

## Relações trigonométricas do triângulo retângulo: um estudo analítico sobre obstáculos epistemológicos e didáticos

Alanne de Jesus Cruz<sup>1</sup>

Laerte Silva da Fonseca<sup>2</sup>

Denize da Silva Souza<sup>3</sup>

**Resumo:** Este artigo faz parte da pesquisa de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Federal de Sergipe (PPGECIMA/UFS), cujo objetivo foi identificar mecanismos atencionais presentes em livros didáticos de matemática do 9º ano do ensino fundamental, sob a perspectiva de uma análise praxeológica. No recorte da pesquisa, o presente texto busca apresentar um estudo analítico em relação ao conhecimento do objeto matemático Relações Trigonométricas no Triângulo Retângulo (RTTR), caracterizando-se como natureza bibliográfica por meio de uma investigação no catálogo de teses e dissertações que abordem sobre a análise de livros didáticos com ênfase nesse objeto. Para tanto, tivemos como fundamentos os pressupostos de Bachelard (1996) e Brousseau (1986), observando-se que, em primeira instância, ainda não há pesquisas específicas sobre análise desse objeto matemático em livros didáticos de matemática.

**Palavras-chave:** Relações Trigonométricas no Triângulo Retângulo. Livro Didático. Obstáculos Epistemológicos e Didáticos.


### Trigonometric relationships of the rectangle triangle: one analytical study on epistemological and teaching obstacles


**Abstract:** This article is part of the Master's research of the Graduate Program in Science and Mathematics Teaching at the Federal University of Sergipe (PPGECIMA/UFS), whose objective is to identify attentional mechanisms present in 9th grade mathematics textbooks, from the perspective of a praxeological analysis. In the focus of the research, this text seeks to present an analytical study in relation to the knowledge of the mathematical object Trigonometric Relations in the Right Triangle (RTRT), characterizing itself as bibliographic nature through an investigation in the catalog of theses and dissertations that address analysis of textbooks with an emphasis on this object. For that, we had as basis the assumptions of Bachelard (1996) and Brousseau (1986), observing that, in the first instance, there is still no specific research on the analysis of this mathematical object in mathematics textbooks.

**Keywords:** Trigonometric Relations in the Right Triangle. Textbook. Epistemological and Didactic Obstacles.

### Relaciones trigonométricas del triángulo rectángulo: un estudio

<sup>1</sup> Mestre em Ensino de Ciências e Matemática. Professora do Instituto Pedagógico de Apoio a Educação do Surdo de Sergipe (IPAESE). Sergipe, Brasil. ✉ [alanne\\_jc90@hotmail.com](mailto:alanne_jc90@hotmail.com)  <https://orcid.org/0000-0002-0179-1831>

<sup>2</sup> Doutor em Educação Matemática. Professor do Instituto Federal de Sergipe e do Programa de Pós-Graduação Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Federal do Sergipe (UFS). Sergipe, Brasil. ✉ [laerte.fonseca@uol.com.br](mailto:laerte.fonseca@uol.com.br)  <https://orcid.org/0000-0002-0215-0606>

<sup>3</sup> Doutora em Educação Matemática. Professora do Programa de Pós-Graduação Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Federal do Sergipe (UFS), Sergipe, Brasil. ✉ [denize.souza@hotmail.com](mailto:denize.souza@hotmail.com)  <https://orcid.org/0000-0002-4976-893X>

## analítico de obstáculos epistemológicos y didácticos

**Resumen:** Este artículo forma parte de la investigación del Máster del Programa de Postgrado en Docencia en Ciencias y Matemáticas de la Universidad Federal de Sergipe (PPGECIMA /UFS), cuyo objetivo es identificar los mecanismos atencionales presentes en los libros de texto de matemáticas de 9 ° grado, desde la perspectiva de un análisis praxeológico. En el foco de la investigación, el presente texto busca presentar un estudio analítico en relación al conocimiento del objeto matemático Relaciones Trigonométricas en el Triángulo Recto (RTTR), caracterizándose como de carácter bibliográfico a través de una investigación en el catálogo de tesis y disertaciones. que abordan el análisis de libros de texto con énfasis en este objeto. Para eso, tuvimos como base las suposiciones de Bachelard (1996) y Brousseau (1986), observando que, en primera instancia, aún no existe una investigación específica sobre el análisis de ese objeto matemático en los libros de texto de las matemáticas.

**Palabras clave:** Relaciones Trigonométricas en el Triángulo Rectángulo. Libro de Texto. Obstáculos Epistemológicos y Didácticos.

### 1 Introdução

Autores afirmam que o livro didático é o material de apoio mais utilizado em sala de aula, quando não o único, merecendo, portanto, uma atenção especial de educadores e pesquisadores de todas as áreas do conhecimento (ESMELRALDA, 2007; SILVA, ALMEIDA, 2012).

Este trabalho é um recorte da pesquisa de Cruz (2019) pelo Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Federal de Sergipe (PPGECIMA/UFS). O foco da pesquisa voltou-se à investigação sobre mecanismos atencionais presentes na abordagem do objeto Relações Trigonométricas do Triângulo Retângulo, em livros didáticos de matemática do 9º ano do ensino fundamental, sob a perspectiva de uma análise praxeológica. Fazer uma análise praxeológica é investigar como uma atividade matemática explora determinado objeto constituindo-se de um conjunto de elementos formados por tipos de tarefas, técnicas, tecnologia e teoria (CHEVALLARD, 2018). A principal razão da pesquisa remeteu ao ensino de matemática para alunos surdos, uma questão ainda muito recente no campo das pesquisas em Educação matemática, principalmente, quando se trata de conteúdos matemáticos a partir dos anos finais do Ensino Fundamental.

