2013a, p. 133).

A exploração dessa *realização* pode levar à construção da regra de cálculo (AZEVEDO; BORBA, 2013a), que podemos entender como fórmula. A árvore das possibilidades apresenta-se como uma boa estratégia de ensino que contribui para o desenvolvimento das ideias combinatórias (AZEVEDO; BORBA, 2013a, 2013b; PESSOA; BORBA, 2010).

Na *realização* de *combinação simples* como tabela, desenho ou listagem, o propósito é enumerar, representar e esgotar todas as possibilidades/combinações de escolha dos elementos em questão (SERRAZINA; RIBEIRO, 2012).

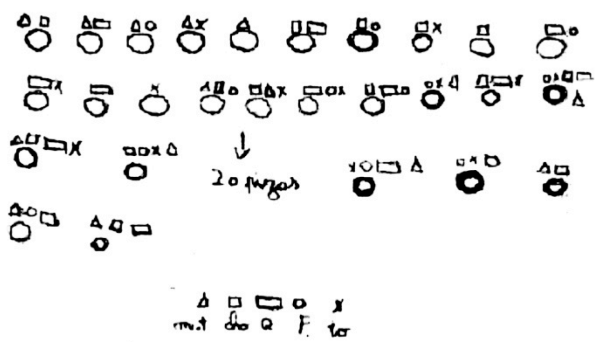
Serrazina e Ribeiro (2012), em trabalho que girou em torno da compreensão das interações que ocorrem em atividades de Resolução de Problemas capazes de desenvolver a capacidade de comunicação de alunos do 4º ano do Ensino Básico, trazem a utilização de desenhos (Figura 5) e tabelas (Figura 6) utilizadas nas discussões de um problema (Figura 4) de *combinação*.

Figura 4 - Problema

NA PIZARIA
Na pizaria do Sr. André há um anúncio:
"Mais de 20 pizas diferentes"
Sabendo que se fazem pizas até 5 ingredientes, digam se o anúncio é verdadeiro.

Fonte: Serrazina e Ribeiro (2012, p. 1374).

Figura 5 - Desenho utilizado por alunas na solução



Fonte: Serrazina e Ribeiro (2012, p. 1378).

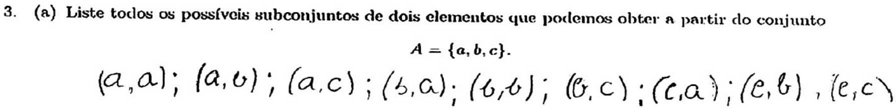
Figura 6 - Tabela utilizada pela professora para apresentar a solução

n.º de ingredientes	0	1	2	3	4	5	TOTAL
Combinações possíveis com os ingredientes A,B,C,D,E	MASSA ou BASE	A B C D E	AB AC AD AE BC BD BE CD CE DE	ABC ABD ABE ACD ACE ADE BCD BCE BDE CDE	ABCD ABCE ABDE BCDE ACDE	ABCDE	
n.º de pizas diferentes	1	5	10	10	5	1	32

Fonte: Serrazina e Ribeiro (2012, p. 1379)

Pessoa e Borba (2009) e Santos-Wagner, Bortoloti e Ferreira (2013) trazem o exemplo de estudantes que se utilizaram de listagem (Figuras 7 e 8) para apresentar as possibilidades de agrupamentos requeridos nos problemas em questão.

