REnCiMa
Revista de Ensino de Ciências e Matemática

eISSN 2179-426X
10.26843/rencima.v12n4a10

A metodologia de resolução de problemas aplicada ao ensino de matrizes no Ensino Médio

Thiago da Silva Borges[1]
Augusto Cesar de Castro Barbosa[2]
Cláudia Ferreira Reis Concordido[3]
Marcus Vinicius Tovar Costa[4]

Resumo: A metodologia de Resolução de Problemas (RP) é utilizada no processo de ensino-aprendizagem como ferramenta para a introdução do conceito de matrizes no Ensino Médio. Uma experiência foi realizada em cinco turmas do 3º ano do Ensino Médio de uma escola pública tradicional da cidade do Rio de Janeiro. O conteúdo proposto aborda, de forma contextualizada, temas do cotidiano dos alunos, de modo a proporcionar uma maior identificação destes com a proposta metodológica. Em três turmas (Grupo 2), os problemas abordados foram postos antes da apresentação formal dos conteúdos, permitindo que os alunos entrassem em contato com problemas cujas soluções ainda não estavam formalizadas. De maneira oposta, em outras duas turmas (Grupo 1), os mesmos problemas foram explorados apenas após a apresentação formal do conteúdo, servindo como aplicação do que havia sido apresentado em sala. Dois aspectos fundamentais devem ser destacados neste trabalho: em três turmas o ensino de matrizes foi realizado através da resolução de problemas; nas outras duas turmas, o tópico abordado foi desenvolvido para a resolução de problemas. Apesar de resultados semelhantes obtidos nos dois grupos, a dinâmica de trabalho RP explicitou uma maior participação dos alunos nas atividades propostas, mostrando maior aproveitamento do conteúdo trabalhado.

Palavras-chave: Resolução de Problemas. Matrizes. Ensino Médio.

The problem solving methodology in teaching matrices in High School

Abstract: Problem Solving (PS) methodology is used in the teaching-learning process as a tool to introduce some basic matrices concepts in the 3rd grade of traditional public High School in the city of Rio de Janeiro. A comparative experiment was carried out in five classes, with a total of 130 students. To provide a greater students identification with the methodological proposal, the chosen content was approached in a contextualized way, involving themes of their daily life. In order to compare the PS methodology with

[1] Mestre em Matemática. Professor do Colégio Pedro II. Brasil, Rio de Janeiro. ✉ thiagobrj@hotmail.com iD orcid.org/0000-0003-0348-5851
[2] Doutor em Física. Professor do Instituto de Matemática e Estatística e do Programa de Mestrado Profissional em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ). Brasil, Rio de Janeiro. ✉ accb@ime.uerj.br iD orcid.org/0000-0002-5094-1509
[3] Doutora em Matemática. Professora do Instituto de Matemática e Estatística e do Programa de Mestrado Profissional em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ). Brasil, Rio de Janeiro. ✉ concordido@ime.uerj.br iD orcid.org/0000-0002-0767-9170
[4] Doutor em Física. Professor Associado do Instituto de Matemática e Estatística e do Programa de Mestrado Profissional em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ). Brasil, Rio de Janeiro. ✉ marcus.tovar@uerj.br iD orcid.org/0000-0002-9029-2507

Recebido em 05/03/2021 | Aceito em 01/06/2021 | Publicado em 08/09/2021

traditional methods, in two classes (Group 1) the problems were explored after the formal exhibition of Matrices, as traditionally done in most schools. In other three classes (Group 2) the problems were launched before the formal content's presentation, serving as inspiration to the PS methodology. In summary, two fundamental aspects must be highlighted in: in group 1, the matrix teaching was carried out to solve problems, while in group 2, matrix teaching was developed through problem solving. Although similar qualitative results were obtained in both groups, the RP methodology indicates a greater participation from the students in the proposed activities, leading to a more effective use of the worked content.

Keywords: Problems Solving. Matrices. High School.

La metodología de resolución de problemas aplicada en la enseñanza de matrices en la Escuela Secundaria

Resumen: La metodología de Resolución de Problemas (RP) es utilizada en el proceso de enseñanza/aprendizaje como herramienta para la introducción del concepto de matrices en la Escuela Secundaria. Se realizó un experimento en cinco clases del 3º año de Educación Secundaria Obligatoria en una escuela pública tradicional de la ciudad de Río de Janeiro. El contenido propuesto fue contextualizado con temas cotidianos de los estudiantes, para una mayor identificación con la metodología propuesta. En tres clases (Grupo 2), los problemas abordados se plantearon antes de la presentación formal del contenido, lo que permitió a los estudiantes entrar en contacto con problemas cuyas soluciones aún no estaban formalizadas. Por el contrario, en otras dos clases (Grupo 1), los mismos problemas fueron explorados solo después de la presentación formal del contenido, como una aplicación de lo presentado. Dos aspectos fundamentales deben ser destacados: en tres clases se realizó la enseñanza de matrices a través de la resolución de problemas; en otras dos, se desarrolló el tema abordado para la resolución de problemas. Aunque ambos grupos obtuvieron resultados similares, la dinámica de trabajo de RP manifestó una mayor participación de los estudiantes en las actividades propuestas, mostrando un mayor aprovechamiento de los contenidos trabajados.

Palabras-clave: Resolución de Problemas. Matrices. Escuela Secundaria.

Introdução[5]

Os alunos, em geral, demonstram dificuldade no aprendizado de Matemática e isso acaba tornando-a pouco atraente para eles. Essa "antipatia" pode ser caracterizada por diversos fatores: pela falta de estímulo em sala de aula, pela falta de motivação dos professores, pela abstração, pelo rigor lógico, entre outros. Deve-se salientar a importância da Matemática na formação do aluno e despertar o gosto pela resolução de problemas, a fim de desenvolver no aluno sua própria compreensão dos tópicos estudados, ajudando-o na construção de seu conhecimento. A metodologia de Resolução de Problemas é uma ferramenta fundamental nessa tarefa. Através dessa metodologia os alunos tendem, por

[5] Este artigo apresenta resultados parciais referente à dissertação de mestrado defendida pelo primeiro autor no Programa de Mestrado Profissional em Rede Nacional – PROFMAT da Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ). Brasil, Rio de Janeiro.

exemplo, a possuir maior liberdade para expor suas ideias, contribuindo para torná-los no processo de ensino-aprendizagem mais proativos, o que pode acarretar interesse nos conteúdos matemáticos e assim desenvolver novas habilidades.

Esse trabalho tem por objetivo apresentar uma breve revisão sobre matrizes, sugerir e analisar suas aplicações pautadas na metodologia de Resolução de Problemas. Na teoria de matrizes, demos prioridade às operações, com maior foco na soma e na multiplicação de matrizes, com o objetivo de dar sentido a essas operações e não as apresentar a partir de procedimentos padronizados e exercícios rotineiros. Dividimos esse artigo em quatro seções, conforme apresentamos a seguir.

Na primeira seção destacamos brevemente a importância da Matemática em nosso desenvolvimento. A segunda seção é destinada à metodologia de Resolução de Problemas. Nela destacamos as diferenças entre problemas e exercícios, assim como suas características, e por fim discutimos sobre o papel do professor na resolução de um problema. Na terceira seção apresentamos algumas sugestões para o ensino de matrizes através da metodologia de Resolução de Problemas, dando maior ênfase para a soma e multiplicação de matrizes.

A quarta seção trata de uma experiência realizada com alunos de cinco turmas do terceiro ano de um colégio público tradicional da Cidade do Rio de Janeiro. Após uma breve explicação sobre a condução das atividades, apresentamos quatro aplicações em ordem cronológica. As aplicações envolveram o conteúdo de matrizes, com foco em suas operações, e sistemas lineares. Selecionamos dois problemas da primeira aplicação realizada, apresentando as estatísticas e comparando o rendimento dos alunos e as soluções que consideramos ter maior destaque.