O desafio de ensinar alunos surdos é abordado em diferentes áreas e na matemática não seria diferente. A busca em adaptar e conhecer sinais específicos em Libras e assim relacionar os objetos matemáticos às suas especificidades (símbolos, signos e sinais), além de desenvolver metodologias e recursos didáticos que auxiliem no processo de ensino-aprendizagem, tornam-se uma constante e um grande desafio para o docente que leciona matemática aos surdos.

Com o movimento da matemática moderna, entre as décadas 1950 e 1970, a geometria sofreu alterações, passou a ter como objetivo, aproximar a matemática a realidade da sociedade, pois a matemática tradicional com teoremas e postulados já não correspondia ao contexto social, daquela época. Por sua vez, os conteúdos geométricos quando presentes nos livros didáticos de matemática, não eram articulados com os demais conteúdos.

Ao associar esses fatores ao ensino de matemática para alunos surdos, ainda nos deparamos com aspectos que também são comuns ao processo de ensino e aprendizagem, os quais implicam em obstáculos de diferentes naturezas. Dentre eles, a maneira com que os conteúdos matemáticos são abordados, podem gerar obstáculos epistemológicos e didáticos. Para Almouloud (2007, p. 139), “as pesquisas em didática, história e epistemologia da matemática identificam um conjunto de fatores e de concepções que deram origem a obstáculos epistemológicos [...]” sendo esses observados ainda hoje, tanto entre os alunos, como nos professores.

Desse modo, a partir de leituras acerca do tema, foram emergindo inquietações, dentre as quais destacamos para este trabalho: O que revelam as pesquisas sobre a abordagem de RTTR presentes em livros didáticos de matemática do 9º ano do Ensino Fundamental? Quais as problemáticas são apontadas sobre esse objeto matemático em relação ao processo de ensino e aprendizagem?

Para buscar respostas para esses questionamentos, inicialmente se fez uma análise histórica, observando se há ou não, obstáculos epistemológicos e didáticos, considerando os conceitos de Bachelard (1996), Brousseau (1986) e Almouloud (2007).

Como ponto de partida, foi realizada uma leitura analítica nos livros sobre história da matemática dos autores Eves (2011) e Boyer (1974), com a finalidade de registrar cronologicamente o início do estudo desse objeto matemático, sob o intuito de compreendê-lo e, conseqüentemente, sua epistemologia. Esta análise possibilitou identificar o que estudos apontam sobre obstáculos epistemológicos e didáticos quanto a objetos geométricos, principalmente, em relação às relações trigonométricas no triângulo retângulo.

Quando buscamos pesquisas sobre conteúdos direcionados à geometria, há diversos autores que afirmam sobre a dificuldade do aluno em compreender esse conteúdo, informam que houve o abandono do ensino desse conteúdo por ser abordado no final do livro, durante décadas passadas e também por existirem professores sem deterem

conhecimentos geométricos necessários para ensiná-los na educação básica (LORENZATO, 1995; ESMERALDA, 2007; GOMES, 2013).

Segundo Lorenzato (1995), é necessário que o ensino da geometria comece desde cedo, devendo iniciar na educação infantil e no decorrer do desenvolvimento da criança, gradativamente sejam ofertados novos conceitos que se associem e relacionem-se aos já adquiridos. No desenvolvimento do pensamento geométrico, outros conceitos matemáticos passam a ser relacionados, como grandezas e medidas. A respeito disso, as Relações Trigonométricas no Triângulo Retângulo (RTTR) apresentam vários conceitos necessários para resolver problemas relacionados ao cotidiano, por exemplo.

Assim, este artigo objetiva apresentar um estudo sobre obstáculos epistemológicos e didáticos em relação ao conhecimento do objeto geométrico (RTTR), caracterizando-se como natureza bibliográfica por meio de uma investigação no catálogo de teses e dissertações da CAPES<sup>4</sup> que abordem sobre a análise desse objeto.

A pesquisa pelos trabalhos foi realizada a partir da busca pelo título no banco de dados com a palavra-chave “relações trigonométricas”, sendo catalogadas 03 pesquisas no mestrado profissional e 01 no mestrado em educação, apenas entre três anos (2013, 2014 e 2016).

Quadro 1: Dissertações que abordam sobre relações trigonométricas.

Ano	Instituição	Quantidade
2013	Universidade do Estado do Pará	01
2014	Universidade Federal do Ceará	01
2016	Universidade Federal do Vale do São Francisco em Pernambuco	01
	Universidade Federal do Ceará	01

Fonte: CAPES (2018)

Desse modo, o texto encontra-se organizado em três seções, além da Introdução e Considerações finais: a primeira apresenta uma síntese dos aspectos teóricos metodológicos da pesquisa; a segunda refere-se às pesquisas que revelam a análise epistemológica e didática do objeto matemático para termos de conhecimentos obre o objeto geométrico Relações Trigonométricas no Triângulo Retângulo (RTTR); e a terceira contempla de uma abordagem histórica do objeto geométrico em estudo.

<sup>4</sup> Leia-se CAPES – Coordenadoria de Aperfeiçoamento Pessoal do Ensino Superior.

## 2 Aspectos teórico-metodológicos da pesquisa

Nos cenários de ensino e aprendizagem de matemática, é possível averiguar obstáculos que dificultam o aprendizado do aluno. Segundo Almouloud (2007), a noção de obstáculo é importante para a didática da matemática, porque trata de um saber em constituição pelo aluno e que passa por conhecimentos provisórios.