Figura 7 - Listagem utilizada por estudante na solução

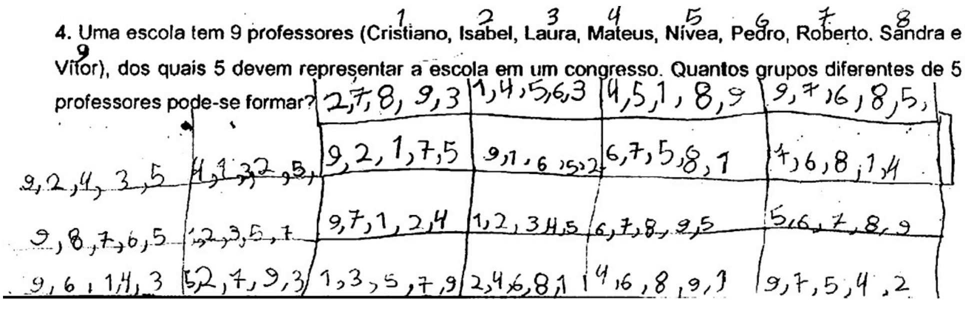

3. (a) Liste todos os possíveis subconjuntos de dois elementos que podemos obter a partir do conjunto

$A = \{a, b, c\}$.

(a,a); (a,b); (a,c); (b,a); (b,b); (b,c); (c,a); (c,b), (c,c)

Fonte: Santos-Wagner, Bortoloti e Ferreira (2013, p. 623).

Figura 8 - Listagem utilizada por estudante na solução

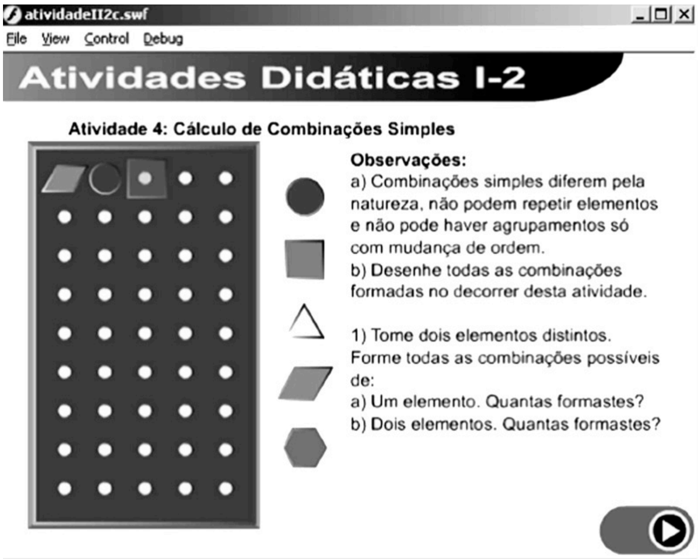

4. Uma escola tem 9 professores (Cristiano, Isabel, Laura, Mateus, Nívea, Pedro, Roberto, Sandra e Vitor), dos quais 5 devem representar a escola em um congresso. Quantos grupos diferentes de 5 professores pode-se formar?

Fonte: Pessoa e Borba (2009, p. 135)

Ainda que a solução apresentada na Figura 7 extrapole o resultado correto e a da Figura 8 esteja incompleta, a listagem dos agrupamentos é uma forma bem comum de comunicação de conceito de *combinação*. Todas as formas de comunicação (listagem, desenho, tabela) apresentadas nas Figuras de 5 a 8 podem ser auxiliares na compreensão do conceito de *combinação simples,* antes de sua comunicação de maneira mais formal (PESSOA; BORBA, 2009).

Já a *realização* de *combinação simples* como objetos concretos ou virtuais consiste em manipular os objetos citados de modo a representar, total ou parcialmente, as possibilidades/combinações dos elementos presentes no problema (Figura 9).

Figura 9 - Ambiente de manipulação virtual



Fonte: Groenwald, Zoch Neto e Homa (2009, p. 45).

Acima, um exemplo de atividade de construção e recuperação do conceito de *combinação* apresentado em Groenwald, Zoch Neto e Homa (2009), em que é possível arrastar e soltar peças sobre um tabuleiro virtual visando à formação das *combinações* desejadas.

