

Novas configurações do laboratório de ensino de Trigonometria a partir da incorporação da tecnologia articulada a história da Matemática

Ana Carolina Costa Pereira¹

Antonia Naiara da Sousa Batista²

Gisele Pereira Oliveira³

Resumo: No ano de 2020, o ensino passou por mudanças significativas devido à pandemia da Covid-19 reconfigurando a prática do professor de um modelo presencial, para um estudo remoto (com o uso de tecnologias digitais). Esse fato resultou em disciplinas que, inicialmente, envolviam práticas de ensino no qual o aluno vivenciava a construção de materiais manipuláveis, planejava atividades, e executava em sala de aula. Essa descrição se refere às disciplinas que envolvem os Laboratórios de Matemática e Ensino (LME). Dessa forma, esse artigo tem como intuito apresentar uma prática do Laboratório de Ensino de Trigonometria (LET), disciplina curricular do curso de licenciatura em Matemática da Universidade Estadual do Ceará (UECE), integralizada as tecnologias para o estudo de conceitos trigonométricos por meio da balhastilha. Para isso, é apresentado um estudo teórico a partir do planejamento e execução dessa prática laboratorial incorporando a Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação (TDIC), em particular, o software GeoGebra, atrelado à história da Matemática. Nesse contexto, é importante ressaltar que nestes tempos de pandemia vivenciaram-se grandes desafios em relação às adaptações do ensino para modalidade remota, por conta da falta de familiaridade dos professores em formação inicial para o uso de recursos tecnológicos. No entanto, ademais a estes conflitos, vale destacar que se experimentou de maneira significativa, práticas fazendo uso da balhastilha no GeoGebra, trabalhando a articulação entre TDIC e história da Matemática.

Palavras-chave: Laboratório de Ensino de Trigonometria. Balhastilha. História da Matemática.

New configurations of the Trigonometry teaching laboratory from the incorporation of technology articulated the history of Mathematics

Abstract: In 2020, education underwent significant changes due to the COVID pandemic 19, reconfiguring the teacher's practice from a face-to-face model, to a remote study (use of digital technologies). This fact resulted in disciplines that initially involved teaching practices in which the student experienced the construction of manipulable materials, planned activities, and performed them in the classroom. This description refers to the subjects that involve the Mathematics and Teaching Laboratories (LME). Thus, this article aims to present a practice of the Teaching Laboratory of Trigonometry (LET), a curricular discipline of the Mathematics degree course at the State University of Ceará (UECE), integrated with the technologies for the study of trigonometric concepts through the crossbow. For this, a theoretical study is presented from the planning and execution of this laboratory practice

¹ Doutora em Educação. Professora do Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade Estadual do Ceará (UECE). Ceará, Brasil. ✉ carolina.pereira@uece.br  <https://orcid.org/0000-0002-3819-2381>

² Mestre em Ensino de Ciências e Matemática. Professor do Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade Estadual do Ceará (UECE). Ceará, Brasil. ✉ antonia.naiara@aluno.uece.br  <https://orcid.org/0000-0003-2305-7088>

³ Mestre em Ensino de Ciências e Matemática. Professor do Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade Estadual do Ceará (UECE). Ceará, Brasil. ✉ gisele.oliveira@aluno.uece.br  <https://orcid.org/0000-0003-4044-3730>

incorporating Digital Information and Communication Technology (TDIC), in particular, the GeoGebra software, linked to the history of Mathematics. In this context, it is important to note that in these pandemic times, great challenges have been experienced in relation to adaptations of teaching to remote modality, due to the lack of fluency of teachers in initial training for the use of technological resources, which, however, in addition to these conflicts, it is worth noting that the articulation between TDIC and the history of mathematics via CI has been significantly experienced through this practice.

Keywords: Trigonometry Teaching Laboratory. Balhestilha. History of Mathematics.

Nuevas configuraciones del laboratorio de enseñanza de Trigonometría desde la incorporación de la tecnología articulada a la historia de las Matemáticas

Resumen: En 2020, la educación sufrió cambios significativos debido a la pandemia de COVID19, reconfigurando la práctica docente de un modelo presencial, a un estudio remoto (uso de tecnologías digitales). Este hecho dio lugar a disciplinas que inicialmente involucraron prácticas docentes en las que el alumno experimentó la construcción de materiales manipulables, planificó actividades y las realizó en el aula. Esta descripción se refiere a las asignaturas que involucran a los Laboratorios de Matemática y Docencia (LME). Así, este artículo tiene como objetivo presentar una práctica del Laboratorio de Docencia de Trigonometría (LET), disciplina curricular de la carrera de Matemáticas de la Universidad Estatal de Ceará (UECE), integrado con las tecnologías para el estudio de conceptos trigonométricos utilizando la ballesta. Para ello, se presenta un estudio teórico a partir de la planificación y ejecución de esta práctica de laboratorio incorporando Tecnología de Información y Comunicación Digital (TDIC), en particular, el software GeoGebra, vinculado a la historia de las Matemáticas. En este contexto, es importante señalar que en estos tiempos de pandemia, se han experimentado grandes desafíos en relación a las adaptaciones de la enseñanza a la modalidad remota, debido a la falta de fluidez de los docentes en la formación inicial para el uso de los recursos tecnológicos, que, sin embargo, además de estos conflictos, vale la pena señalar que la articulación entre TDIC y la historia de las matemáticas a través de CI se ha experimentado significativamente a través de esta práctica.

Palabras clave: Laboratorio Docente de Trigonometría. Balhestilha. Historia de las Matemáticas.

1 Introdução

O ensino, tanto a nível de Educação Básica quanto superior, passou por intensas transformações a partir do primeiro semestre de 2020, que foram provocadas pelo aumento no número de pessoas contaminadas pela Covid-19. Nessa esfera, tanto professores como alunos precisaram buscar formação para aprender a lidar com tecnologias que pudessem possibilitar o ensino e a aprendizagem de uma forma remota.