Por fim, ressaltamos como resultado positivo, tanto do ponto de vista do professor das turmas, como dos alunos em geral, a mudança de percepção do papel do professor no ensino de Matemática a partir da metodologia de Resolução de Problema.

A importância do pensamento matemático

A Matemática possui papel importante no desenvolvimento cognitivo de um indivíduo. Segundo Mendes (2009, p. 12), “Torna-se necessário abordar a matemática enquanto uma atividade referente à efetivação de um pensamento ativo que busca construir soluções para os processos lógicos-interrogativos surgidos no dia a dia”. De acordo com essa afirmação, podemos observar que a Matemática é necessária para o desenvolvimento do raciocínio, ajudando os alunos a tomarem decisões na escola e em questões que envolvem raciocínio lógico em seu cotidiano.

Ainda de acordo com essa forma de pensar, os PCN afirmam que:

> Em seu papel formativo, a Matemática contribui para o desenvolvimento de processos de pensamento e a aquisição de atitudes [...], podendo formar no aluno a capacidade de resolver problemas genuínos, gerando hábitos de investigação, proporcionando confiança [...] para analisar e enfrentar situações novas, propiciando [...] uma visão ampla e científica da realidade. (BRASIL, 2000, p.40)

A Matemática ajuda no desenvolvimento intelectual de qualquer indivíduo, mesmo daqueles que não têm como objetivo seguir carreiras que fazem seu uso. Mostrar que a Matemática está presente a todo instante em nossa vida é de suma importância, mesmo que seja através de exemplos básicos, como aqueles que fazem uso de proporções, matemática financeira, operações, funções, entre outros. Para Ellenberg (2015, p. 10), “Saber Matemática é como usar um par de óculos raios X que revelam estruturas ocultas por sob a superfície caótica e bagunçada do mundo”. Ou seja, “saber” Matemática não é necessariamente dominar toda sua linguagem ou sua simbologia, mas é pensar de forma livre através de deduções e raciocínio lógico e isso nos ajuda em tarefas que inicialmente não aparentam conexão direta com a Matemática.

O pensamento matemático não deve ser tratado como um conjunto de raciocínios mecânicos e repetitivos, apesar de muitas vezes os exercícios serem necessários por contribuírem no desenvolvimento de habilidades operacionais. O uso de problemas, por exemplo, incentiva os alunos e os mostra como a Matemática pode ser prazerosa. Para isso, não é necessário que trabalhemos com problemas de grande complexidade, que estejam fora do alcance dos alunos, embora seja produtivo mostrar que a Matemática possui problemas de difícil solução. De acordo com Stewart (2014, p.14), “Andrew Wiles[6] teve contato com o que é conhecido como ‘O último teorema de Fermat’[7] aos dez anos e ficara tão intrigado que decidiu tornar-se matemático para resolvê-lo”.

Segundo os PCN:

[6] Andrew John Wiles é um matemático britânico. Famoso por ter demonstrado, com a colaboração de Richard Lawrence Taylor, o Último Teorema de Fermat, em 1994.
[7] Se x, y, z e n são números inteiros, com n ≥ 3, então a equação $x^n + y^n = z^n$ não possui solução.

> Os resultados matemáticos distinguem-se pela sua precisão e os raciocínios desenvolvem-se num alto grau de minuciosidade, que os torna incontestáveis e convincentes. Mas a vitalidade da Matemática deve-se também ao fato de que, apesar de seu caráter abstrato, seus conceitos e resultados têm origem no mundo real e encontram muitas aplicações em outras ciências e em inúmeros aspectos práticos da vida diária [...]. Por outro lado, ciências como Física, Química e Astronomia têm na Matemática ferramenta essencial. Em [...] Sociologia, Psicologia, Antropologia, Medicina, Economia Política, embora seu uso seja menor [..], ela também constitui um subsídio importante, em função de conceitos, linguagem e atitudes que ajuda a desenvolver (BRASIL, 1997, p. 23).

Entretanto, para a Matemática ser entendida em um nível mais profundo utiliza-se de simbologias e de uma linguagem que muitas vezes pode desestimular os alunos a estudá-la. Por esse motivo, o professor deve dar significado às notações e operações, com o objetivo de facilitar o entendimento dos alunos. Temos uma tendência de explicar Matemática através de regras, o que certamente, não é a forma ideal de ensinar. Segundo Moreira (2012, p. 12), "a aprendizagem mecânica, aquela praticamente sem significado, puramente memorística, é a que mais ocorre nas escolas".

Dentro da proposta de tornar a Matemática mais prazerosa e legitimar sua importância no desenvolvimento de um indivíduo, a metodologia de Resolução de Problemas foi utilizada em sala de aula. A fim de esclarecer essa metodologia, abordaremos na próxima seção sua estrutura teórica, discutindo suas características, os tipos de problemas e o papel do professor nessa tarefa.

A metodologia de Resolução de Problemas

Um dos maiores desafios do professor ao ensinar Matemática é mostrar aos alunos o quanto ela é interessante e importante em nossa vida (ANDREATTA; ALLEVATO, 2017; GUIMARÃES; OLIVEIRA, 2020). Acreditamos que entre as ferramentas que podemos contar para a árdua tarefa de estimular o aprendizado em Matemática e torná-la interessante está a Resolução de Problemas. A metodologia de Resolução de Problemas (RP) pode ainda ajudar a solidificar o prazer por estudar Matemática podendo contribuir para uma aprendizagem mais efetiva. Conforme salientam Allevato e Onuchic:

> Considerando o problema como ponto de partida e orientação para a aprendizagem matemática, [...] a Resolução de Problemas se constitui em um contexto bastante propício à construção de conhecimento, colocando o aluno no centro das atividades de sala de aula de Matemática. (ALLEVATO; ONUCHIC, 2014, p. 48).

A resolução de um problema, seja ele ligado ao nosso cotidiano ou meramente abstrato como, por exemplo, uma demonstração, pode desencadear uma série de resultados, aguçando a curiosidade e aprimorando a criatividade, pois, através do planejamento, dos erros e acertos, o aluno não se vê enclausurado em um rigor teórico antecipadamente determinado, podendo assim expor suas ideias e desenvolver habilidades a partir das experiências na resolução dos problemas (GOMES et al, 2017; JACONIANO et al, 2019). Segundo Onuchic e Allevato (2011, p.79-80), “os educadores matemáticos passaram a pensar numa metodologia de ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas” a partir dos *Principles and Standards for School Mathematics*, também conhecidos como *Standards 2000*, produzidos pelo *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM), com a função de nortear o ensino de matemática dos Estados Unidos.

Romanatto (2012) coloca de forma clara a importância do papel desempenhado pela resolução de problemas, quando diz que:

> Entendemos que na resolução de problemas, os estudantes vão exercitar as suas mais diversas capacidades intelectuais como também mobilizar estratégias das mais diversas naturezas para encontrar a resposta, tais como: criatividade, intuição, imaginação, iniciativa, autonomia, liberdade, estabelecimento de conexões, experimentação, tentativa e erro, utilização de problemas conhecidos, interpretação dos resultados, etc. (ROMANATTO, 2012, p. 303).

Uma pergunta que procede nesse momento é: qual é a diferença entre um exercício e um problema? Podemos observar uma sutil, mas relevante diferença entre problema e exercício. Em sala de aula é muito comum o uso dos dois vocábulos para apresentar ao aluno uma situação que o mesmo deva desenvolver. Mas, de fato, problema e exercício possuem alguma distinção? Em muitos livros didáticos é comum o autor denominar os níveis das tarefas da seguinte forma: “exercícios de fixação”, “exercícios propostos”, “problemas propostos”, “desafios”, entre outros. Essas nomenclaturas não esclarecem a diferença entre exercício e problema, muitas vezes fazendo aparecerem exercícios nos lugares dos problemas e vice-versa.