Como os problemas combinatórios são abertos a várias representações (FERNANDES; CARVALHO; CARVALHO, 2010), o *panorama* ilustrativo permite aos alunos que iniciam seu percurso com a técnica de contagem das *combinações simples* uma visão diferente de entendimento desse conceito. A partir daí, podem levantar subsídios para generalização do conceito. Porém, essas estratégias têm mais significância no início da trajetória de resoluções de problemas de combinação, quando a grandeza numérica envolvida tende a ser pequena (PESSOA; BORBA, 2009). Em outras palavras, esgotar todas as possibilidades das *combinações simples* com grandezas numéricas de valores elevados, utilizando-se das *realizações* descritas neste *panorama* tende a ser inviável.

PANORAMA COMPARATIVO

No *panorama* comparativo, o conceito de *combinação* é concebido a partir do contraste com o conceito de arranjo simples. É ligado à questão de ordenação e refere-se aos problemas em que a ordem é irrelevante. Neste *panorama* – composto pelas *realizações:* comparação com arranjo simples e ordenação irrelevante –, as discussões em torno da *combinação* surgem em paralelo ou posteriormente às ideias de arranjo simples, para que seja possível a comparação. Nesse sentido, "o que difere arranjo de combinação é a forma como agrupamos um conjunto dado, levando em consideração a ordem do agrupamento" (SANTOS-WAGNER; BORTOLOTI; FERREIRA, 2013, p. 621). Alguns exemplos de ocorrência deste *panorama* podem ser vistos nos seguintes trabalhos.

A *realização* de *combinação simples* como ordenação irrelevante ou comparação com arranjo simples tem como propósito contrastar essas duas técnicas de contagem, arranjos e combinações, bem como perceber que mudanças nas ordens dos elementos em questão não geram novas possibilidades (PESSOA; BORBA, 2010; SANTOS-WAGNER; BORTOLOTI; FERREIRA, 2013, VEGA; BORBA, 2014).

Pessoa e Borba (2010), em estudo realizado com alunos do 2º ano do Ensino Fundamental ao 3º ano do Ensino Médio, relatam as dificuldades dos alunos em diferenciar os problemas em que a ordenação é imprescindível ou não, ou seja, a diferença entre arranjo simples e *combinação simples* e sugerem que "este invariante é necessário ser considerado e os alunos precisam observar quais casos são idênticos e não podem ser contados mais de uma vez" (p. 18).

Situação semelhante é abordada em Borba, Pessoa e Rocha (2013) em trabalho realizado com professores e alunos para os quais um dos objetivos era analisar o que professores do Ensino Fundamental pensam sobre Combinatória. No desenvolvimento de uma das atividades, as autoras relatam que "As professoras reconheceram a natureza multiplicativa dos problemas, mas [...] acharam difícil diferenciar *arranjos* e *combinações* [...]" (BORBA; PESSOA; ROCHA, 2013, p. 904).

Em Groenwald, Zoch Neto e Homa (2009) é possível perceber (Figura 10) o conceito de *combinação* a partir de problemas onde a ordem não é relevante.

Figura 10 - Problemas de ordem irrelevante

2 Quantas comissões de 3 alunos podemos formar com um grupo de 5 alunos, sendo eles, Artur (A), Bruna (B), Carmen (C), Diva (D) e Eduardo (E)?

Note que as comissões (A, B, C), (A, C, B), (B, A, C), (B, C, A), (C, A, B), (C, B, A) formam a mesma comissão, pois a ordem não modifica o grupo. Então, para cada seis comissões formadas pelas mesmas pessoas, na realidade temos apenas uma.

Logo, as comissões serão:

(A, B, C), (A, B, D), (A, B, E), (A, C, D), (A, C, E), (A, D, E), (B, C, D), (B, C, E), (B, D, E), (C, D, E).

O total será de 10 comissões possíveis, formadas por três alunos em cada comissão, formando um agrupamento chamado Combinação simples.

Fonte: Groenwald, Zoch Neto e Homa (2009, p. 38).

Fernandes, Carvalho e Carvalho (2010) trazem exemplo de uma atividade (Quadro 3) em que o conceito de *combinação* foi mobilizado a partir do uso de objetos concretos em turma do 12º ano do Ensino Secundário em Portugal, cuja professora se chamava Margarida.