Essa noção de obstáculo epistemológico foi relatada, inicialmente, por Gaston Bachelard, em 1938. Para esse teórico, os obstáculos epistemológicos referem-se a um processo de rompimentos com o conhecimento dito primeiro, ou seja, o ato de conhecer se dá contra um conhecimento anterior, eliminando conhecimentos mal estabelecidos, sendo então, um processo lento e conflituoso.

Contudo, décadas posteriores, em meados de 1976, Brousseau incluiu o conceito de obstáculo epistemológico na Didática da Matemática, afirmando que os obstáculos se manifestam pela incapacidade de compreensão de determinados problemas e da resolução com eficácia, ou pelos erros que para serem superados, deveriam conduzir um novo conhecimento.

Esses obstáculos aparecem com mais intensidade na fase da aprendizagem, dessa maneira, buscou-se, nesta pesquisa, identificar alguns obstáculos referentes ao objeto em estudo para melhor compreendê-lo.

A análise epistemológica é de suma importância para o pesquisador em didática matemática, pois a identificação dos obstáculos que ela propicia facilita a distinção entre as dificuldades geralmente encontradas no processo de ensino e/ou de aprendizagem de noções matemáticas daquelas que são realmente inevitáveis porque são constitutivas do desenvolvimento do conhecimento. (ALMOULOU, 2007, p.153)

Assim, o Quadro 2 destaca inicialmente alguns conceitos sistematizados a partir das ideias dos pesquisadores que abordam sobre obstáculos epistemológicos e didáticos.

Quadro 2: Abordagem dos pesquisadores e seus conceitos

Obstáculos	Bachellard (1996)	Almouloud (2007)	Brousseau (1983)
Obstáculos Epistemológicos	Conhecimento que faz resistência a um conhecimento novo.	Conhecimento que tem sua rejeição integrada explicitamente no saber ensinado/aprendido	Obstáculo é da mesma natureza do conhecimento com objetos, relações, métodos de entendimento, previsões, com evidência.
Obstáculos		Nascem da escolha de	Dependem de uma

Didáticos		estratégias de ensino que permitem a construção, no momento da aprendizagem e que mais tarde revelar-se-ão como obstáculos ao desenvolvimento da conceituação.	escolha e permite a construção na aprendizagem, sua validade é questionável.
-----------	--	----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	------------------------------------------------------------------------------

Fonte: Elaboração dos Autores (2019)

Dentre os mais variados obstáculos, didáticos, por exemplo, revela-se pela ausência da resposta do aluno, pois demonstra a incapacidade de resolver o problema. Essas, são atitudes reveladoras de obstáculos o que dificulta a aprendizagem e remetem ao erro. Saberes do cotidiano impedem o pensamento científico.

Brousseau (1986) para diagnosticar esses obstáculos da aprendizagem, define um método de pesquisa que consiste em três fases: a) encontrar erros sistemáticos e concepções em torno das quais esses erros se agrupam; b) encontrar obstáculos na história da matemática; c) confrontar os obstáculos históricos com os obstáculos na aprendizagem.

Para tanto, ao pensar em fazer uma investigação sobre tais obstáculos, se faz necessário conhecer melhor o objeto de estudo, não apenas em relação às pesquisas, mas, seus aspectos históricos, principalmente, quando pensamos na atividade do professor em sala de aula. Assim, ao trilhar os desafios dessa atividade docente com alunos surdos, a inquietação da primeira autora nos fez despertar para realizar esta pesquisa, com foco nos mecanismos atencionais presentes na abordagem do objeto Relações Trigonômétricas do Triângulo Retângulo, em livros didáticos de matemática do 9º ano do ensino fundamental, sob a perspectiva de uma análise praxeológica.

Como comentando anteriormente, fazer uma análise praxeológica é investigar como uma atividade matemática explora determinado objeto. Para tanto, a pesquisa teve como premissa dois focos principais: uma investigação sobre o histórico do objeto geométrico RTTR e sobre o que revelam as pesquisas acerca desse objeto.

O processo metodológico foi pela pesquisa bibliográfica, a qual nos permite consultar, compreender e interpretar os dados produzidos por diversos documentos ou livros e textos que abordam aspectos históricos sobre determinado tema, além de mapear pesquisas acerca do objeto geométrico em tela. No caso da história de RTTR, a pesquisa baseou-se em Eves (2011) e Boyer (1974), visando identificar o que estudos apontam sobre obstáculos epistemológicos e didáticos quanto a objetos geométricos, principalmente, em relação às relações trigonométricas no triângulo retângulo.

A primeira parte desta abordagem metodológica voltou-se a um estudo sistemático de análise das pesquisas sobre o tema, tomando como base Fiorentini e Lorenzato (2006, p 103). Para esses autores, fazer uma revisão sistemática de outras pesquisas, é buscar realizar uma avaliação crítica de tais estudos, ou mesmo “[...] produzir novos resultados ou sínteses a partir do confronto desses estudos”, numa tentativa de transcender o conhecimento apresentado por esses estudos. Para isso, escolhemos como palavra-chave “relações trigonométricas no triângulo retângulo”, por ser um dos conteúdos geométricos presente nos livros didáticos de matemática no 9º ano do ensino fundamental, com o qual, alunos surdos apresentam muitas dificuldades na aprendizagem.