Enfim, quais são as principais diferenças entre exercício e problema? Podemos definir exercício como uma tarefa em que o aluno necessita aplicar algo de modo puramente mecânico, que automatiza certas técnicas de resolução (ELLENBERG, 2015; ONUCHIC, 1999). Citamos como exemplo a aplicação do Teorema de Pitágoras de forma direta (a partir das medidas de dois catetos, determinar a medida da hipotenusa). Já o problema, podemos dizer que é uma tarefa que depende de organização e de alguns processos mais sofisticados que contam, principalmente, com o interesse e comprometimento do discente. No problema o aluno não possui uma solução pré-determinada com auxílio de algoritmos, ele necessita de uma elaboração de um plano que conta com interpretação, poder de decisão e raciocínio dedutivo (ONUCHIC, 1999; COSTA, 2008). Para resolver o exercício o aluno necessita do entendimento instrumental, em contrapartida, para resolver um problema o aluno necessita do entendimento relacional.

Percebemos que existe diferença relevante entre resolver exercício e resolver problema. No problema o aluno necessita de algumas estratégias, como veremos mais adiante, e acreditamos que o foco principal da teoria de Resolução de Problemas é que o aluno assuma o protagonismo e seja participante na sua própria aprendizagem. Com a Resolução de Problemas o aluno passa a relacionar conhecimentos, cria habilidade para resolver problemas, organiza suas ideias e aprende “como pensar” (ALLEVATO; ONUCHIC, 2019).

Além de ter em mente algumas características dos problemas, é importante que tenhamos uma estratégia antes de começarmos a resolvê-los. Uma grande referência nesse assunto é George Polya. Para ele, uma pessoa está diante de um problema quando ela se defronta com uma questão que não consegue resolver com o conhecimento que detém, ou seja, ela não consegue resolvê-lo com procedimentos e técnicas pré-determinadas. De acordo com Polya (2006), para resolver um problema, quatro etapas devem ser seguidas: compreender o problema; estabelecer um plano; executar o plano; fazer o retrospecto ou verificação.

Para cumprir essas etapas, primeiramente, deve-se ter um embasamento razoável do assunto proposto, verificar quais são as condições dadas no enunciado, como, por exemplo, determinar as incógnitas e as condicionantes. Algumas perguntas podem ajudar nessa etapa: As condicionantes são satisfatórias? Qual é a incógnita? O que eu quero determinar? Quais são os meus conhecimentos pré-adquiridos que ajudam nessa solução? Que estratégia devo tomar?

Na segunda etapa, o aluno deve se ater a elaborar uma estratégia que faça uma associação entre o que foi pedido no enunciado, os dados estabelecidos pelo mesmo e os conhecimentos pré-adquiridos que possam contribuir na resolução do problema abordado. É claro que perguntas elaboradas anteriormente ajudam a estabelecer um plano satisfatório.

Na terceira etapa, cabe ao aluno executar o plano. É de suma importância que as etapas anteriores tenham tido sucesso, pois, caso contrário, provavelmente o aluno terá problemas em sua execução.

Na quarta etapa, o aluno deve, necessariamente, fazer a revisão de sua solução. Nessa fase é possível, em alguns casos, verificar se a solução está correta, como, por exemplo, ao resolver um problema oriundo de uma equação, substituir os valores encontrados das variáveis e verificar se há identidades que o permitam ter uma certeza de que a solução está correta. É importante que o aluno verifique se a solução está de acordo com o problema proposto.

Alan Schoenfeld (1985), porém, defende outro ponto de vista para resolução de problema e critica os passos tomados por Polya para resolver um problema, pois são genéricos e não ajudam o aluno que não sabe o que fazer em um problema.

Em contrapartida, segundo D'Ambrosio:

> A interpretação muito limitada do trabalho de Polya resultou em propostas curriculares que (nos anos 1960 a 1990) transmitiam aos alunos uma visão da resolução de problemas como um procedimento seguindo passos determinados. As propostas curriculares incluíam a resolução de problemas como um capítulo ou como atividades independentes. [...]Ensinava-se também uma coleção de heurísticas ou estratégias de resolução. A análise mais profunda do trabalho de Polya nos mostra uma visão de resolução de problemas muito mais rica [..]. Polya estudava o trabalho de investigação dos matemáticos e propunha um ensino que criasse oportunidades para que os alunos se comportassem como matemáticos, [...]. Esse aspecto da proposta pedagógica de Polya se perdeu na tentativa de inseri-lo em livros texto (D’Ambrosio, 2008, p. 1).

Mesmo com diferentes percepções, acreditamos que a principal preocupação na escolha do problema é permitir que o aluno desenvolva habilidades cognitivas trazendo experiências para resolver outros problemas (ALLEVATO; ONUCHIC, 2019). É importante que a compreensão seja o principal objetivo. É fundamental que o professor leve em consideração o público e a sua realidade. Achamos imprescindível que o professor escolha com cuidado o tipo de problema a ser abordado, corroborando com o desenvolvimento dos alunos. De acordo com Lopes (1994), os alunos devem ter contato com tipos variados de problemas, pois dessa forma eles criam habilidades em resolver situações problema. Feito isso, o aluno terá a possibilidade de aplicar problemas matemáticos em problemas rotineiros.

O professor tem um trabalho diferenciado na aplicação e orientação em resolução de problemas. Em geral, o papel de um professor é o de ensinar, educar no mais amplo sentido, transmitir seus conhecimentos e suas experiências.

Durante a resolução dos problemas, é comum que surjam dúvidas em alguns momentos, mas o professor deve usar seu papel de mediador para não apresentar a resposta ou indicar algum caminho específico que o aluno deva tomar. As ações a serem empreendidas pelo professor não são simples e, consequentemente, não é possível estabelecer uma regra a ser seguida pelo docente, mas o mesmo deve ter bom senso para orientar, sem deixar claro para o aluno o atalho para o triunfo. Ou seja, o professor deixa o seu status de comunicador de conhecimento para um de observador, organizador, consultor, mediador e incentivador da aprendizagem.

Segundo Polya (2006, p. 1), “O professor não deve ajudar com exagero, mas de uma forma que caiba ao aluno parte razoável do trabalho”. É notório que o professor e o aluno possuem papéis fundamentais nessa etapa de resolução, embora não seja nossa intenção discutir o papel do aluno. O professor deve incentivar seu aluno a se organizar, separando as condicionantes do problema, a fazer indagações a si mesmo e, como já citamos, não responder diretamente as perguntas feitas, mas, ao contrário, propiciar o pensamento crítico que gera ideias, sejam elas boas ou ruins. Desse modo, o aluno acaba criando lastro para outras percepções no problema e, ao final, torna-se mais independente para novas situações. É interessante que haja discussões sobre as soluções dos problemas e sobre os erros cometidos. Em alguns casos, os erros podem ensinar mais que os acertos.

O professor tem papel decisivo na escolha dos problemas, conforme já mencionamos. Eles devem ser claros, evitando-se problemas longos com enunciados obscuros, e devem estar de acordo com o nível do discente. Segundo os PCN (BRASIL, 1997, p. 33), “O que é problema para um aluno pode não ser para outro, em função do seu nível de desenvolvimento intelectual e dos conhecimentos de que dispõe”. Portanto, o professor deve tomar cuidado com suas escolhas, tomando como principal objetivo elaborar um bom plano de acordo com seu público. Outra tarefa do professor é a de diversificar as aplicações, a abordagem e os recursos utilizados.

Um bom problema não deve se restringir a envolver ações cotidianas, o professor deve escolher situações que o possibilitem alcançar objetivos desejáveis e pré-estabelecidos. Assim, ele deve escolher o tipo de problema de acordo com cada situação. Como afirma Souza (2005, p. 3), “os alunos ao resolverem problemas podem despertar sua curiosidade e o interesse pelos conhecimentos matemáticos desenvolvendo a capacidade de solucionar situações que lhes são propostas”. O professor deve propor situações que envolvam construções de ideias, incentivando o aluno a aprender Matemática, além de ser um “administrador” no momento de auxiliar na resolução do problema proposto.