Quadro 3 - Ordenação irrelevante

Margarida: Ora, vamos fazer assim. Eu tenho aqui pessoas coloridas.

Aluno: Oh, professora, não me confunda.

Aluna: Interessa escolher as pessoas, não interessa a ordem.

Margarida: Não me confunda?! Eu vou te dar uma pessoa verde, uma branca e uma amarela, pode ser? Anda aqui explicar como é que o teu raciocínio bate certo. Tens aqui as pessoas, pega nelas. Pronto, então fazemos o seguinte, eu seguro naquelas que tu rejeitas. Neste momento eu tenho-as todas.

Aluno: Vou tirar AB.

Margarida: Para já, AB. Para ti contou um caso?

Aluno: Um caso.

Margarida: Um caso. E agora se a trocares de mão?

Aluno: E agora se eu a meter aí e tirar BA, é a mesma coisa.

Margarida: Por quê?

Aluna: São as mesmas cores.

Aluno: Mas são as mesmas pessoas, são duas maneiras diferentes de escolher as pessoas.

Aluna: Mas neste caso não interessa a ordem com que são tiradas.

Fonte: Fernandes, Carvalho e Carvalho (2010, p. 65).

Nos episódios ilustrados na Figura 10 e Quadro 3, é possível visualizar que a ordem de escolha dos elementos em um problema de *combinação simples* não gera novas possibilidades.

O *panorama* comparativo permite contrastar os dois conceitos que se apresentam como maiores problemas de diferenciação em AC (GROENWALD; ZOCH NETO; HOMA, 2009; PESSOA; BORBA, 2010; SANTOS-WAGNER; BORTOLOTI; FERREIRA, 2013), permitindo uma maior segurança no seu entendimento.

MODELANDO UMA MATEMÁTICA PARA O ENSINO DE COMBINAÇÃO SIMPLES

Após descrição, exemplificação e discussão em torno das *vinculações* de cada *panorama,* propomos uma síntese (Quadro 4) de uma Matemática para o Ensino de *combinação simples* em AC.

Este quadro retoma e amplia o Quadro 2 em que, além de mencionar os panoramas, os descreve sinteticamente e apresenta as estratégias utilizadas em cada forma de comunicar o conceito de *combinação*.

Quadro 4 – Matemática para o Ensino de combinação simples

Se combinação simples é concebida no panorama...	**Breve descrição:**	**A estratégia é...**	**O resultado é interpretado como...**
Formalista	O conceito de *combinação* é comunicado a partir da definição matemática formal.	Compreender os invariantes (relações e propriedades) que compõem o conceito.	Uma quantidade de agrupamentos que satisfazem as características pré-estabelecidas.
Instrumental	O conceito de *combinação* é comunicado a partir do uso de fórmulas e é caracterizado pelo foco em procedimentos mecânicos de cálculos.	Substituir cada incógnita da expressão $C_{n,p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$ pela respectiva quantidade atribuída no problema em questão.	O valor obtido após procedimento do cálculo.
Ilustrativo	O conceito de *combinação* é comunicado a partir de diversas representações ilustrativas e é caracterizado pelo	Representar por meio de diagrama de árvores, desenhos, listagens, tabelas ou objetos concretos/virtuais, todos – ou em parte - os elementos que serão	A quantidade de agrupamentos que foram visualizados pela estratégia escolhida.

	foco em procedimentos visuais.	contados.	
Comparativo	O conceito de *combinação* é comunicado a partir do contraste com o conceito de arranjo simples.	Contar os subconjuntos indistintamente em relação à sua ordem e depois excluir todos os subconjuntos excedentes em que os elementos que os compõem se repetem.	A quantidade de subconjuntos restantes após as exclusões.