O Parecer CNE/CP nº 5/2020, aprovado no dia 28 de abril de 2020, diante do enfrentamento da pandemia da Covid-19, deixou explícito a autorização para a reorganização do Calendário Escolar e a alternativa de ministrar as atividades presenciais em caráter remoto com o cumprimento da carga horária anual mínima.

A partir desse parecer fica claro inclusive que atividades presenciais do tipo relacionadas à avaliação, processo seletivo, Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) e aulas de laboratório, poderiam sofrer modificações “por atividades não presenciais, considerando o modelo de mediação de Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação (TDIC) adequado à infraestrutura e interação necessárias” (BRASIL, 2020, p. 18).

Partindo dessa orientação, pensou-se na possibilidade de aulas remotas ou no modo remoto na disciplina de Laboratório de Ensino de Trigonometria (LET) do curso de licenciatura em Matemática da Universidade Estadual do Ceará (UECE), preservando as práticas e o envolvimento dos alunos durante todo o semestre. Foi então que nesse planejamento foram agregadas tecnologias que viessem a possibilitar uma interação nesse ambiente, sendo elas, o Zoom e o GeoGebra.

Com vista a enriquecer essa prática, buscou-se agregar recursos da História da Matemática que permitissem a construção de situações-problema nesse ambiente. E um desses elementos incorporados em umas das práticas de LET foi a balhestilha⁴, um instrumento utilizado nas grandes navegações entre os séculos XV e XVII para localização em alto mar.

Todavia, foram levantadas questões em torno de como explorá-la de modo virtual partindo do seu modelo físico. Logo, fizemos uso do GeoGebra 2D on-line para simular um experimento que viesse a permitir aos alunos mobilizar a balhestilha para realizar medições na dimensão do próprio sistema.

Mobilizados por questionamentos e problemas que surgem nessa esfera do ensino remoto e com a pretensão de reproduzir momentos que antes eram vivenciados presencialmente por alunos nessas práticas de LET, foi que essa proposta surgiu com vista a não deixar completamente ofuscado o papel do aluno e do professor nesse processo de interação para o estudo de conceitos matemáticos.

Diante dessa compreensão, ressalta-se que este estudo se caracterizou conforme um percurso metodológico, delineado em uma abordagem qualitativa, pois segundo Araújo e Borba (2004) amparou-se em uma apropriação e observação de cunho qualitativo dos dados, que emergiram da experiência na disciplina de LET. E, esse trajeto fomentou e

⁴ Essa denominação do instrumento está pautada no tratado *Chronographia, Reportorio dos Tempos...*, de Manoel de Figueiredo, publicado em 1603. Dentro desse documento, esse instrumento também é chamado por rádio astronômico, sendo composto pelas mesmas peças da balhestilha, no entanto, com uma finalidade distinta, voltada para o ofício dos astrônomos, que segundo Batista e Pereira (2021, p. 7) “observarão por este a distância das estrelas de umas as outras observadas por via do raio visual que sai do nosso olho”.

auxiliou na percepção de algumas fragilidades de compreensão destes sujeitos em relação aos conceitos trigonométricos presentes na articulação entre TDIC e História da Matemática.

Desde modo, este artigo tem como intuito apresentar uma prática do LET, disciplina curricular do curso de licenciatura em Matemática da Universidade Estadual do Ceará (UECE), integralizada às tecnologias para o estudo de conceitos trigonométricos por meio da balhestilha. O estudo se encontra dividido em quatro momentos a partir da introdução, sendo eles: uma articulação de aspectos referentes a tecnologias digitais e a história da Matemática; uma explanação sobre a disciplina de LET no curso de licenciatura em Matemática; apresentação da prática que envolveu a balhestilha integralizada às tecnologias; algumas ponderações sobre essa prática e; por fim, as considerações finais.

2 A articulação de tecnologias digitais e história da Matemática via Investigação Científica

Nessa direção, admitindo o contexto apresentado anteriormente sobre a necessidade de isolamento social por conta dos tempos de pandemia, viu-se na disciplina de LET, no curso de licenciatura em Matemática na UECE, com professores em formação inicial, no ano letivo de 2020, a exigência de adaptação do ementário e programa da disciplina para modalidade remota.

Por conta desse contexto, houve o interesse e a possibilidade de conduzir tais transformações, na perspectiva do uso de TDIC, por refletir sobre o que Pinheiro, Borges Neto e Pinheiro (2013) assinalaram sobre quando e como utilizar o ambiente computacional para o ensino de saberes matemáticos.

Com isso, nesta ocasião, selecionou-se uma das práticas de LET, que em modalidade presencial, fazia uso de um instrumento físico matemático, denominado de Balestilha, para uso no Laboratório de Ensino de Matemática (LEM) da UECE, produzido para utilização nesta experiência. Por isso, viu-se a essencialidade de adaptar tal experimentação para a modalidade remota no ambiente virtual de sala de aula do Zoom.

Essa adequação sustentou-se, sob o olhar de Sousa (2020), que sinaliza potencial didático na aliança entre TDIC e história da Matemática via Investigação Científica (IC). Dessa maneira, a IC conduziu-nos a levantar quais os possíveis recursos/softwarees que poderiam viabilizar, através do tratamento didático de ações, a construção eficiente e eficaz desta articulação. Com isso, como faremos uso de um instrumento nesta interface entre a

história e o ensino de saberes do conhecimento trigonométricos, tem-se que Saito e Pereira (2019, p. 23), apontam que a “articulação entre história e ensino aqui proposta busca estabelecer uma dialética entre registros de conhecimentos matemáticos antigo e moderno”.