A teoria de matrizes a partir da resolução de problemas

Nosso objetivo é introduzir o conceito de matrizes a partir da Resolução de Problemas. Em geral, esse conteúdo, sempre presente nos vestibulares mais tradicionais do Brasil, inclusive no Enem (Exame Nacional do Ensino Médio), é abordado no Ensino Médio no segundo ou no terceiro ano, sendo comumente apresentado aos alunos a partir de suas definições e propriedades. No entanto, acreditamos que essa não seja a melhor forma, já que abordando a teoria de matrizes dessa maneira, tornaremos essa temática vazia, fazendo com que os discentes não consigam compreender a verdadeira função que as matrizes podem exercer tanto na Matemática como em aplicações em outras áreas. Segundo os PCN (BRASIL, 2000, p. 40), "A Matemática no Ensino Médio tem um valor formativo, que ajuda a estruturar o pensamento e o raciocínio dedutivo, porém também desempenha um papel instrumental, pois é uma ferramenta que serve para a vida cotidiana [...]".

Usualmente, uma matriz é apresentada como um arranjo retangular de números reais com m linhas e n colunas:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{12} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = (a_{ij})_{m\times n}$$

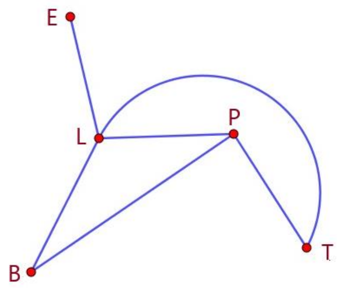
onde cada a_{ij}, $1 \le i \le m$ e $1 \le j \le n$, representa o elemento que está na linha i e coluna j.

Acreditamos que não se deve introduzir o conteúdo de matrizes dessa forma, a partir de definições, por conta de seu caráter abstrato. As definições e conceitos da teoria de matrizes, ao nosso ver, devem ser introduzidos aos alunos com algum sentido. Nesse início, é crucial mostrar que essa teoria tem algum propósito, como, por exemplo, a organização de dados ou a aplicação em alguma área. Apresentamos a seguir um exemplo (CRILLY, 2017) que pode ilustrar bem o que foi abordado .

Exemplo: Plano de voo. Um dos exemplos do uso de matrizes é a análise de uma rede de voos de companhias aéreas, envolvendo tanto aeroportos centrais quanto aeroportos secundários. Na realidade, esse problema envolve centenas de aeroportos. Tomaremos um pequeno exemplo envolvendo os aeroportos de Londres (L), Paris (P), Edimburgo(E), Bordeaux (B) e Toulouse (T). A rede apresentada na Figura 1 mostra os possíveis voos diretos que existem em várias cidades. Esta forma de apresentação é conhecida como grafo, um importante ramo de Matemática que, no entanto, não é o objetivo de estudo deste trabalho.

Para analisar essa rede de voos, os aeroportos utilizam computadores que fazem a leitura através de matrizes. Se há voo direto da cidade i para cidade j, coloca-se 1, caso contrário, coloca-se 0:

Figura1: Rede de viagem



Fonte: Elaborado pelos autores

$$A = [a_{ij}] = \begin{cases} 1, & \text{se há voo direto} \\ 0, & \text{se não há voo direto} \end{cases} .$$

Podemos então construir o Quadro 1.

Quadro 1: Voos entre cidades

	Londres	Paris	Edimburgo	Bordeaux	Toulouse
Londres	0	1	1	1	1
Paris	1	0	0	1	1
Edimburgo	1	0	0	0	0
Bordeaux	1	1	0	0	0
Toulouse	1	1	0	0	0

Fonte: Elaborado pelos autores

Na forma matricial, podemos representar o Quadro 1 como:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

Inicialmente, em uma primeira inspeção, pode nos parecer que pela Figura 1 fica mais fácil verificar quais são os pares de cidades que apresentam voos diretos, mas não podemos ignorar que este é um exemplo reduzido em comparação com a realidade. As redes aéreas, em geral, são visualmente muito mais confusas e complexas. Essas redes são analisadas fazendo uso de computadores que são programados para operar usando a álgebra matricial.

No caso apresentado, podemos observar que a tabela serve como um elemento organizador. Em exemplos mais complexos, o uso de tabelas (matrizes) é essencial para a organização de dados e operação entre números, pois em alguns casos é mais vantajoso realizar operações entre as tabelas (matrizes) do que operações entre os números. Algumas matrizes especiais surgem em vários problemas de forma curiosa.

Com objetivo de dar maior sentido ao estudo de operações entre matrizes, tendo alunos do Ensino Médio como público alvo, faremos a abordagem das operações entre matrizes (soma e multiplicação) a partir de problemas. A abordagem feita nas operações entre matrizes, de forma geral, tem sido tradicional nas escolas. Esse tipo de procedimento, acaba valorizando mais as operações entre os números do que propriamente a operação entre as matrizes. A teoria de matrizes é imprescindível na computação, na resolução de sistemas lineares, entre outros. Na intenção de trazer um olhar mais interpretativo e investigativo, apresentamos a seguir um problema envolvendo a soma de matrizes, proposto por um dos autores.

Problema 1: Uma pessoa possui 3 páginas em uma rede social e quer criar algumas métricas para medir o desempenho delas. Quando é publicado algo nessa rede social, podemos considerar que existam 3 categorias básicas de interação: os comentários, as curtidas e os compartilhamentos, com esses dados é possível ter um controle de desempenho dessas páginas. Sabe-se que no mês de janeiro de um determinado ano a página 1 obteve 100 comentários, 200 curtidas e 55 compartilhamentos, a página 2 obteve 250 comentários, 310 curtidas e 60 compartilhamentos, a página 3 obteve 20 comentários, 30 curtidas e 10 compartilhamentos. No mês de fevereiro desse mesmo ano, a página 1 obteve 120 comentários, 260 curtidas e 90 compartilhamentos, a página 2 obteve 100 comentários, 400 curtidas e 90 compartilhamentos e a página 3 obteve 60 comentários, 20 curtidas e 15 compartilhamentos. Curiosamente, no mês de março desse mesmo ano, cada página obteve um total de comentários, curtidas e compartilhamentos igual à soma dos dois meses anteriores.

a) Organize as informações em uma tabela que represente a quantidade de comentários, curtidas e compartilhamentos de cada página no mês de janeiro;
b) Organize as informações em uma tabela que represente a quantidade de comentários, curtidas e compartilhamentos de cada página no mês de fevereiro;
c) Organize as informações em uma tabela que represente a quantidade de comentários, curtidas e compartilhamentos de cada página no mês de março.

Determine a quantidade total de comentários, curtidas e compartilhamentos de cada uma dessas páginas nesse bimestre.

Solução esperada: É notório que a organização desses dados, apresentados mensalmente, facilita a resolução desse problema. Para isso, faremos a organização desses dados nos quadros 2, 3 e 4, relativos aos meses de janeiro, fevereiro e março, respectivamente.