Fonte: Elaborado pelos autores

Os resultados apresentados no quadro anterior, sintetizados a partir de uma Revisão Sistemática de literatura, apresenta uma variabilidade de formas de mobilizar o conceito de *combinação simples,* presentes na tarefa de ensinar tal conceito.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Como explicitado anteriormente, o objetivo deste trabalho foi modelar uma Matemática para o Ensino do conceito de *combinação simples* a partir de uma Revisão Sistemática de literatura. Concebemos aqui a Matemática para o Ensino de *combinação simples* como um modelo teórico que apresenta a variabilidade de formas com que esse conceito pode ser comunicado. Para a construção do modelo, utilizamos a estrutura metodológica do Estudo do Conceito.

Sobre a importância desta variabilidade, Borba, Pessoa e Rocha (2013, p. 903) defendem que, para um mais amplo desenvolvimento das compreensões acerca da AC, "é necessário trabalhar diferentes tipos de problemas e estimular o uso de procedimentos variados [...] e representações simbólicas (utilizadas nos procedimentos) devem ser apresentados aos estudantes".

Percebemos que com este trabalho é possível observar diversas formas de comunicar o conceito de *combinação simples,* diferentes daquelas que convergem apenas para o uso de fórmulas e apresentação da definição (SANTOS-WAGNER; BORTOLOTI; FERREIRA, 2013). Esse modelo oferece principalmente aos professores, outras possibilidades, inclusive a busca de relações entre os vários tipos de *realizações*, na busca do que Santos-Wagner, Bortoloti e Ferreira (2013) nomeiam de compreensão relacional. Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), "conhecer diversas possibilidades de trabalho em sala de aula é fundamental para que o professor construa sua prática" (BRASIL, 1997, p. 42).

Conhecer esse modelo também possibilita ao professor compreender e explorar as formas de comunicação que os alunos utilizam ao mobilizar o conceito de combinação simples. A partir desse reconhecimento, o professor pode aprofundar as discussões relacionadas à AC (PESSOA; BORBA, 2010), no nosso caso, relacionadas ao conceito de *combinação simples*. Esta ideia converge com o entendimento de que “a apresentação dos conceitos com mais de uma perspectiva didática favorece a aprendizagem [...], o que demonstra a importância da diversificação didática para um ensino de qualidade” (GROENWALD; ZOCH NETO; HOMA, 2009, p. 49).

Além dessas contribuições no campo profissional, este estudo também traz contribuições no campo da pesquisa em Educação Matemática. Como consideramos aqui, a Matemática mobilizada para o ensino do conceito de *combinação simples* pode ser observada em diversos contextos como livros didáticos, documentos oficiais de orientações, salas de aula, curso com professores, entre outros. Cada contexto oferece uma visão parcial da Matemática para o Ensino desse conceito em AC. Com este trabalho, oferecemos uma versão parcial do modelo no contexto das publicações científicas, que poderá ser ampliado e revisitado em pesquisas futuras.

REFERÊNCIAS

ADLER, Jill. Mathematics for teaching: what is it and why is it important that we talk about it? **Pythagoras**. University of the Witwatersrand, 2005.

ADLER, Jill et al. Working with learners mathematics: exploring key elements of mathematical knowledge for teaching. In: CONFERÊNCIA INTERNACIONAL GRUPO DE PSICOLOGIA DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 29, 2005. **Anais**…Melbourne: PME, 2005. v. 2. p. 1-8. Disponível em: <http://www.emis.ams.org/proceedings/PME29/PME29RRPapers/PME29Vol2AdlerEtAl.pdf > Acesso em: 01 ago. 2015.

ALVES, Renato; SEGADAS, Claudia. Sobre o ensino da análise combinatória: fatores a serem considerados, lacunas a serem evitadas. **Acta Scientiae**, Canoas, v. 14, n. 3, p. 405-420, 2012.