### 3 Mapeamento das Pesquisas

Na busca para mapear pesquisas acerca das RTTR, foi possível identificar apenas 04 pesquisas, 03 em nível de mestrado profissional e 01 em mestrado de educação, abrangendo apenas duas regiões – Norte e Nordeste. Na região Norte, 02 trabalhos são do Estado do Pará, sendo um da Universidade Estadual e o outro da Universidade Federal. Na região Nordeste, também é contemplada com 02 estudos, sendo 01 da Universidade Federal do Ceará e o outro da Universidade do Vale do São Francisco (Bahia), como podemos visualizar no Quadro 3.

Quadro 3: Registro sobre Relações trigonométricas no triângulo retângulo

Autor (Ano)	Pesquisa	Título	Instituição	Região
Gomes (2013)	Educação	O ensino das relações trigonométricas no triângulo retângulo por atividades	Universidade do Estado do Pará	Norte
Bezerra (2014)	Mestrado Profissional	Relações Trigonométricas Fundamentais	Universidade Federal do Ceará	Nordeste
Souza (2016)	Mestrado Profissional	Relações trigonométricas em triângulos quaisquer com o auxílio de triângulos retângulos	Universidade Federal do Vale de São Francisco	Nordeste
Furtado (2016)	Mestrado Profissional	Belém 400 anos: uma aplicação das principais relações trigonométricas do triângulo, na cidade das Mangueiras	Universidade Federal do Pará	Norte

Fonte: Elaboração dos Autores (2019)

Após identificação e leitura dessas pesquisas supracitadas, foi constatado que Gomes (2013) usou pressupostos da metodologia Engenharia Didática, com 4 etapas, sendo elas: Análises prévias, Concepção e Análise *a priori*, Experimentação, Análise *a posteriori* e validação. Nas análises prévias, houve um estudo da arte sobre relações

trigonométricas e aplicação de um questionário com professores de matemática e alunos do 3º ano do ensino médio; na Concepção *a priori* foram produzidas atividades de fixação, listas de exercícios, como sequência didática; na terceira fase, a Experimentação aplicando-se a sequência didática em encontros sistemáticos, cuja realização foi registrada por meio de câmera digital e bloco de anotações. Por fim, nas Análises *a Posteriori* e Validação, foram destacadas observações para a coleta e validação da sequência didática.

Com as observações e validação da sequência didática, foi possível a autora identificar as principais dificuldades no ensino aprendizagem, são elas: leis de senos e cossenos, problemas em lei de senos sem imagem e cosseno com imagem e cosseno e seno sem imagem. Para embasar sua pesquisa, a autora mergulhou nos estudos de Artigue (1998), Almouloud (2007), Jucá e Pais (2008).

Gomes (2013) supõe que um dos motivos dos professores não abordarem esse conteúdo deu-se devido à sua formação, apresentando insegurança em abordá-lo. Referente aos alunos, 76% relatam que o conteúdo é abordado primeiramente pelo conceito, exemplos e, em seguida, resolução de exercícios.

Tais resultados remetem ao conceito de obstáculo epistemológico apontado por Almouloud (2007), no qual o conhecimento matemático tem sua rejeição integrada explicitamente no saber ensinado/aprendido. Na pesquisa de Gomes (2013), os professores não se sentem preparados para ensinar o conteúdo geométrico, gerando obstáculo na comunicação entre professor, aluno e saber. Para a autora, muitas vezes esses obstáculos estão presentes na prática adotada pelo professor que causa dificuldade, lentidão e estagnação no desenvolvimento do discente.

A autora concluiu que os alunos tiveram uma boa participação nas atividades, por meio da sequência didática aplicada, puderam perceber as dificuldades das noções básicas como fração, jogo de sinal na multiplicação, entre outros. Com as atividades desenvolvidas de forma dinâmica, os alunos se empenharam mais em aprender, confirmando que o ensino por atividades, auxilia o desenvolvimento cognitivo dos alunos, formando indivíduos autênticos, críticos, capaz de se posicionar e sobreviver neste mundo diversificado e complexo que estamos inseridos.

Em 2014, o autor Bezerra apresentou relações trigonométricas e suas demonstrações usando a geometria plana, lei do seno e cosseno, por considerar que tais conceitos abrangem aplicabilidade em outras áreas. Nesse estudo, ele abordou também



uma breve história da trigonometria pelos autores Boyer (1974) e Eves (2011). Em sequência apresentou as relações fundamentais, dentre elas, enfatizando as fórmulas da adição de arcos, sendo utilizadas área de figuras planas nas demonstrações, a lei dos cossenos e a lei dos senos.

O autor procurou mostrar a importância desse conteúdo no Ensino Médio trabalhando a construção de figuras, para despertar a criatividade e tornar o ensino de matemática mais prazeroso para o aluno. Embora, também não tenha tratado especificamente sobre os obstáculos, observa-se que levou em consideração as mudanças atuais no ensino de matemática e, por consequência, no ensino de trigonometria, o que para ele, tem aumentado o interesse de pesquisadores em debater essa problemática nas escolas.

Tal afirmativa não tem argumentação sustentada por nenhum estudo bibliográfico que apresente argumentos consistentes. Por outro lado, também, a fundamentação da pesquisa é baseada em autores da história da matemática (EVES; BOYER, 2011) e autores de livros didáticos e técnicos da matemática. O que dá indícios a uma natureza de obstáculos epistemológicos em relação à pesquisa, pela inconsistência dos argumentos.