Quadro 2: Interações no mês janeiro

JANEIRO	Comentário	Curtidas	Compartilhamentos
Página 1	100	200	55
Página 2	250	310	60
Página 3	20	30	10

Fonte: Elaborado pelos autores

Quadro 3: Interações no mês de fevereiro

FEVEREIRO	Comentário	Curtidas	Compartilhamentos
Página 1	120	260	90
Página 2	100	400	90
Página 3	60	20	15

Fonte: Elaborado pelos autores

Quadro 4: Interações no mês de março

MARÇO	Comentário	Curtidas	Compartilhamentos
Página 1	220	460	145
Página 2	350	710	140
Página 3	80	50	25

Fonte: Elaborado pelos autores

Podemos escrever os Quadros 2, 3 e 4 em forma matricial. Para saber a quantidade total de comentários, curtidas e compartilhamentos de cada uma dessas páginas nesse bimestre, basta adicionarmos a matriz *A* com a matriz *B*. Como podemos observar, a soma de matrizes é feita elemento a elemento, ou seja, somamos elementos que estão nas mesmas posições:

$$A+B=\begin{bmatrix} 100 & 200 & 55 \\ 250 & 310 & 60 \\ 20 & 30 & 10 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 120 & 260 & 90 \\ 100 & 400 & 90 \\ 60 & 20 & 15 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 220 & 460 & 145 \\ 350 & 710 & 150 \\ 80 & 50 & 25 \end{bmatrix}.$$

Com esse tipo de abordagem fica mais claro para os alunos compreenderem o significado da soma de matrizes, acabando o processo automatizado através de definições pré-estabelecidas. Dessa forma, possibilitamos a discussão com os alunos de uma forma intuitiva, como, por exemplo, fazendo perguntas com a finalidade de estabelecer condições para efetuar a soma entre duas ou mais matrizes. É possível somar matrizes de ordens distintas? Podemos somar matrizes de tipos distintos? Como somamos matrizes?

Apesar de alguns livros apresentarem o conteúdo com situações-problema, é comum observar nos livros didáticos uma série de exercícios mecânicos e que não trazem a perspectiva desejável para que o discente tenha pleno entendimento do assunto. Comumente, os alunos acham fácil somar/subtrair matrizes, mas os mesmos, caso não sejam apresentadas situações-problema, operam as matrizes ponderando somente as operações numéricas, o que é um equívoco.

Indubitavelmente, a prática de exercícios é importante para a fixação do conteúdo, mas não podemos tomar somente a aplicação de exercícios, de forma mecânica visando apenas o resultado final, como prática pedagógica. A resolução de problema é fundamental. De acordo com os princípios adotados pelo guia de livros didáticos do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD)[8], um princípio metodológico amplamente relevante é o de ensino e aprendizagem da Matemática baseados na resolução de problemas. Sem dúvida, um livro didático em que são propostos, de modo sistemático e consistente, problemas a serem resolvidos pelo estudante, contribui para o desenvolvimento da sua autonomia.

O passo seguinte é abordar a multiplicação de matrizes, o que nos leva a duas perguntas: Será que a multiplicação de matrizes é feita dessa forma? Quais são as condições de existência para a multiplicação entre as matrizes?

De um modo geral, a multiplicação de matrizes é feita a partir da seguinte definição: Dadas as matrizes A_{mxn} e B_{nxq}, a multiplicação da matriz A pela matriz B é dada pela equação

$$A \times B = C = [c_{ij}] = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj},$$

onde $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq q$. Podemos, ainda, indicar aos alunos que o produto de matrizes é feito através da multiplicação de cada linha por cada coluna, elemento a elemento.

No entanto, abordar a multiplicação de matrizes desta forma pode não fazer sentido para os alunos, pois apenas mostra um algoritmo que podemos utilizar para obtenção de um resultado que torna a multiplicação de matrizes uma operação sem muito sentido, além de acompanhar uma definição carregada em notações. A multiplicação de matrizes não é uma operação trivial, por isso devemos introduzir esse conceito de forma investigativa através de problemas. Com a intenção de fomentar o entendimento dos alunos nessa teoria, vamos apresentar um problema contextualizado, adaptado da Faculdade de

[8] O endereço onde encontram-se esses princípios e critérios é: http://www.fnde.gov.br/pnld-2017/

Tecnologia de São Paulo (FATEC-SP), em uma situação que envolve essa operação.

Problema 2: Uma indústria automobilística produz carros nos modelos X e Y nas versões popular, luxo e superluxo. Nesses carros, são utilizadas na montagem peças dos tipos A, B e C.

- Do tipo A são utilizadas 4 peças em cada carro do modelo X e 3 peças em cada carro do modelo Y.
- Do tipo B são utilizadas 4 peças em cada carro do modelo X e 5 peças em cada carro do modelo Y.
- Do tipo C são utilizadas 6 peças em cada carro do modelo X e 2 peças em cada carro do modelo Y.
- Do carro de modelo X são fabricados 2 carros na versão popular, 4 na versão luxo e 3 na versão superluxo.
- Do carro de modelo Y são fabricados 3 carros na versão popular, 4 na versão luxo e 5 na versão superluxo.

Determine:

a) Uma tabela que relacione a quantidade de peças de cada tipo utilizada em cada modelo de carro.
b) Uma tabela que relacione a quantidade de carros de cada modelo a cada uma das versões apresentadas.
c) Uma tabela que relacione a quantidade de peças de cada tipo a cada uma das versões.

Solução esperada: Inicialmente organizaremos os dados do enunciado nos Quadros 5 e 6.

A partir daí podemos abrir uma discussão a fim de investigar uma estratégia para que possamos determinar uma tabela que relacione a quantidade de peças de cada tipo a cada uma das versões.

Quadro 5: Quantidade de Peças x Modelo

	Modelo X	Modelo Y
Peça A	4	3
Peça B	4	5
Peça C	6	2

Fonte: Elaborado pelos autores

Quadro 6: Quantidade de carros x Versão

	Popular	Luxo	Superluxo
Modelo X	2	4	3
Modelo Y	3	4	5

Fonte: Elaborado pelos autores

Podemos notar no quadro 5, por exemplo, em cada carro do modelo X são utilizadas 4 peças do tipo A e que em cada carro do modelo Y são utilizadas 3 peças do tipo A. Já no quadro 6, vemos que no modelo X são fabricados 2 carros na versão popular e no modelo Y são fabricados 3 carros na versão popular. Daí, podemos observar que no modelo X teremos um total de 4.2 = 8 peças do tipo A na versão popular e no modelo Y um total de 3.3 = 9 peças do tipo A na versão popular, totalizando 17 peças do tipo A na versão popular. De acordo com essa interpretação, teremos:

1. Total de peças do tipo A na versão luxo = 4.4 + 3.4 = 28
2. Total de peças do tipo A na versão superluxo = 4.3 + 3.5 = 27
3. Total de peças do tipo B na versão popular = 4.2 + 5.3 = 23
4. Total de peças do tipo B na versão luxo = 4.4 + 5.4 = 36
5. Total de peças do tipo B na versão superluxo = 4.3 + 5.5 = 37
6. Total de peças do tipo C na versão popular = 6.2 + 2.3 = 18
7. Total de peças do tipo C na versão luxo = 6.4 + 2.4 = 32
8. Total de peças do tipo C na versão superluxo = 6.3 + 2.5 = 28

Assim, o Quadro 7 relaciona a quantidade de peças de cada tipo a cada uma das versões. É importante notar que o Quadro 7 foi gerada através de uma investigação e interpretação do problema.

Quadro 7: Quantidade de Peças x Versão

	Popular	Luxo	Superluxo
Peça A	17	28	27
Peça B	23	36	37
Peça C	18	32	28

Fonte: Elaborado pelos autores

A partir desse resultado a multiplicação de matrizes pode ser apresentada aos alunos de forma mais atraente, mostrando que as definições são oriundas de problemas, retirando, assim, a impressão de que alguns resultados matemáticos são sem propósito, decorados e sem aplicações. De acordo com Ellenberg (2015, p. 21), “temos uma tendência de ensinar matemática como uma longa lista de regras. Você as aprende numa ordem e deve obedecê-las, caso contrário, tira nota baixa. Isso não é matemática". Com esse pensamento, reforçamos a importância de dar significado ao aprendizado.

Observando esse problema podemos notar que a multiplicação de matrizes não é trivial. Como dissemos, nas escolas, esse conteúdo é visto de forma tradicional e os livros acabam pecando pela quantidade de exercícios de resolução mecânica que conduzem os professores e encaminham as aulas para o marasmo.