AZEVEDO, Juliana; BORBA, Rute Elizabete de Souza Rosa. Combinatória: a construção de árvores de possibilidades por alunos dos anos iniciais com e sem uso de software. **ALEXANDRIA- Revista de Educação em Ciência e Tecnologia,** Santa Catarina, v. 6, n. 2, p. 113-140, jun. 2013a.

______. Construindo árvores de possibilidades virtuais: o que os alunos podem aprender discutindo relações combinatórias? **Revista Eletrônica de Educação**, v. 7, n. 2, p. 39-62, nov. 2013b.

BARRETO, Fernanda Lopes Sá; BORBA**,** Rute Elizabete de Souza Rosa . Estudantes de anos iniciais da Educação de Jovens e Adultos resolvendo problemas combinatórios com listagens e com árvores de possibilidades. **Educação Matemática em Revista**. São Paulo, v. 35, p. 1-12, 2012.

BORBA, Rute Elizabete de Souza Rosa. Vamos combinar, arranjar e permutar: aprendendo combinatória desde os anos iniciais de escolarização. **Anais do XI Encontro Nacional de Educação Matemática (XI ENEM)**. Curitiba, 2013.

BORBA, Rute Elizabete de Souza Rosa; AZEVEDO, Juliana. Construindo árvores de possibilidades para compreensão de relações combinatórias. **Educação Matemática em Revista**. São Paulo, v. 31, p. 24-32, 2012.

BORBA, Rute Elizabete de Souza Rosa; PESSOA, Cristiane Azevêdo dos Santos; ROCHA, Cristiane de Arimatéa. Como estudantes e professores de anos iniciais pensam sobre problemas combinatórios. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 15, n. esp. p. 895-908, 2013.

BORBA, Rute Elizabete de Souza Rosa; ROCHA, Cristiane de Arimatéa; MARTINS, Glauce Vilela; LIMA, Rita de Cássia Gomes. O que dizem os estudos recentes sobre o raciocínio combinatório? **Anais do X Encontro Gaúcho de Educação Matemática**. Inijuí, 2009.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: matemática. Brasília: MEC/SEF, 1997.

BRASIL. Ministério da Educação e Cultura. Secretaria de Educação Média e Tecnológica (SEMTEC). **PCN+: Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais –** Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC, 2002.

CORREA, Jane; OLIVEIRA, Gisele. A escrita do problema e sua resolução: o entendimento intuitivo acerca da combinatória. The written text of mathematical word problems and the success of solution. **Educar em Revista**, Curitiba, n. esp. 1, p. 77-91, 2011.

CORREIA, Paulo Ferreira; FERNANDES, José Antônio. Estratégias intuitivas de alunos do 9º ano de escolaridade na resolução de problemas de combinatória. **Libro de Actas do Congresso Internacional Galego-Português de Psicopedagogia**, 2007.

DAVIS, Brent. Subtlety and complexity of mathematics teachers' disciplinary knowledge. In: INTERNATIONAL CONGRESS ON MATHEMATICAL EDUCATION, 12, Seoul, Korea, 2012. **Anais**… Seoul, Korea: ICME, 2012.

DAVIS, Brent; RENERT, Moshe. Mathematisc-for-Teaching as shared dynamic participation. **For the Learning of Mathematics**, v. 29, n. 3, p. 37-43, 2009.

______. Profound understanding of emergent mathematics: broadening the construct of teachers' disciplinary knowledge. **Educational Studies in Mathematics**, v. 82, n. 2, p. 245-265, Feb. 2012.

______. **The math teachers know:** profound understanding of emergent mathematics. New York: Routledge, 2014.

DAVIS, Brent; SIMMT, Elaine. Mathematics-for-teaching: an ongoing investigation of the mathematics that teachers (need to) know. **Educational Studies in Mathematics,** v. 61, n. 3, p. 293-319, March, 2006.

FERNANDES, José António; CARVALHO, Bárbara do Alvar de; CARVALHO, Carolina Fernandes de. O trabalho colaborativo como meio de desenvolver o conhecimento didático de duas professoras em combinatória. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 12, n. 1, p. 43-74, 2010.