Quando são abordados conteúdos que envolvem trigonometria, muitas pesquisas afirmam que o ensino aprendizagem está centrado no uso e memorização de fórmulas. Para sair dessa realidade, Souza (2016) fez um estudo sobre uma abordagem para o estudo de tais problemas da trigonometria, valendo-se de uma abordagem que privilegia a compreensão e a reflexão dos conteúdos.

Também a fundamentação teórica dessa pesquisa está baseada em Boyer (1974) e autores de livros didáticos de matemática. O que também dá indícios a uma natureza de obstáculos epistemológicos em relação à pesquisa. Em sua proposta, Souza (2016) realizou o estudo das relações trigonométricas em triângulos quaisquer usando apenas o Teorema de Pitágoras e as razões trigonométricas em triângulos retângulos. Dessa forma, sem apresentar a demonstração, os alunos foram mobilizados a utilizar o Teorema de Pitágoras na resolução de triângulos quaisquer.

A pesquisa aconteceu em duas escolas públicas com 51 alunos do ensino médio. A coleta ocorreu com aplicação de questionários e realização de oficinas com tais alunos, no intuito de investigar o desempenho deles pela abordagem adotada. O autor concluiu que a proposta utilizada foi uma boa alternativa, pois os alunos consideraram mais fácil resolver

as questões, visto que não precisaram usar muitas fórmulas.

Um último estudo identificado no mapeamento de pesquisas, foi o de Furtado (2016) voltado à metodologia Resolução de Problemas, buscando homenagear a cidade e utilizar os conceitos matemáticos com questões de trigonometria utilizando os pontos turísticos da cidade Belém-PA. Além da aproximação do contexto histórico da cidade com o conteúdo matemático, o autor abordou teorias de forma criativa, aproximando a realidade histórica da cidade para o aluno. Isso permitiu criação de significados diferentes mobilizando os alunos a compreender o problema, elaborar um plano e executá-lo, com base nos pressupostos de Dante (1998) e Lupinacci (2004). No decorrer da pesquisa, o autor afirma que as principais dificuldades encontradas foram: as questões relacionadas à realidade e, em algumas atividades, não saberem racionalizar frações, além das dificuldades com a leitura e interpretação de texto para esquematizar e desenhar as figuras referentes às atividades. Esses alunos também apresentaram limitações no conhecimento algébrico.

Embora, esse autor não tenha se baseado nos autores que abordam sobre obstáculos epistemológicos ou didáticos, vale ressaltar que, segundo Almouloud (2003), embora, os obstáculos didáticos não permitam a construção no momento da aprendizagem, mais tarde revelar-se-ão como obstáculos ao desenvolvimento da conceitualização. Essas situações podem criar barreiras no processo de ensino-aprendizagem.

Os obstáculos didáticos são conhecimentos adquiridos, mas limitados e relativos de um determinado conteúdo (BROUSSEAU, 1989). Isso nos dá indícios que as dificuldades encontradas por Furtado (2016) quanto aos alunos elaborarem questões com os pontos turísticos de Belém-PA, como relata em seu texto, sejam obstáculos. O que remete à observação de Costa (2014), cujos estudos revelam que os licenciandos apesar de gostarem, eles consideram que a matemática lhes apresenta um nível médio de dificuldade. Essa resposta, de que a matemática é difícil, identificamos como sendo uma das crenças que os licenciandos trazem consigo, construída a partir de sua formação básica.

No entanto, apesar dessas dificuldades, em sua pesquisa, Furtado (2016) conseguiu fazer um diálogo entre passado e presente, aproximando o ensino de matemática e a cidade para atrair a atenção dos alunos investigados. Desse modo, ele buscou realizar uma atividade contextualizada para aproximar os alunos à sua realidade.

Desse exposto, observa-se que essas pesquisas se aproximam quando se referem aos obstáculos que os alunos têm em responder atividades e que precisem retomar aos

conceitos estudados em anos anteriores, como por exemplo: frações, ângulos e triângulos. Ao tempo em que divergem quanto sua abordagem, por exemplo, na leitura e interpretação de texto para relacionar o conteúdo geométrico.

Nessas pesquisas, os autores compartilham das mesmas considerações finais, por ser um conteúdo que faz parte da geometria, na qual muitos professores não têm tanto domínio. Por sua vez, as RTTR se limitam somente à aplicação de fórmulas e resolução de listas de atividades. Os autores apresentam sugestões para melhorar o processo de ensino aprendizagem, instigando o professor a usar atividades diferenciadas e para associar ao mais próximo possível da realidade do aluno. Como exemplo, destacamos o estudo de Furtado (2016), ao relacionar o objeto matemático com a história da cidade. Nessa relação, houve contextualização na tentativa de tornar a resolução de problemas uma metodologia de ensino mais acessível.

Como podemos observar, os pesquisadores buscaram diversas relações em sua natureza com o objeto matemático, apresentando seus avanços nas diferentes estratégias seja, por sequência didática com atividades de fixação e/ou pela abordagem histórica da cidade. Essas abordagens não enfatizam a memorização de fórmulas e se distancia do ensino meramente expositivo. Em outras palavras, é buscar adaptação para a esfera escolar nos dias atuais, para que o aprendiz consiga compreender relações de medidas, ângulos e possa relacionar ao seu cotidiano.

Entretanto, foi observado que as pesquisas em si, apontam obstáculos epistemológicos, pela inconsistência ao abordarem o objeto matemático em jogo. Embora não tenha sido possível neste texto, identificar os obstáculos epistemológicos nas pesquisas selecionadas para análise, são argumentos frágeis devido ao referencial escolhido. Das quatro pesquisas, três delas apresentam o histórico do conteúdo pesquisado, apenas tratando sobre a origem da trigonometria. Não apresentam uma contextualização entre os procedimentos metodológicos, tampouco qualquer articulação entre o histórico apresentado, o objeto de estudo e procedimentos metodológicos da pesquisa. Do mesmo modo, tais procedimentos são descritivos, assim como, os resultados.