É interessante que o professor estimule seus alunos a chegarem a conclusões referentes a propriedades oriundas da multiplicação de matrizes. Algumas propriedades realmente são difíceis de justificar, pois requerem um nível de Matemática mais avançado. Em contrapartida, os alunos podem trabalhar com algumas dessas propriedades a partir de casos particulares. O professor pode fazer perguntas para aguçar a curiosidade dos alunos a afirmar ou negar cada propriedade citada. As seguintes propriedades envolvendo a multiplicação de matrizes podem ser destacadas:

(i) Não possui a propriedade comutativa, $A.B \neq B.A$;

(ii) Associativa: $(A.B).C = A.(B.C)$;

(iii) Transposta do produto: $(A.B)^T = B^T.A^T$;

(iv) Existência do elemento neutro: $A.I = A = I.A$;

(v) Se A é uma matriz quadrada de ordem n, então $A.A^{-1} = I_n$**;**

onde I representa a matriz identidade e A^T e A^{-1} representam, respectivamente, as matrizes transposta e inversa da matriz A.

Acreditamos que essas propriedades devam ser trabalhadas como consequência da multiplicação de matrizes. O professor não deve apresentá-las no primeiro contato do aluno com a multiplicação de matrizes, embora em alguns casos seja necessário, como por exemplo, em cursos preparatórios para Escolas Militares, pois em seus exames de admissão é frequente a presença de questões que envolvem essas propriedades.

Aplicação e análise das atividades

O objetivo nesta seção é apresentar dois problemas, que compõem uma das quatro atividades desenvolvidas em sala de aula, e analisar as informações coletadas dessas aplicações, além de discutir a possibilidade de abordar o tópico matrizes através da abordagem de resolução de problemas.

O conteúdo abordado nessa pesquisa se refere à introdução da linguagem matricial e às operações entre matrizes (com ênfase na multiplicação). Essa aplicação foi feita para alunos do terceiro ano do Ensino Médio de uma escola pública de muito bom nível, localizada no bairro de Realengo, cidade do Rio de Janeiro. A aplicação foi realizada no segundo trimestre de 2017 e envolveu cinco turmas, 1301, 1303, 1307, 2304 e 2306. Os alunos que participaram tinham idade entre 17 e 19 anos e possuíam rendimento escolar variado assim como nível sócio econômico.

O livro didático adotado pela equipe de Matemática dessa instituição é o livro Matemática (PAIVA, 2010). Para as aplicações foram utilizadas listas com problemas propostos. Com a intenção de comparar o rendimento das cinco turmas, as separamos em dois grupos. No grupo 1, composto pelas turmas 1307 e 2304, as aplicações dessa primeira lista foram feitas depois das aulas teóricas. No grupo 2, composto pelas turmas 1301, 1303 e 2306, as aplicações foram realizadas antes da explicação formal do conteúdo teórico.

Podemos dizer que no grupo 1, as aplicações foram feitas embasadas no ensino de matrizes para a resolução de problemas, já no grupo 2 o ensino de matrizes se deu através da resolução de problemas. Com isto queremos dizer que os alunos do grupo 1 tiveram o conteúdo apresentado da forma usual, com todo o formalismo necessário, e só depois se depararam com problemas envolvendo aplicação desse conteúdo e voltaram sua atenção para a busca de sua resolução. Os alunos do grupo 2, por sua vez, tiveram o desafio de, em primeiro lugar, ter que pensar sobre os problemas mencionados e tentar resolvê-los e, a partir das conexões estabelecidas no processo de resolução, o professor extraiu elementos para a formalização das operações com matrizes (ONUCHIC, 1999).

Para o grupo 1, que contou com a participação de 53 alunos, foi realizada uma aula expositiva com a definição de matrizes, tipos de matrizes e as operações de soma e multiplicação entre matrizes. A abordagem teórica foi feita de forma tradicional, sem nenhuma exposição de problemas. O objetivo dessa aplicação, além de gerar um material comparativo, era fundamentar a teoria e verificar se os alunos conseguiriam resolver os problemas reconhecendo as definições e operações estudadas em sala, dando real significado ao aprendizado.

A primeira lista utilizada continha 4 problemas envolvendo soma e multiplicação de matrizes. Em um primeiro momento, foi solicitado aos alunos que tivessem total comprometimento com a resolução dos problemas propostos e que prestassem atenção em cada detalhe. Foi explicado sobre as estratégias utilizadas para a resolução de um problema genérico. Em seguida, foram entregues as listas aos alunos e deu-se início à aplicação. O primeiro problema da lista é o problema 01 da seção 3.

A intenção desse problema é abordar a utilidade de organização das matrizes e a soma de matrizes através de um problema. Os alunos não tiveram dificuldade em resolver esse problema sendo que alguns fizeram perguntas tais como: “É para escrever em forma de matriz ou tabela?”, “As páginas ficam representadas na linha ou na coluna?”.

Para responder à primeira pergunta, foi relembrado aos alunos que, quando definimos matrizes, o termo utilizado inicialmente foi tabela. Logo, eles podiam representar o conjunto de informações no formato de matriz ou tabela, pois estes são objetos similares. Quanto à segunda pergunta, comunicou-se a eles que poderíamos representar as páginas 1, 2 e 3 pelas colunas ou pelas linhas. No entanto, foi sugerido que colocassem as páginas na horizontal (linha) e as interações (comentários, curtidas e compartilhamentos) na vertical (colunas).

Durante a aplicação foi perguntado aos alunos como eles estavam resolvendo o item c. A maioria dos alunos, nas duas turmas, justificou a resposta através da soma das tabelas ou soma das matrizes encontradas nos itens a e b. Como resultado da avaliação da questão, grande parte dos erros apresentados está relacionada à falta de atenção ou causados por somas erradas. O problema seguinte tratado pelos alunos corresponde ao segundo da terceira seção.

Inicialmente alguns alunos se mostraram confusos ao organizar as tabelas; foi comentado, novamente, que eles poderiam organizar os dados da forma que desejassem, mas foi sugerido que no item a, colocassem cada tipo de peça na horizontal e cada modelo de carro na vertical, no item b, também foi dito que eles poderiam colocar cada modelo na horizontal e cada versão de carro na vertical. Mesmo apresentando essa orientação muitos alunos não a seguiram.

Esse problema foi o que causou maior dificuldade aos alunos e essa constatação somente veio à tona durante a avaliação das resoluções apresentadas por eles, pois em sala, os alunos não pareciam demonstrar essa dificuldade, não fazendo perguntas relevantes. Porém, apesar das dificuldades, a turma obteve sucesso e resolveu o problema da forma esperada.

Alguns alunos obtiveram respostas incompletas para o item c, encontrando uma tabela que relaciona a quantidade de peças de cada tipo com cada uma das versões, considerando o modelo X separadamente do modelo Y. Aqui, é importante salientar a valorização desse tipo de solução, pois, pelo que foi possível perceber, o aluno entendeu o problema, identificou as relações entre as matrizes ou entre as tabelas e elaborou um plano para obtenção das respostas. Para responder de acordo com o desejável, o aluno poderia, no item c, somar as matrizes obtidas e assim chegar à resposta correta. Provavelmente o que faltou para esse aluno foi a revisão de sua solução. Se ele tivesse sido mais atento poderia ter percebido que no item c, pedimos uma tabela, apenas uma, relacionando diretamente a quantidade total de peças de cada tipo a cada uma das versões. Vale ressaltar que em sala de aula foi reforçado o objetivo de cada um dos itens do problema (Figura 2(a)).

Embora todos os alunos tenham conseguido resolver os itens a e b, alguns não fizeram o item c. Vale destacar que também alguns não seguiram a orientação de organização e padronização. Por falta de entendimento do enunciado percebemos que alguns alunos se equivocaram na solução. Podemos destacar soluções que desconsideraram a separação entre o modelo X e o modelo Y (erro comum em multiplicação de matrizes). Nesse caso, no item a o aluno desconsidera a separação entre os modelos e conta o total de peças de cada tipo no modelo X com as do modelo Y.