FERRAZ, Martha; BORBA, Rute; AZEVEDO, Juliana. Usando o software Árbol na construção de árvores de possibilidades para a resolução de problemas combinatórios. **Anais do X Encontro Nacional de Educação Matemática (X ENEM). Bahia**, 2010.

GAUTÉRIO, Vanda L. B.; RODRIGUES, Sheyla C. "Se tivessem me ensinado isso antes...": um estudo sobre as aprendizagens docentes. **Zetetiké**, Campinas, v. 20, n. 38, p. 125-150, 2013.

GROENWALD, Claudia Lisete Oliveira; ZOCH NETO, Lisiane; HOMA, Agostinho Iaqchan Ryokiti. Sequência didática com análise combinatória no padrão SCORM. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 22, n. 34, p. 27-56, 2009.

LANDIN, Pedro Rubén; SÁNCHEZ, Ernesto. Níveis de razonamiento probabilístico de estudantes de bachillerato frente a tareas de distribucíon binomial. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 12, n. 3, p. 598-618, 2010.

LOPES, José Marcos; REZENDE, Josiane de Carvalho. Um novo jogo para o estudo do raciocínio combinatório e do cálculo de probabilidade. **Bolema**, Rio Claro, p. 657-682, 2010.

MORGADO, A. C. de O. et al. **Análise combinatória e probabilidade**. Impa/vitae, 1991.

MORO, Maria Lúcia Faria; SOARES, Maria Thereza Carneiro. Níveis de raciocínio combinatório e produto cartesiano na escola fundamental. **Educação Matemática Pesquisa**, v. 8, p. 99-124, 2006.

MORO, Maria Lúcia Faria; SOARES, Maria Thereza Carneiro; FILHO, Jomar Antônio Camarinha. Raciocínio combinatório em problemas escolares de produto cartesiano. **Zetetiké**, Campinas, v. 18, n. 33, 2010.

PESSOA, Cristiane Azevedo dos Santos; BORBA, Rute Elizabete de Souza Rosa. Quem dança com quem: o desenvolvimento do raciocínio combinatório de crianças de 1ª a 4ª série. **Zetetiké**, Campinas, SP, v. 17, n. 31, p.105-150, jun. 2009.

______; ______. O desenvolvimento do raciocínio combinatório na escolarização básica. **EM TEIA Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana**, Recife, v. 1, n. 1, 2010.

PETTICREW, Mark; ROBERTS, Helen. **Systematic reviews in the social sciences:** a practical guide. Oxford: Blackwell, 2006.

SABO, Ricardo Dezso. **Saberes docentes**: análise combinatória no ensino médio. 2010. 2010f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2010.

SANTOS, Jaqueline Aparecida Foratto Lixandrão; GRANDO, Regina Célia. O Movimento das Ideias Probabilísticas no Ensino Fundamental: análise de um caso. **Bolema**, Rio Claro, v. 24, n. 39, p. 561-584, 2011.

SANTOS-WAGNER, Vânia Maria Pereira; BORTOLOTI, Roberta D´Angela Menduni; FERREIRA, Juliana Rodrigues. Análise das resoluções corretas e erradas de combinatória de futuros professores de Matemática. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 15, n. 3, p. 606-629, 2013.

SERRAZINA, Maria de Lurdes; RIBEIRO, Deolinda. As Interações na atividade de resolução de problemas e o desenvolvimento da capacidade de comunicar no ensino básico. **Bolema**, Rio Claro, v. 26, n. 44, p. 1367-1393, 2012.

VEGA, Danielle Avanço; BORBA, Rute Elizabete de Souza Rosa. Etapas de escolha na resolução de produtos cartesianos, arranjos, combinações e permutações. **Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática**, v. 7, n. 3, 2014.

VICTOR, Liz. Systematic reviewing. **Social research update**, Surrey, n. 54, 2008.