Frente a esse contexto, torna-se necessário compreender o processo histórico do objeto matemático em questão e evitar também cometer tais obstáculos.

#### **4 Histórico do objeto geométrico em jogo**

Para compreender a história sobre o objeto matemático desta pesquisa, buscamos

recorrer a partir da Origem da Geometria, para identificar uma nova categoria na origem de espaço e tempo.

As principais relações de triângulo retângulo são as funções seno e cosseno de um ângulo, são as mais básicas e conhecidas, que possivelmente nos levam às demais funções trigonométricas: tangente (tg), cotangente (cot), secante (sec) e cossecante (csc). Porém, para compreender esse conteúdo, faz-se necessário consolidar mais conhecimentos acerca dos conceitos geométricos.

A trigonometria surgiu diante da necessidade de o homem calcular medidas com base em ângulos, assim os conceitos geométricos se tornaram indispensáveis. Diante da sistematização do conhecimento trigonométrico e sua representação em triângulos retângulos, os europeus desenvolveram as Funções Trigonométricas. Tais avanços só foram possíveis devido aos estudos sobre a Geometria Analítica. (LOURENÇO, 2018)

Etimologicamente, a palavra trigonometria vem do grego *trigonom*, “triângulo” e *metron*, “medida”. Esta área da matemática estuda as relações entre os ângulos e os lados do triângulo. A trigonometria oportuniza ao matemático resolver problemas geométricos envolvendo ângulos e distâncias. (BEZERRA, 2014; FURTADO, 2016)

As principais relações de triângulo retângulo são as funções seno e cosseno de um ângulo, consideradas básicas e difundidas, pelas quais são possíveis identificar as outras funções trigonométricas: tangente (tg), cotangente (cot), secante (sec) e cossecante (csc). Para melhor compreensão desse conteúdo, é primordial que os conceitos básicos estejam consolidados.

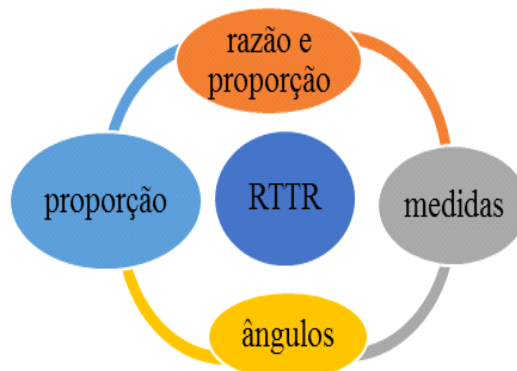
É incerto afirmar onde e quando surgiu a geometria. No entanto, há indícios, como ressalta Boyer (1974), que nos levam ao Egito e Babilônia, pois os geômetras egípcios chamados de estiradores de corda, demarcavam e traçavam as bases de seus templos. Os desenhos mostram simetria, o que pode ser uma espécie de proposições geométricas na Babilônia. Eves (2011) afirma que a geometria se relacionava com a mensuração da prática por volta de 1600 a.C, e tinha caráter algébrico.

De acordo com Furtado (2016), a aplicabilidade da trigonometria possui registros por babilônios e antigos egípcios, fundamentalmente na agrimensura e na astronomia. Ao utilizarem as relações existentes entre as medidas dos lados e dos ângulos, era possível determinar comprimentos inacessíveis como a distância entre dois planetas.

Ao tratarmos de RTTR, objeto matemático desta pesquisa, que envolve triângulos,

semelhanças, razão e proporção, há registros que os babilônicos já tinham conhecimento de determinadas regras sobre áreas de retângulo, triângulo retângulo, trapézio e que os lados correspondentes de dois triângulos retângulos semelhantes são proporcionais (EVES, 2011).

Figura 1: Conceitos necessários para aprender relações trigonométricas no triângulo retângulo (RTTR)



Fonte: Elaboração dos Autores (2019)

Para Eves (2011, p. 61), “muitos problemas dizem respeito a uma transversal paralela a um lado de um triângulo retângulo”, que de um lado “levam a equações quadráticas”, e de outro, levam a “sistemas de equações simultâneas”, sendo “um deles formado de dez equações com dez incógnitas”.

Se por séculos, o conhecimento da geometria foi importante para o desenvolvimento das regiões apresentadas, ainda hoje, percebemos a sua importância em diversas áreas do conhecimento, o que nos permite fazer novas investigações, principalmente, em relação à problemática do seu ensino.

Os egípcios e os babilônios deram importantes contribuições na trigonometria para a descoberta e aperfeiçoamento dessa área. No Papiro Ahmes, o mais extenso documento matemático egípcio e no Papiro de Moscou, foram encontrados 26 dos 110 problemas envolvendo geometria. Muitos deles decorrem de fórmulas de mensuração necessárias para o cálculo de áreas de terras e volumes de grãos. (EVES, 2011)

Os maiores cientistas viveram na Grécia, valendo destacar as descobertas e aplicações feitas pelos gregos na área. Pela primeira vez, foi encontrado um estudo sistemático de relações entre ângulos (ou arcos) num círculo e os comprimentos das cordas que os subentendem. Por isso, a trigonometria é considerada uma criação da matemática grega, mas com sua origem obscura.