Para essa construção de uma prática de ensino de LET com o uso do instrumento Balestilha, fez-se preciso a realização de um tratamento didático, a partir do que Pereira e Saito (2019) referiam-se a como seria apresentado o instrumento histórico matemático para uso no desenvolvimento de atividade de ordem didática. Assim, este cenário, correspondeu a construção de um recurso educacional digital ao qual utilizou-se do meio de transposição do instrumento para manipulação e experimentação via TDIC, no software GeoGebra.

Nessa compreensão, consoante a Almouloud (2018) que inicialmente para a articulação entre a história e a Didática da Matemática, ou uma de suas tendências identificadas nesta, como as TDIC, vê-se a importância de discutir os “porquês” e “como” integrar a história da Matemática ao ensino. E, neste artigo, verifica-se esta possibilidade, por meio do uso de tecnologias digitais.

3 A disciplina de laboratório de ensino de trigonometria no curso de licenciatura em Matemática

A disciplina de laboratório de Matemática na formação do futuro professor de Matemática não aparece de forma clara nos documentos oficiais relacionados às Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática (Bacharelado e Licenciatura), CNE/CES 1.302/2001 de 06 de novembro de 2001. Numa visão ampliada, se pode correlacionar com atividades envolvidas nos estágios supervisionados, no qual, segundo Brasil (2001, p. 6, grifo nosso) nas licenciaturas,

o educador matemático deve ser capaz de tomar decisões, refletir sobre sua prática e ser criativo na ação pedagógica, reconhecendo a realidade em que se insere. Mais do que isto, ele deve avançar para uma visão de que a ação prática é geradora de conhecimentos. Nessa linha de abordagem, o estágio é essencial nos cursos de formação de professores.

No que se refere à graduação em licenciatura plena em Matemática da Universidade Estadual do Ceará (UECE), essa disciplina foi instituída no currículo na criação do curso em 1998, no qual são direcionados 2 créditos, equivalentes a 34 horas-aula (CEARÁ, 1997). Dez anos após a elaboração do Projeto Político Pedagógico do Curso, houve a necessidade

de atualização a partir das novas Diretrizes Curriculares Nacionais, entretanto, não houve mudança no “corpo” da disciplina, que desde o início foi intitulada de “Laboratório de Matemática”. Sua ementa direcionava a vivência de “Experiências relacionadas com tópicos de Matemática do Ensino Fundamental e do Ensino Médio” (CEARÁ, 2007, p. 8). No Quadro 1 é possível visualizar os conteúdos estudados e as referências utilizadas.

Quadro 1: Síntese do programa da disciplina de Laboratório de Matemática (1997 e 2007)

CONTEÚDO	ÁREA	REFERÊNCIA
A Matemática como um sistema formal;	-	Revista Nova Escola; Revista Sala de Aula; Revista do Professor de Matemática. Smith, (1996), Van Cleave (1994), Kurt (1996), Farmer (1996) e Eves (1995).
A Matemática como percepção de regularidades;	Aritmética/Álgebra/ Geometria	
Algoritmos: multiplicação de números naturais, divisão de números naturais, raiz quadrada, a torre de Hanói;	Aritmética	
Os números inteiros;	Aritmética	
Teorema de Pitágoras.	Geometria (Plana)	
Relações métricas no triângulo retângulo;	Geometria (Plana)	
A noção de limite;	Análise	
Fatoração de trinômios.	Álgebra	

Fonte: Elaborado pelas Autoras

Algumas observações são necessárias. A primeira é a limitação de conteúdos ligados às áreas da matemática para o desenvolvimento de práticas laboratoriais para a educação básica. Fica claro a ausência da Geometria Espacial e Analítica, Trigonometria, combinatória, entre outros. Outro ponto são as referências, no qual algumas delas estão ligadas a revistas não científicas e os livros com temas pontuais do ensino de Matemática.

Em 2018, outras resoluções foram implementadas pelos órgãos governamentais que permitiram atualizar o Projeto Político Pedagógico do Curso de Licenciatura em Matemática da UECE. Nessa mudança, o fluxo passou de 2.924 (duas mil novecentas e vinte e quatro) horas, em 2008, para 3.230 (três mil, duzentas e trinta) horas em 2018, acarretando num acréscimo de disciplinas voltadas para práticas pedagógicas.

Nesse sentido, foram adicionadas disciplinas de Laboratórios de Ensino de Matemática nas quatro áreas centrais: Trigonometria, Geometria, Aritmética e Álgebra, com 2 créditos para cada disciplina, ou seja, 34 horas/aulas, totalizando 102 horas/aulas nesse componente curricular.

No que se refere à disciplina de Laboratório de Ensino de Trigonometria (LET) ela é ofertada no segundo semestre, contemplando 20 vagas semestrais e possui como pré-requisito as disciplinas de Geometria Plana, e Conjuntos e Funções. A ementa do programa visa estudar:

O papel do laboratório no ensino e na aprendizagem de conceitos de trigonometria. Teoria e prática de conteúdos trigonométricos para a educação básica. Confeção de materiais didáticos manipuláveis e desenvolvimento de propostas de atividades para o ensino básico. Planejamento e realização de uma experiência prática com o uso de materiais concretos no ensino básico (CEARÁ, 2018, p. 83).

No que se refere às referências utilizadas na disciplina, percebe-se uma atualização tendo livros nacionais e internacionais, com autores a saber: Klein (2009), Fonseca (2010), Guelli (2003), Kennedy (1992), Morey (2003), Morey e Mendes (2011), Pereira (2012), Van Brummelen (2009, 2013) Lorenzato (2006), Rêgo e Rêgo (2000), e Rodrigues e Gazire (2015).