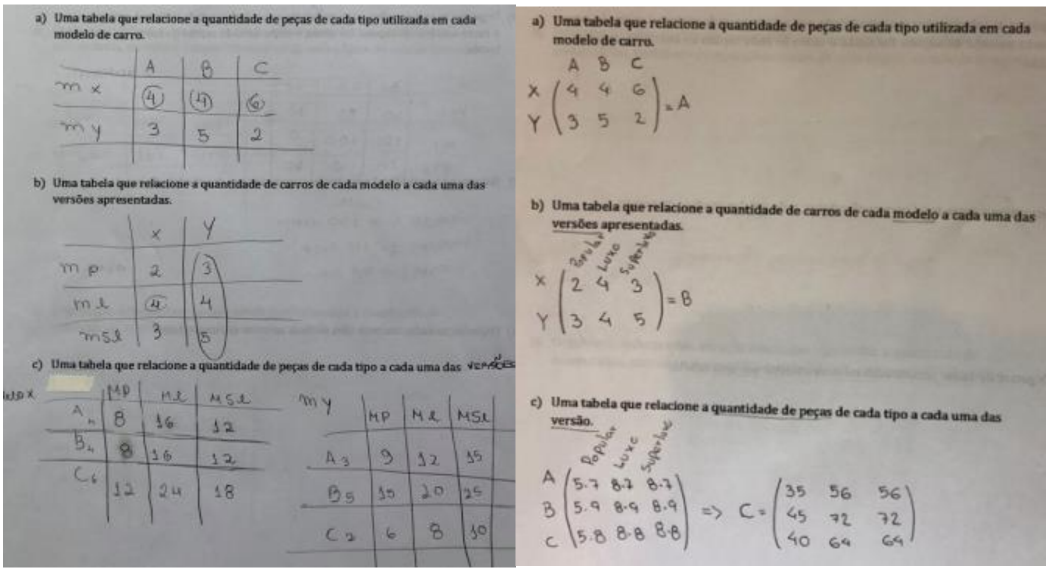
No item b da questão, este mesmo aluno desconsidera a separação entre os modelos e conta o total de carros em cada versão no modelo X junto com as do modelo Y. Notadamente, isso está equivocado. Pois cada modelo de carro apresenta quantidades diferentes de cada tipo de peça e a quantidade de carros de cada modelo também é diferente em cada versão. Vale mencionar que este aluno, na primeira linha da matriz do item a, multiplicou 4 por 3. Em sua lógica, ele deveria somar 4 com 3.

Para o grupo 2, que contou com a participação de 79 alunos, a aplicação dos problemas foi feita antes da abordagem teórica sobre as operações entre matrizes. Essas turmas tiveram apenas uma aula de matrizes antes das aplicações. Nessa aula, foram relacionadas tabelas e matrizes, assim como a linguagem utilizada em matrizes para identificar elementos a partir de sua posição (linha e coluna). Não foram trabalhadas as operações, assim como não foram tratadas as classificações entre as matrizes. O objetivo foi aplicar a Metodologia de Resolução de Problemas através de uma atividade de aprendizagem.

Os alunos foram orientados a resolverem os problemas interpretando os dados e tentando relacionar os elementos contidos nas tabelas. Antes da aplicação, o professor conversou com os alunos expondo brevemente acerca da metodologia de Resolução de Problemas, destacando suas estratégias e objetivos. Nesse grupo as atividades aplicadas foram as mesmas atividades aplicadas ao grupo 1.

No que diz respeito ao Problema 1, analisando as atividades e as reações em sala de aula, percebemos que esse problema foi o mais fácil para os alunos. Nenhum aluno apresentou dúvida e erro na resolução. Como dissemos, essas atividades foram aplicadas antes de se abordar as operações entre as matrizes. Ao término das atividades as seguintes perguntas foram feitas para as turmas: Vocês separaram os dados do enunciado em uma matriz ou uma tabela? Qual operação entre as tabelas/matrizes vocês utilizaram para responder o item c? Como fazemos para somar duas matrizes?

Figura 2: (a) À esquerda, solução incompleta de um aluno do grupo 1 para o problema 2
(b) À direita, solução incorreta de um aluno do grupo 2 para o problema 2



Fonte: Elaborado pelos autores

De maneira geral, alunos responderam as questões apresentadas com segurança. Para eles, matrizes e tabelas são elementos semelhantes. Em relação à operação, a resposta foi unânime. Todos afirmaram ter somado as tabelas/matrizes alegando que para somar matrizes podíamos somar elemento a elemento. Aproveitando a oportunidade, foi perguntado aos alunos se existia alguma condição de existência para soma de matrizes e muitos responderam que as matrizes tinham que ser “iguais”. Nesse caso, os alunos queriam dizer que elas deveriam ter a mesma ordem o que levou imediatamente à questão de que as matrizes do problema 2 não são “iguais”, rapidamente eles definiram corretamente.

Alguns alunos levantaram a questão se poderiam colocar zero nas matrizes de ordem diferente de modo a torná-las iguais, o que foi negado e dado como justificativa uma outra pergunta a eles, se aqui faria sentido ignorar a página 3 no mês de janeiro e ignorar a página 1 no mês de fevereiro e tentar relacionar essas matrizes para determinar a matriz que representa as interações nessas páginas no mês de março. O que levou a eles responderem que não. Dessa forma, conseguimos chegar a uma conclusão sobre a condição de existência para soma de matrizes.

Quanto ao problema 2, os alunos não tiveram muita dificuldade em resolvê-lo.

Nenhum aluno alegou tê-lo resolvido por multiplicação de matrizes. Segundo os relatos, eles o resolveram interpretando os dados e elaborando um plano para a resolução.

Entre as poucas soluções incorretas, podemos destacar a resolução em que para resolver o item c, o aluno não levou em consideração a separação entre cada tipo de peça e os modelos de carro, assim como também não levou em consideração que a quantidade de carros de cada versão é separada por modelos X e Y (Figura 2(b)). Esse aluno considerou que utilizam-se, por exemplo, 7 peças do tipo A e temos 5 carros na versão popular. Como dissemos, ele ignora o fato de existirem modelos de carros diferentes, o que leva a achar um total de 35 peças utilizadas na versão popular.

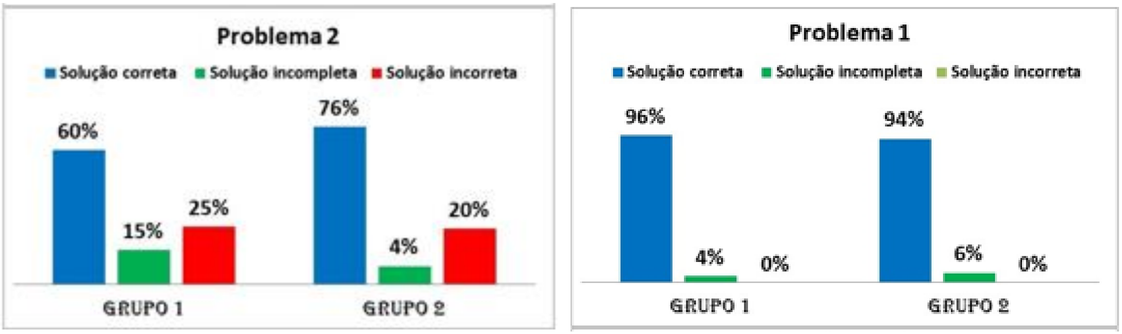
Com os alunos do grupo 2, esse problema foi utilizado para introduzir a multiplicação de matrizes. Esse problema foi resolvido em sala inicialmente para os alunos utilizando-se o mesmo artifício que eles usaram, isto é, os dados foram interpretados e representados em tabelas e, por fim, foi realizado o tratamento dessas informações, chegando à resposta no item c. Em seguida, foi mostrada aos alunos a multiplicação de matriz a partir da definição e, posteriormente, apresentamos assim uma solução para o problema 2. Esse momento foi muito produtivo, pois foi dada a possibilidade de levantar discussões sobre a multiplicação de matrizes e, principalmente, sobre a condição de existência para a realização dessa operação.