Segundo Eves (2011), o povo grego usava-se da trigonometria na resolução de

problemas sobre a astronomia. O astrônomo considerado o Pai da trigonometria foi Hiparco de Nicéia, que se dedicou à construção da considerada primeira tabela trigonométrica, a qual representou um grande avanço na astronomia.

Hiparco introduziu na Grécia a divisão do círculo em  $360^\circ$ , ao qual atribuem um tratado de 12 livros que se ocupa da construção da corda. A tábua de corda, posteriormente aprimorada por Ptolomeu, forneceu o comprimento das cordas dos ângulos centrais de um círculo dado, essa tábua cedia os ângulos nos senos de  $0^\circ$  a  $90^\circ$ . Ao desenvolver partes da trigonometria plana, as razões trigonométricas eram usadas nas demonstrações do seno de pequenos ângulos.

O primeiro tratado de trigonometria independente da Astronomia de que se tem notícia foi o Tratado dos Quadriláteros. Segundo Eves (2011), as contribuições para a trigonometria são advindas de observações astronômicas registradas em inúmeras tábuas. Uma tábua babilônica famosa é a chamada Plimpton 322. O nome indica que se trata da tábua da coleção G. A. Plimpton da Universidade de Colúmbia, a qual refere-se aos valores da secante para ângulos de  $31^\circ$  a  $45^\circ$  formada por meio de triângulos retângulos.

Desse feito, destaca-se, então, que o conceito de ângulo e de como efetuar sua medida tornou-se essencial ao desenvolvimento da trigonometria, principalmente, para a compreensão das raízes trigonométricas em um triângulo retângulo.

Na China, no reinado de Chóu-pei Suan-king, aproximadamente 1110 a.C, os triângulos retângulos eram usados para medir distâncias e comprimentos. Existem demonstrações do conhecimento das relações trigonométricas, mas não se sabe o nome dados pelos chineses ao seno reverso.

Foi também através dos árabes, que a trigonometria do seno chegou à Europa, o nome seno, como hoje é conhecido fora encontrado como *jiva*, que significa cordas, nos trabalhos de Aryabata (510 d. C.) sendo o seno reto, para diferenciar os árabes chamavam no século XI, em relação à simbologia, *sin* foi usado por Herigone em um livro em 1634, em 1654 Seth Ward usou “s” para seno e “S” para cosseno.

A partir dessa síntese, percebe-se que conhecer os vestígios da história do objeto matemático é ferramenta fundamental para o conhecimento prévio do tema. Buscar aprofundamento quanto ao objeto de pesquisa, proporciona não apenas um momento de viagem no tempo, conhecendo como povos antigos construíram tal conhecimento, mas também, nos mobiliza refletir sobre o desenvolvimento do objeto matemático em pauta, em

relação aos estudos científicos mais atuais. Como apontado anteriormente, nas quatro pesquisas selecionadas, ainda há muito para investigar mais minuciosamente as RTTR, dirimindo os obstáculos ainda presentes nas aulas de matemática, nesta contemporaneidade.

## 5 Considerações Finais

O que são os obstáculos? O que são obstáculos epistemológicos? Em princípio, obstáculos são barreiras, impedimento, bloqueio, entraves para realizar uma ação ou adquirir algo. Mas, por outro lado, bloquear, impedir, também pode ser romper. Segundo Gaston Bachelard (1938), os obstáculos epistemológicos referem-se a um processo de rompimentos com o conhecimento dito primeiro e que, no fundo, o ato de conhecer se dá contra um conhecimento anterior, eliminando conhecimentos mal estabelecidos, sendo então, um processo lento e com conflitos.

Este artigo teve como objetivo apresentar um estudo sobre obstáculos epistemológicos e didáticos em relação ao conhecimento do objeto geométrico Relações Trigonométricas no Triângulo Retângulo, caracterizando-se como natureza bibliográfica por meio de uma investigação histórica e de estudos já realizados sobre esse objeto.

Ao analisar as pesquisas, consideramos dois tipos de obstáculos. Os obstáculos didáticos, segundo Almouloud (1989), são conhecimentos adquiridos, mas limitados e relativos de um determinado conteúdo. Os obstáculos epistemológicos são conhecimento que têm sua rejeição integrada explicitamente no saber ensinado/aprendido. (ALMOULOU, 2007)

Na análise que desenvolvemos sobre as pesquisas, vimos que os obstáculos encontrados se referem à resistência em relação aos sujeitos participantes, no caso alunos de educação básica. Eles apresentaram dificuldades para responder atividades que precisam de conceitos prévios, esperados já ter sido adquiridos em anos anteriores, como por exemplo frações, ângulos e triângulos.

Podemos também apontar certa fragilidade nos argumentos apresentados nas pesquisas selecionadas. Há inconsistência nesses argumentos quando abordam sobre o objeto matemático em jogo, sobretudo em relação à questão epistemológica das RTTR. Primeiro, porque das quatro pesquisas, três delas apresentam o histórico do conteúdo pesquisado, apenas tratando sobre a origem da trigonometria. Convém ressaltar que uma delas tem como método de análise a engenharia didática, o qual remete, na etapa de

análises prévias, um estudo epistemológico sobre o objeto de estudo. No segundo aspecto, observamos que, por abordarem temas relacionados à geometria, poderiam apresentar mais aprofundamento em relação a esse campo do conhecimento para investigar as possibilidades de aprendizagem. Nesse ponto, inferimos a questão dos obstáculos didáticos.