Uma visão longitudinal, percebe-se que o LET é uma disciplina prática, na qual a experimentação permeia todo o processo de ensino e aprendizagem, cujo foco é a possibilidade de confecção de materiais didáticos manipuláveis, ou seja, artefatos de baixo custo, como quebra-cabeças planos e jogos matemáticos.

Não menos importante, o desenvolvimento de uma sequência didática para a utilização desse material, no qual é proposto um guia de aplicação para o professor e atividades para o aluno, são características presentes nessa disciplina.⁵

4 Modelo de proposta de laboratório de ensino de trigonometria

O planejamento proposto neste artigo está direcionado ao ano de 2020, ano em que a disciplina laboratório de ensino de trigonometria foi realizada 100% online, utilizando-se as plataformas do Google Meet, Zoom, Blog da disciplina, grupo de WhatsApp e e-mail. Dessa forma, pensou-se em uma abordagem na qual a teoria e a prática permeassem toda a disciplina, sendo que, das 34 horas/aulas disponíveis, ou seja, 17 encontros, aproximadamente 64,7% (Quadro 2) da carga horária estava destinada às vivências envolvendo práticas laboratoriais sobre conteúdos trigonométricos.

⁵ Para maiores informações sobre o modelo de proposta da disciplina de Laboratório de Ensino de Trigonometria, vide, Pereira e Oliveira (2021).

Quadro 2: Síntese dos conteúdos propostos e aulas no LET

	AULAS	CONTEÚDOS PROPOSTOS
TEORIA	6 aulas	Pesquisa sobre o ensino de Trigonometria; História da Trigonometria; Ensino de Trigonometria no Brasil; Ensino de Trigonometria e os recursos didáticos; Laboratório de Ensino de Trigonometria (Papel, perspectiva, utilização); e teoria e prática de conteúdos trigonométricos para a educação básica.
PRÁTICA	11 aulas	Vivenciando duas práticas laboratoriais sobre conteúdos trigonométricos; e construção nove práticas experimentais sobre conteúdos trigonométricos pelos discentes.

Fonte: Elaborado pelos Autores

No que se refere às duas vivências de práticas laboratoriais sobre conteúdos trigonométricos foram escolhidas duas experiências: a primeira se intitulava, “Estudando razões trigonométricas por meio do Geoplano isométrico e quadrangular” e; a segunda, “Em busca do destino correto com a balhestilha”.

Essas práticas foram planejadas e confeccionadas pelo docente da disciplina, de modo a permitir aos alunos uma vivência desse momento e exemplificar os instrumentais que seriam utilizados no decorrer das práticas por eles elaboradas: guia do professor e a folha do aluno. Como a disciplina aconteceu de modo remoto, fizemos a sugestão de dois tipos de materiais, o manipulativo ou concreto, e o tecnológico. Posteriormente, será descrita com detalhes a segunda prática.

Como forma de padronização, as práticas já foram elaboradas a partir de um modelo de planejamento confeccionado pelos docentes que incluía dois instrumentais: o guia do professor e a folha do aluno. A seguir, o Quadro 3 descreve os aspectos pedagógicos contidos nos modelos.

Quadro 3: Síntese dos aspectos pedagógicos do guia do professor e da folha do aluno

ETAPAS	GUIA DO PROFESSOR	FOLHA DO ALUNO
INFORMAÇÕES GERAIS (DOCUMENTOS OFICIAIS)	<ul style="list-style-type: none"> Nome e foto do material do experimento; Unidade Temática (BNCC); Objeto de conhecimento (BNCC); Habilidades (BNCC). 	-
ASPECTOS GERAIS (TÉCNICOS)	<ul style="list-style-type: none"> Sinopse; Objetivo(s); Conhecimentos prévios Duração. 	-

<p>ASPECTOS DESCRITIVOS (EXPERIMENTAÇÃO)</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Introdução do experimento • Motivação em produzir um material para esse conteúdo; • Descrição detalhada trazendo os materiais necessários para o desenvolvimento da prática; • Preparação da prática, no qual é descrito o que deve ser organizado antes da aplicação da sua atividade (experimento), • Detalhamento das etapas para o desenvolvimento do experimento, • Variações de propostas de experimentos, Fechamento para essa prática; • Referências. 	<ul style="list-style-type: none"> • Comentários iniciais que introduzam o aluno na atividade. • Procedimentos do experimento, ou seja, a descrição do passo-a-passo, com detalhes.
---	---	---

Fonte: Elaborada pelas Autoras

Ressalta-se que esse modelo de experimento é uma adaptação e melhoramento do exposto no site da coleção Matemática Multimídia, que contém um conjunto com mais de 300 recursos educacionais de Matemática para o Ensino Médio, proposto pela Universidade Estadual de Campinas (Unicamp).

5 Integralizando uma prática de Laboratório de Ensino de Matemática às Tecnologias por meio da balhestilha

Esse momento consiste em uma reformulação de uma prática que ocorreu de maneira presencial em uma outra situação na disciplina de Laboratório de Ensino de Trigonometria, mas que devido às condições provocadas pela pandemia da Covid-19, foi necessário adaptá-la para que se pudesse ocorrer de modo remoto, sem que houvesse a perda dos seus objetivos.

O desenvolvimento dessa prática pautou-se na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) voltando-se para a etapa do Ensino Médio e fazendo uso dos seus elementos, em especial, da competência 1 específica da Matemática e suas tecnologias para o ensino médio, que trata de,

Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente (BRASIL, 2018, p. 535).

De acordo com esse documento, essa competência busca promover o envolvimento

do aluno de modo que seja instigado a investigar determinadas situações fazendo uso de diferentes conteúdos matemáticos, de modo a desenvolver o senso crítico e reflexivo frente às situações propostas.