A seguir apresentamos alguns levantamentos estatísticos dos resultados das aplicações dos problemas aos grupos 1 e 2. Lembramos que ao todo tivemos 130 alunos envolvidos nesta atividade.

Comparando os dados do grupo 1 com os do grupo 2, verificamos que, aparentemente, os desempenhos foram semelhantes, como podemos ver na Figura 3. No entanto, ao avaliar as resoluções do grupo 1, percebemos que os alunos não conseguiram aplicar os conceitos teóricos previamente trabalhados aos problemas. Em contrapartida, os alunos do grupo 2 se mostraram mais interessados e aptos a conectar suas estratégias com a teoria sobre matrizes que foi apresentada a posteriori.

A partir dessas experiências, podemos concluir que o ensino de matrizes através da metodologia de resolução de problemas torna-se enriquecedor para os alunos entenderem o conteúdo e como consequência desenvolverem a construção de argumentação e a elaboração de soluções para os problemas propostos. O desenvolvimento dessas habilidades possibilita ao aluno aplicar e aprofundar o conteúdo já visto.

Figura 3: Resultado dos dois problemas da 1ª aplicação



Fonte: Elaborado pelos autores

Vale evidenciar que a aplicação de problemas de aprendizagem que consiste em problemas motivadores para introduzir um novo conceito não é possível em alguns casos. O professor deve ter bom senso e avaliar em quais conteúdos essa aplicação é possível. No entanto, há vários relatos de intervenções didáticas bem sucedidas que comprovam a eficácia desta metodologia nos diversos níveis de ensino e nos mais variados conteúdos (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011).

Considerações finais

Apesar de o conteúdo programático do Ensino Médio quase sempre se mostrar apertado em um calendário justo, acreditamos que a metodologia de resolução de problemas deve ser parte integrante do programa de Matemática e o professor deve utilizá-la de forma regular. Dessa maneira, o aluno pode melhorar seu rendimento gerenciando suas próprias ideias, acertos, erros e criando novas habilidades, tais como: identificar, distinguir, reconhecer, relacionar, comparar, formular hipóteses, resolver, entre outras.

Com isso em mente, fizemos algumas atividades e descrevemos dois problemas da 1ª aplicação e os resultados obtidos. Embora tenhamos separado as cinco turmas em dois grupos, como já citamos, percebemos, de acordo com as estatísticas, que os grupos apresentaram rendimentos similares. No entanto, acreditamos que uma grande vantagem em fazer uso dessas aplicações esteja no fato de se ter trabalhado a metodologia de resolução de problema, já que a mesma proporcionou um diferencial na dinâmica das aulas e para os alunos, os mais beneficiados, trouxe uma liberdade de expor suas ideias e praticar a Matemática sem estar presos em regras previamente estabelecidas. É importante ressaltar que muitos alunos lamentaram o fato das aulas de Matemática não serem sempre desenvolvidas fazendo uso da metodologia de RP e de terem tido essa oportunidade somente no terceiro ano.

Essa experiência procurou mostrar que devemos estar sempre atentos às possíveis mudanças em nossa forma de atuar em sala de aula e que devemos buscar nos adaptar às melhores estratégias de ensino de acordo com cada necessidade. Dessa maneira, a metodologia de Resolução de Problemas no processo de ensino/aprendizagem é, sem dúvida, uma das boas estratégias que podem auxiliar os professores em sua difícil tarefa que frequentemente é a de ensinar e tornar mais prazeroso o aprendizado da Matemática.

Agradecimentos

À CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) pela concessão de bolsa de Mestrado ao primeiro autor e ao O Programa de Incentivo à Produção Científica, Técnica e Artística – PROCIÊNCIA por parte do financiamento desse trabalho.

Referências

ALLEVATO, N. S. G.; ONUCHIC, L. R. Ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática: por que através da Resolução de Problemas? In: ONUCHIC et al (Org) **Resolução de Problemas**: teoria e prática. Paco Editorial. Jundiaí. 2014.

ALLEVATO, N. S. G.; ONUCHIC, L. R. As conexões trabalhadas através da Resolução de Problemas na formação inicial de professores de Matemática. **REnCiMa**, v. 10, n.2, p. 01-14, 2019.

ANDREATTA, C.; ALLEVATO, N. S. G. Ousadia Criativa nas Práticas de Educadores Matemáticos. **REnCiMa**, v. 8, n.4, p. 01-13, 2017.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática.** Brasília: MEC, 1997. p.33.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental.** Brasília: MEC, p. 39-42, 1998.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio: Matemática.** Brasília: Ministério da educação, 2000.

COSTA, C. F. **Por que Resolver Problemas na Educação Matemática? Uma Contribuição da Escola da Gestalt.** 2008. Dissertação (Doutorado em Educação) - PUC, Rio de Janeiro, 2008.

CRILLY, T. **50 Ideias de Matemática que Você Precisa Conhecer**. São Paulo: Editora Planeta do Brasil, 2017.

D'AMBROSIO, B. S. **A Evolução da Resolução de Problemas no Currículo Matemático.** In: I SEMINÁRIO DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMA, Rio Claro. Anais... Rio Claro: UNESP, p. 1, 2008.

ELLENBERG, J. **O poder do Pensamento Matemático.** 1. ed. Rio de Janeiro: Editora Zahar, 2015.

GOMES, D. A.; CASTRO BARBOSA, A. C.; CONCORDIDO, C. F. R. Ensino de Matemática Através da Resolução de Problemas: análise da disciplina RPM implantada pela SEEDUC-RJ. **Educação Matemática Pesquisa**, v. 19, p. 105-120, 2017.

JACONIANO, E. A.; CASTRO BARBOSA, A. C., CONCORDIDO, C. F. R. e TOVAR COSTA, M. V. Resolução de problemas de proporcionalidade por meio da redução à unidade. **Educação Matemática em Revista**, v. 61, p. 98-113, 2019.

GUIMARÃES, J. S. M.; OLIVEIRA, G. S. Concepções de professores sobre a Resolução de Problemas. **REnCiMa**, v. 11, n. 7, p. 198-219, 2020.

LOPES, A. J. Resolução de Problemas: observações a partir do desempenho dos alunos. **Educação Matemática em Revista**, São Paulo, p. 33-40, 1994.

MENDES, I. **Matemática e Investigação em Sala de Aula: tecendo redes cognitivas na aprendizagem.** 1. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

MOREIRA, M. A. O que é afinal aprendizagem significativa? **Revista de teoria, investigación y práctica educativa**, La laguna, Espanha, n. 25, p. 29-56, Mar 2012

ONUCHIC, L. R. Ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V. (Org.). **Pesquisa em Educação Matemática**. São Paulo: Editora UNESP, p.199-220, 1999.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. **BOLEMA**, v. 25, n. 41, p.73-98, 2011.

PAIVA, M. **Matemática**. 2. ed. São Paulo: Editora Moderna, 2010.

POLYA, G. **A Arte de resolver Problemas**. 2. ed. Rio de Janeiro: Interciência, 2006.

ROMANATTO, M. C. Resolução de problemas nas aulas de Matemática. São Carlos, SP: **Revista Eletrônica de Educação**: UFSCar, v. 6, n. 1, p. 299-311. Mai. 2012.

SCHOENFELD, A. H. **Mathematical Problem Solving**. New York, Academic Press, 1985.

SOUZA, A. B. A **Resolução de Problemas como Estratégia Didática para o ensino da Matemática.** Brasília: Universidade Católica de Brasília, 2005.

STEWART, I. **Os Maiores Problemas Matemáticos**. 1. ed. Rio de Janeiro: Editora Zahar, 2014.