Enfim, essas ponderações não podem deixar de evidenciar o tipo de programa, cujas pesquisas estão vinculadas. Como 75% das pesquisas são de mestrado profissional, a abordagem diferencia-se do olhar na área da Educação Matemática. Razão essa observada pela lacuna existente, em deixarem de evidenciar as metodologias do ensino de matemática. Em apenas uma delas, ressalta-se o uso da resolução de problemas, sendo que as demais voltam-se para demonstração, exemplos e exercícios propostos. São estudos que ressaltam um modelo na via de contramão das orientações curriculares vigentes da época de seus respectivos estudos, no caso os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998, 2000) e Diretrizes Curriculares Nacionais (BRASIL, 2013). Esse modelo confirma os alunos não conseguirem avançar por não ter uma base consolidada, visto que nas atividades propostas, os pesquisadores não tiveram um olhar sobre como e porque aconteceu o “erro”. Eis um aspecto que remete ao problema didático. Destarte, esperamos com este trabalho, contribuir para novas leituras e releituras sobre o objeto matemático relações trigonométricas no triângulo retângulo.

## Referências

- ALMEIDA, Gladiston dos Anjos. **Polígonos Regulares inscritos no círculo**: uma abordagem histórica praxeologia em livros didáticos de matemática do 9º ano do ensino fundamental. 175f. Dissertação de mestrado. UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO, 2012.
- ALMOULOU, Saddo Ag. **Fundamentos da didática da matemática**. Curitiba: UFPR, 2007.
- BACHELARD, Gaston. **A formação do espírito científico**: contribuição para uma psicanálise do conhecimento. Rio de Janeiro: Contraponto, 1996.
- BEZERRA, Antônio Almir. **Relações trigonométricas fundamentais**. 2014. 59f. Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional) - Centro de Ciências, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza.
- BOYER, Carl. **História da matemática**. Tradução: Elza F. Gomide. São Paulo. Edgard Blucher, Ed. Universidade de São Paulo. 1974.
- BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. Secretaria de Educação Continuada, Alfabetização, Diversidade e Inclusão. Conselho Nacional da Educação.



**Diretrizes Curriculares Nacionais Gerais da Educação Básica.** Ministério da Educação. Secretária de Educação Básica. Diretoria de Currículos e Educação Integral. – Brasília: MEC, SEB, DICEI, 2013.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática.** Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: 1998.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio.** Ciências da Natureza e suas Tecnologias. Matemática. Ministério da Educação. Secretaria de Ensino Médio e Tecnologias. Brasília: 2000.

BROUSSEAU, Guy. **Fondements et méthodes de la didactiques des mathématiques.** Grenoble, 1986.

CHEVALLARD, Yves. A teoria antropológica do didático face ao professor de matemática. In: ALMOULOU, S. FARIAS, L. M. S. HENRIQUES, A. **A teoria antropológica do didático: princípios e fundamentos.** 1 ed. Curitiba\_PR: CRV, 2018.

COSTA, Manoel Santos; ALLEVATO, Norma Suely Gomes. Crenças manifestadas por (futuros) professores em relação à matemática e seu ensino. **Revista de Ensino de Ciências e de Matemática.** São Paulo, v. 5, n. 1, p. 21-36, jan./mar. 2014

CRUZ, Alanne de Jesus. **Mecanismos atencionais esperados no processo de aprendizagem de alunos surdos em matemática: uma investigação em livros didáticos do PNLD 2017.** 2019, 140f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática). Universidade Federal de Sergipe. São Cristóvão.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática.** Tradução: Hygno H. Domingues. 5. Ed. Campinas: Editora da Unicamp .2011.

FIORENTINI, Dario.; LORENZATO, Sérgio. **Investigação em educação matemática: percursos teóricos e metodológicos.** Campinas: Autores Associados, 2006.

FURTADO, Sérgio Henrique Furtado. **Belém 400 anos: uma aplicação das principais relações trigonométricas do triângulo retângulo na cidade das Mangueiras.** 2016, 72f. Dissertação (mestrado Profissional em Matemática). Universidade Federal do Pará. Belém.

GOMES, Rosana Pereira. **O ensino das relações trigonométricas no triângulo por atividades.** 2013, 219f. Dissertação (Mestrado em Educação). Universidade do Estado do Pará, Belém.

LORENZATO, Sérgio. Porque não ensinar geometria? **Educação Matemática em Revista,** Blumenau, v. 3, n. 4, p. 3-13, jan./jun. 1995.

LOURENÇO, Rebecca; NASCIMENTO, William Junior; LUCCAS, Simone. O Desenvolvimento das funções trigonométricas a partir de uma abordagem histórico-epistemológica. **Revista de Ensino de Ciências e de Matemática.** São Paulo, v. 9, n.3, p. 200-217, abr/jun. 2018.

ESMERALDA, Maria Queiroz de Oliveira. **O uso do livro didático de matemática por professores do ensino fundamental.** 2007, 152f. Dissertação (Mestrado em Educação). Universidade Federal de Pernambuco. Recife.

PASSOS, Dariela Santos. **A educação algébrica no 8ºano do ensino fundamental nas escolas de Ribeirópolis/SE: entendimento dos professores de matemática.** 2012, 184f. Dissertação (mestrado em Ensino de Ciências e Matemática). Universidade Federal de Sergipe. São Cristóvão.

SILVA, Edson Benedito Antunes Angelo da. **A introdução de conceitos algébricos em livros didáticos do 8ºano do ensino fundamental à luz dos registros de representação semiótica.** 2012, 96f. Dissertação (mestrado em educação). Universidade Federal de Mato Grosso, Cuiabá.