Além disso, essa competência destaca a possibilidade de uso das tecnologias para promover experiências variadas em que o aluno possa raciocinar, conjecturar, testar, avaliar e por fim, validar suas hipóteses. Ainda pautado na BNCC, destacamos o uso de duas habilidades que foram consideradas nessa prática, sendo elas,

(EM13MAT306) Resolver e elaborar problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais, como ondas sonoras, ciclos menstruais, movimentos cíclicos, entre outros, e comparar suas representações com as funções seno e cosseno, no plano cartesiano, com ou sem apoio de aplicativos de álgebra e geometria.

(EM13MAT308) Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos (BRASIL, 2018, p. 536).

É importante ressaltar que a Trigonometria na BNCC não aparece de modo explícito, mas articulada com a Geometria. Por isso, nosso desafio é a partir de tais habilidades que foram citadas, articular com a prática desenvolvida em sala de aula, na busca de mobilizar conhecimentos trigonométricos.

A prática consiste em um experimento envolvendo uma situação-problema que faz uso de um instrumento náutico do século XVII, denominado por balhestilha, mediante o naufrágio de um navio. Assim, por meio do desenvolvimento dessa situação os alunos puderam vivenciar um cenário próximo do século XVII, cenário das grandes navegações.

Os objetivos desse experimento foram: i) vivenciar uma situação-problema, envolvendo a balhestilha e seu uso; ii) identificar conhecimentos trigonométricos que se encontram incorporados no instrumento, em especial, o conceito de tangente de um ângulo interno a um triângulo retângulo e; iii) formalizar o conceito de tangente implicado no uso do instrumento.

Para melhor execução dessa prática foi necessário que os alunos tivessem conhecimentos prévios de: noção de ângulo, arco de circunferência, ângulo central e medida de arco de circunferência. A duração do experimento consistiu em 2 horas-aula, equivalente a dois tempos de 50 minutos cada aula.

Assim, para dar início a essa prática foi preciso que o docente construísse um grupo

no seu perfil no site do GeoGebra e adicionasse à folha do aluno que possuía os comentários iniciais, os procedimentos baseados nas etapas que foram realizadas durante a aula e o experimento construído no GeoGebra envolvendo balhestilha, para que os discentes tivessem um melhor direcionamento. É importante ressaltar que também pode ser utilizado o *Classroom* para disponibilização desse material.

Partindo disso, o docente deveria realizar uma breve introdução, de modo, a relatar que entre os séculos XVI e XVII muitos instrumentos matemáticos foram surgindo com diferentes finalidades, alguns deles voltados para campos que estavam em pleno desenvolvimento nesse período, como a agrimensura, a navegação e a astronomia; e levantar alguns questionamentos do tipo: você conhece algum desses instrumentos? Você saberia como eles usavam esses instrumentos para buscarem uma possível localização? E apresentar que nesse experimento vamos entender como a balhestilha era utilizada, quais resultados são obtidos por meio dela e quais conhecimentos trigonométricos estão incorporados no instrumento.

A balhestilha foi um instrumento bastante utilizado entre os marinheiros que estavam presentes nas grandes navegações entre os séculos XV e XVII. É um instrumento simples, composto por dois elementos, o virote (vara de madeira de secção quadrada) e uma soalha, pedaço de madeira retangular com um orifício no meio com comprimento igual a $\frac{1}{4}$ do virote. Além disso, o virote recebe a graduação de uma escala angular que vai de 90° a 0° a partir do cós do virote.

Na Figura 1 é possível ver que para utilizá-la é necessário que a soalha esteja perpendicular ao virote e seja manuseada de modo a percorrê-lo. A medição é encerrada quando o observador olhando pelo cós do virote veja simultaneamente pela parte superior da soalha o astro, e pela parte inferior da soalha veja a linha do horizonte, por exemplo. Em seguida, basta ele olhar em qual grau a soalha parou, encontrando assim a distância angular do astro em relação à linha do horizonte.

Figura 1: Elementos que compõem a balhestilha

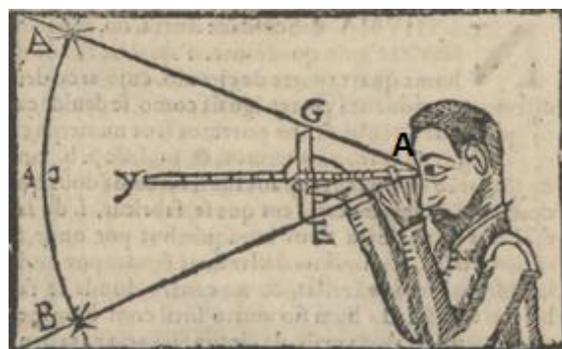


Fonte: Arquivo das Autoras

Em seguida, fazendo uso da ferramenta Zoom, o professor poderá dividir a turma em salas distintas e solicitar que cada grupo leia com atenção a situação-problema, e a partir dela comecem a manusear o instrumento no GeoGebra.⁶ Nesse momento, o professor ficará dando suporte às dúvidas sobre a forma de posicionamento e uso do instrumento.

A situação-problema se encontra na folha do aluno e consiste na seguinte maneira: o grupo deverá imaginar que estão à deriva após o navio em que se encontravam bater em um *iceberg*, e ter uma parte da sua estrutura destruída, a ponto de naufragar. Alguns minutos antes da embarcação se chocar com a montanha de gelo, um dos integrantes conseguiu jogar um bote no mar, para tentar se salvar juntamente com o grupo. Nesse momento, antes de pularem do navio, pegaram binóculos, bússola e um instrumento do século XVII, conhecido por balhestilha ou rádio astronômico (Figura 2).

Figura 2: Medição entre dois astros



Fonte: Figueiredo (1603, f. 268)

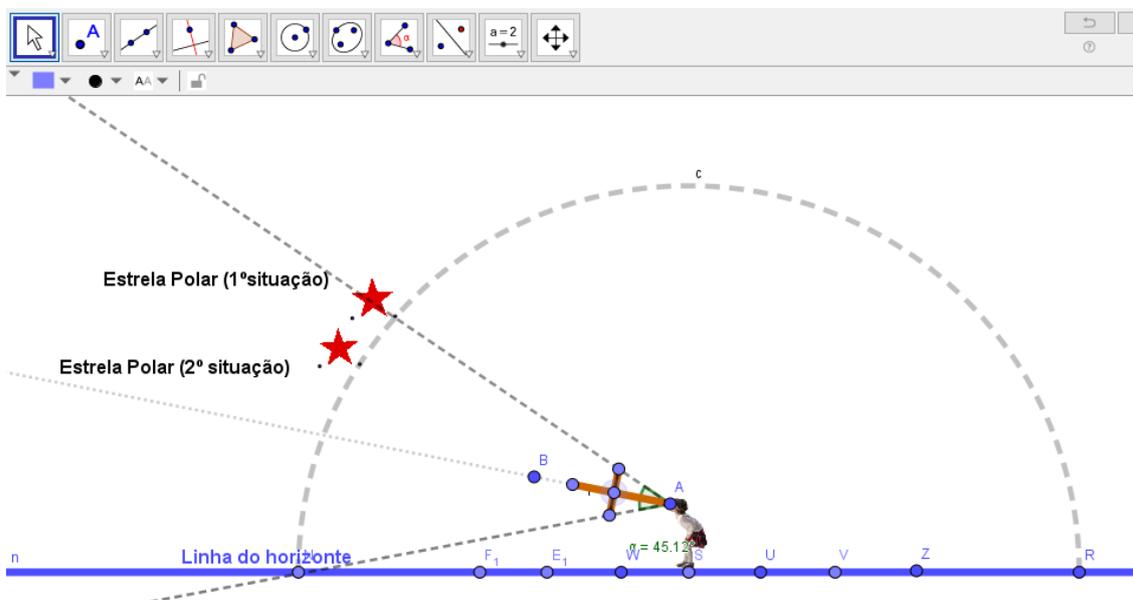
⁶ Para a utilização de *applets* no Geogebra para a aprendizagem da Trigonometria, vide Pereira e Guerra (2016).

No momento do acidente, o grupo sabia a localização atual da embarcação que seria de uma distância angular entre a linha do horizonte e a estrela Polar equivalente a 54° graus, pois o capitão havia informado a tripulação e enviado mensagem pelo rádio para a torre de monitoramento, solicitando ajuda. No entanto, após pularem do navio, ele afundou, e o bote foi levado pelas ondas do mar. Sendo quase um final de tarde, o sol já estava quase se pondo por completo, e eles não sabiam onde estavam. Nesse momento, somente as estrelas e a linha do horizonte estavam ainda visíveis.

Foi então, que um dos integrantes do grupo percebeu que havia uma balhестilha dentro do bote, e que por meio dela talvez fosse possível medir a distância angular, entre duas estrelas ou entre uma estrela e a linha do horizonte, para obter a localização atual do grupo, de forma, que pudessem identificar se estavam perto ou longe do local onde o navio havia naufragado. No entanto, somente aquele que soubesse manuseá-la poderia salvar o grupo, e eles ficaram perdidos por dois dias.

Realizando uma adaptação do meio presencial para o ambiente remoto, foram dispostas duas situações contidas na Figura 3 e na Tabela 1 envolvendo o uso da balhестilha no GeoGebra (Figura 3). Nesse momento, o professor precisa acompanhar os alunos e orientá-los que há, a primeira e segunda situação, no qual a estrela Polar aparece em pontos diferentes, correspondente a cada dia em que o grupo permaneceu perdido em alto mar. Nesse experimento subtende-se que as medições foram realizadas em dias distintos, mas em horários iguais, ou seja, após o naufrágio.

Figura 3: Medição entre um astro e a linha do horizonte



Fonte: Elaborado pelas Autoras

Então, eles terão que realizar cada uma das medidas, correspondente a cada um dos dois dias e anotar na Tabela 1. Nela contém alguns questionamentos como: quem realizou a medida, ou seja, quem manuseou o instrumento no GeoGebra; qual distância angular encontrada no instrumento; em qual ponto disposto na parte inferior foi posicionado o observador. A seguir, a Tabela 1 já se encontra preenchida com um exemplo.

Tabela 1: Informações relacionadas as medições dos dois dias com a balhastilha

Experimento	Nome de quem realizou a medição	Distância angular encontrada no instrumento	Local onde foi realizado a medição
1 ^o Situação	1 ^o Dia Jorge	43,12 ^o	Ponto S
2 ^o Situação	2 ^o Dia Mariane	51,88 ^o	Ponto E ₁

Fonte: Elaborado pelas Autoras

Na sequência, o professor deverá entrar em cada sala do Zoom e verificar que cada grupo está realizando as medições e preenchendo todas as colunas da tabela. Então, poderá reunir todos os alunos no referido aplicativo novamente e solicitar que um representante de cada equipe apresente os valores encontrados com base nos questionamentos: Suas medidas deram iguais ou diferentes em relação à medição dos outros membros do grupo? Se a resposta for não, o que pode ter colaborado para isso acontecer? Essas medições podem ser consideradas corretas? Por quê?

De acordo com o preenchimento da Tabela 1 e a situação-problema, se o navio naufragou com uma distância angular de 54^o graus, e no dia seguinte foi constatado uma distância de 43,12^o e no segundo dia 51,88^o. Pode-se afirmar ao final que o bote mesmo se afastando no primeiro dia, passou a se aproximar do local de naufrágio no segundo dia.

A seguir, dispomos de outros questionamentos que o professor pode inferir na sala: A partir dos dados preenchidos pelos grupos na tabela, quais equipes se afastaram ou se aproximaram do local de naufrágio do navio? Por que vocês acham que isso aconteceu? Será que a posição da observação não alterou algum dado na hora da medição? E o local, onde foi realizada a medição, foi mantido durante as duas medições? Esses questionamentos vão ajudar os alunos a refletirem se fizeram as medições corretas ou não.

A partir desses questionamentos, o professor deve perguntar aos alunos se eles conseguem ver o conceito de tangente no instrumento. Boa parte dos grupos dirá que não. A partir desse momento, o professor junto aos alunos deverá retirar algumas conclusões, do tipo:

- a) Qual o princípio matemático que está incorporado no instrumento que permite que as medições apresentem valores corretos? Resposta: A soalha deverá estar perpendicular ao virote.
- b) Qual triângulo a soalha forma com o virote e com o olho do observador? Resposta: Um triângulo Isósceles.
- c) O que o virote é dentro do triângulo isósceles? Resposta: O virote é altura, mediana e bissetriz do ângulo \hat{A} de acordo com a Figura 2.

Então, o professor irá fazer à seguinte conclusão: Se o triângulo tem altura perpendicular a soalha, logo o triângulo isósceles se divide em dois triângulos retângulos, tendo assim dois ângulos retos. Portanto, fazendo uso de um dos triângulos retângulos, podemos aplicar a tangente desse ângulo \hat{A} que será:

$$\text{tag } \hat{A}/2 = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}$$

Assim, para essa prática buscou-se formalizar o conceito de tangente implicado no uso do instrumento e recriar o ambiente de sala de aula com todos os detalhes possíveis para que não se perdesse a oportunidade do experimento planejado. Essa prática é flexível de modo a dar a oportunidade ao professor de agregar outros instrumentos e abordar distintos conhecimentos matemáticos.

6 Algumas considerações sobre a prática com a Balestilha e o GeoGebra

Essa prática se tornou desafiadora porque adaptar a balhastilha para ser mobilizada por meio remoto, permitindo que o aluno tenha a possibilidade de movimentar as peças do instrumento, como a soalha ao longo do virote, de maneira a colocar o personagem em determinado ponto em que ela olhe pelo cóis do virote e possa fazer coincidir a parte superior da soalha com o astro e a parte inferior da soalha com a linha do horizonte, é dar ao estudante uma visão completa do uso do instrumento.

Além disso, nesse experimento partiu-se da manipulação da balhastilha para o ensino de conhecimentos trigonométricos. Mas, durante a sua execução, os alunos perceberam conceitos geométricos articulados no próprio instrumento, dando a possibilidade assim, de mobilizar um conjunto de conhecimentos que o livro didático traz separados em capítulos distintos.

Ademais, o grupo virtual criado no GeoGebra, no qual foram adicionados os alunos

e os materiais e a ferramenta do Zoom, permitiram uma boa interação entre as equipes, de modo que eles elegeram um membro do grupo integrante que compartilhasse a tela do seu computador com os demais e a partir disso, juntos, fossem fazendo inferências sobre a situação. Isso mostra que mesmo a prática sendo realizada no meio remoto, foi possível planejar uma prática na qual eles pudessem se manifestar e expor suas observações.

7 Notas finais

Partindo do fato de que na maioria dos livros didáticos os conceitos trigonométricos aparecem separados dos conceitos geométricos, mesmo essa prática sendo planejada para o estudo de conceitos trigonométricos, em especial, a noção de tangente, a balhastilha, permite que outros conceitos matemáticos sejam abordados por meio do instrumento. Não só conhecimentos relacionados a uma área específica das ciências exatas, mas também da física, da geografia, da astronomia, entre outras.

E, assim, identificou-se que a prática de ensino de LET para a formação de professores de Matemática em caráter inicial se delimitou de maneira significativa, ao fazer uso de um instrumento histórico, destacando-se uma aliança entre TDIC e história da Matemática via IC. Com isso, semelhantemente, compreendeu-se, que essa relação entre TDIC e história da Matemática, também, poderia ser promovida através de um tratamento didático do instrumento Balestilha e sua transposição para o ambiente digital GeoGebra.

Em continuidade, aponta-se que essa articulação pode ser realizada e caracteriza-se como uma experiência significativa, mas que para tal, tem-se a necessidade de refletir sobre elementos metodológicos fundantes para oportunizar essa integração digital de instrumentos históricos. E, por fim, ver-se que o contexto vivenciado da Covid-19, exigiu adaptações do programa e do ementário da disciplina de LET da UECE, ofertada na licenciatura em Matemática, revendo e adequando o tripé planejamento, recursos e metodologias para o ensino remoto vivenciado e articulado entre TDIC e história da Matemática via IC.

Desse modo, conclui-se que na modalidade remota houve uma evidente necessidade de reconstituição de um ambiente, favorável à prática de LET. Com isso, por conta do distanciamento social e uso das ferramentas digitais para aula da disciplina no Zoom, oportunizou-se a execução desta prática de ensino de Trigonometria via cenário digital do GeoGebra on-line.

Portanto, observou-se que o ambiente do GeoGebra on-line favoreceu de maneira

eficiente o uso de ferramentas significativas para experimentar a articulação das TDIC com a história da Matemática, podendo mediante ao tratamento didático do instrumento Balestilha, manipulá-lo virtualmente para o desenvolvimento de saberes do conhecimento trigonométrico.

Referências

ALMOULOUD, S. A. A articulação entre História e Didática da Matemática: aspectos teóricos-metodológicos para o ensino. *In*: OLIVEIRA, Gerson Pastre de; ALMOULOUD, Saddo Ag; SILVA, Maria José Ferreira da; COUTINHO, Queiroz Coutinho; GAITA, Cecília (org.). **Educação Matemática: epistemologia, didática e tecnologia**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2018.

ARAÚJO, J. L.; BORBA, M. C. Construindo pesquisas coletivamente em Educação Matemática. *In*: FIORENTINI, Dario; GARNICA, Antonio Vicente Marafioti; BICUDO, Maria Aparecida Viggiani (org.). **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática**. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2004. p. 31-52.

BATISTA, A. N. S.; PEREIRA, A. C. C. A balhestilha (1603) como um instrumento matemático para o estudo de medidas na formação de professores de matemática. **Revista Acta Scientiarum, Education**, Maringá, v. 43, p. 1-12, 23 nov. 2020.

BRASIL, Ministério da Educação. **Conselho Nacional da Educação: parecer CNE/CP nº: 5/2020. Parecer CNE/CP Nº: 5/2020**. 2020.

BRASIL. **Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática, Bacharelado e Licenciatura**. Brasília: Conselho Nacional de Educação / Câmara de Educação Superior, 2001.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.

CEARÁ. **Curso de Licenciatura em Matemática - Projeto Pedagógico do Curso**. UECE: Fortaleza, 2018.

CEARÁ. **Projeto Político Pedagógico do Curso de Licenciatura em Matemática**. UECE: Fortaleza, 2007.

CEARÁ. **Projeto Político Pedagógico do Curso de Licenciatura Plena em Matemática**. UECE: Fortaleza, 1997.

EVES, H. W. **Introdução à História da Matemática**. Tradução: Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da Unicamp, 1995.

FARMER, D. W. **Grupos e Simetria**. Lisboa: Gradiva, 1996.

FIGUEIREDO, M. **Chronographia, Reportorio dos tempos, no qual se contem VI. partes, f. dos tempos: esphera, cosmographia, e arte da navegação, astrologia rustica, e dos tempos, e pronosticação dos eclipses, cometas, e sementeiras. O calendário Romano, com os eclyses ate 630. E no fim o uso, a fabrica da balhestilha, e quadrante gyometrico,**

com um tratado dos relógios. Lisboa, 1603.

FONSECA, L. S. **Aprendizagem em Trigonometria: obstáculos, sentido e mobilizações.** Aracajú: Editora UFS, 2010.

GUELLI, O. **Contando a História da Matemática: Dando Corda na Trigonometria.** São Paulo: Ática, 2003.

KENNEDY, E. S. **Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula.** Trigonometria. NCTM, 1969. Tradução Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1992.

KLEIN, F. **Matemática Elementar de um Ponto de Vista Superior: Trigonometria.** Lisboa: Sociedade Portuguesa de Matemática, 2009.

LORENZATO, S. **Laboratório de Ensino de Matemática na formação de Professores.** Campinas: Autores Associados, 2006. (Coleção Formação de Professores).

MOREY, B. **Geometria e Trigonometria na Índia e nos Países Árabes.** Rio Claro, SP: SBHMat, 2003. (Coleção História da Matemática para Professores).

MOREY, B.; MENDES, I. A. **História da matemática para professores: Conhecimentos matemáticos na época das navegações.** Natal: Sociedade Brasileira de História da Matemática, 2011.

PEREIRA, C. S. **Aprendizagem em Trigonometria no Ensino Médio.** Jundiaí: Paco, 2012.

PEREIRA, A. C. C.; SAITO, F. A reconstrução do Báculo de Petrus Ramus na interface entre história e ensino de matemática. **Cocar**, Belém, v. 13, n. 25, p. 342-372, abr. 2019.

PEREIRA, E.; GUERRA, E. A utilização de applets no Geogebra para a aprendizagem da Trigonometria no Ensino Médio. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, v. 7, n. 3, p. 53-72, 2 set. 2016.

PEREIRA, A. C. C.; OLIVEIRA, G. P. O ambiente remoto como ferramenta promotora de práticas laboratoriais no ensino de trigonometria em cursos de licenciatura em matemática. **Revista Prática Docente**, v. 6, n. 2, p. e027, 19 mai. 2021.

PINHEIRO, A. C. M.; BORGES NETO, H.; PINHEIRO, T. S. M. Quando e como utilizar o Ambiente Computacional para o Ensino de Conceitos Matemáticos: uma proposta de organização do trabalho docente. *In*: SANTOS, Alice Nayara dos; ROGÉRIO, Pedro (org.). **Currículo: diálogos possíveis.** Fortaleza: Edições UFC, 2013. p. 149-164.

RÊGO, R. G., RÊGO, R. M. **Matemática.** João Pessoa: EdUFPb, 2000.

RODRIGUES, F. C.; GAZIRE, E. S. **Laboratório de Educação Matemática na formação de Professores.** Curitiba: Appris, 2015.

SAITO, F.; PEREIRA, A. C. C. **A elaboração de atividades com um antigo instrumento matemático no instrumento matemático na interface entre história e ensino.** São Paulo: Editora Livraria da Física, 2019.

SMITH, K. **Matemática Divertida: Truques de Lógica Matemática.** Lisboa: Replicação, 1996.

SOUZA, G. C. Reflexões sobre aliança entre HM, TDIC e IM. In: SOUZA, Giselle Costa de (Org.). **Aliança entre História da Matemática e Tecnologias via Investigação Matemática: reflexões e práticas.** São Paulo. Editora Livraria da Física, 2020.

VAN BRUMMELEN, G. **Heavenly Mathematics: The Forgotten Art of Spherical Trigonometry.** Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 2013.

VAN BRUMMELEN, G. **The Mathematics of the Heavens and the Earth: The Early History of Trigonometry.** New Jersey: Princeton University, 2009.

VAN CLEAVE, J. **Matemática para Jovens.** Lisboa: Dom Quixote, 1994.