REnCiMa
Revista de Ensino de Ciências e Matemática

eISSN 2179-426X
10.26843/rencima.v12n5a17

Heranças histórico-epistemológicas da modelagem matemática financeira escolar

Gleison De Jesus Marinho Sodré[1]

Resumo: Este artigo objetiva evidenciar a problemática da transposição didática sobre a modelagem matemática financeira escolar a partir de versões dessa prática em fragmentos histórico-epistemológicos de obras de diferentes temporalidades. Para isso, descrevemos uma trajetória dessas práticas a partir de obras de diferentes contextos de produção social do cálculo de juros para o ensino, a fim de verificar a transposição didática dessa prática como produto de uma modelagem matemática específica à luz de recursos teórico-metodológicos da teoria antropológica do didático. Foram analisados fragmentos empíricos concernentes à formação inicial de professores a partir de problemáticas sobre o modelo matemático de financiamento em prestações fixas. Os resultados pontuados confirmam a hipótese da existência de uma prática social de modelagem matemática financeira que, em muitos aspectos, é preservada na instituição escolar. Esses resultados indicam possibilidades para responder, embora parcialmente, às problemáticas de interesse da teoria antropológica do didático, bem como estimulam futuras pesquisas sobre a história social de praxeologias para o ensino.

Palavras-chave: Modelagem Matemática Financeira. Transposição Didática. Teoria Antropológica do Didático.

Historical-epistemological inheritances of school financial mathematical modeling

Abstract: This article aims to highlight the problematic of the didactic transposition on the financial mathematical modeling in schools from versions of this practice in historical-epistemological fragments of works of different temporalities. For this, we describe a trajectory on the path of these practices from works from different contexts of social production of interest calculation built for teaching in order to highlight the didactic transposition of this practice as a product of a specific mathematical modeling in the light of theoretical resources -methodological aspects of the anthropological theory of the didactic. The analyzed results include empirical fragments about the initial formation of teachers from problems about the mathematical model of financing in fixed installments. Furthermore, the results found from historical-epistemological fragments of the works considered in the trajectory confirm the hypothesis of the existence of a social practice of financial mathematical modeling that in many aspects is preserved in the school institution. These results showed possibilities for answering, even partially, issues of interest to the anthropological theory of the didactic, as well as stimulating future research on the social history of praxeologies for teaching.

Keywords: Financial Mathematical Modeling. Didactic Transposition. Anthropological Theory of the Didactic.

Herencias histórico-epistemológicas de la modelización matemática financiera escolar

Resumen: Este artículo tiene como objetivo resaltar la problemática de la transposición didáctica sobre la modelación matemática financiera en las escuelas a partir de versiones

[1] Doutor em Educação Matemática. Professor da Escola de Aplicação da Universidade Federal do Pará (EA/UFPA). Pará, Brasil. ✉ profgleisoneaufpa@gmail.com https://orcid.org/0000-0002-3993-4236

Recebido em 14/04/2021 | Aceito em 30/06/2021 | Publicado em 25/08/2021

de esta práctica en fragmentos histórico-epistemológicos de obras de diferentes temporalidades. Para ello, describimos una trayectoria en la trayectoria de estas prácticas a partir de trabajos de diferentes contextos de producción social de cálculo de intereses construidos para la docencia con el fin de resaltar la transposición didáctica de esta práctica como producto de una modelación matemática específica a la luz de teóricas. recursos-aspectos metodológicos de la teoría antropológica de la didáctica. Los resultados analizados incluyen fragmentos empíricos sobre la formación inicial del profesorado a partir de cuestiones sobre el modelo matemático de financiación en cuotas fijas. Además, los resultados encontrados a partir de fragmentos histórico-epistemológicos de los trabajos considerados en la trayectoria confirman la hipótesis de la existencia de una práctica social de modelación matemática financiera que en muchos aspectos se conserva en la institución escolar. Estos resultados mostraron posibilidades para dar respuesta, aunque sea parcialmente, a cuestiones de interés para la teoría antropológica de la didáctica, así como estimular futuras investigaciones sobre la historia social de las praxeologías para la docencia.

Palabras clave: Modelado Matemático Financiero. Transposición Didáctica. Teoría Antropológica de lo Didáctico.

Introdução: modelagem matemática e a problemática da transposição institucional

Segundo Greefrath e Vorhölter (2016), parece consenso na literatura da educação matemática o reconhecimento mundial do importante papel da modelagem matemática, doravante MM, para o ensino e/ou pesquisa, pois, a depender da perspectiva adotada, há implicações sobre essa prática nas instituições de ensino e/ou pesquisa (CZOCHER, 2019).

No entanto, observamos que:

> Segundo Schukajlow, Kaiser e Stillman (2018), as pesquisas dominantes nas últimas quatro décadas concentram-se sob o enfoque cognitivo, embora com baixas contribuições com experiências empíricas para além daquelas que busquem fundamentações teóricas para as questões bem como do uso de metodologias adequadas para essas pesquisas (SODRÉ; GUERRA, 2018, p. 243).

De acordo com a perspectiva cognitivista:

> A modelagem é um processo que transforma uma questão não matemática em um problema matemático a ser resolvido. Um modelo é, então, uma correspondência conceitual entre entidades e fenômenos do mundo real e uma expressão matemática[2] (CZOCHER, 2019, p. 107).

A perspectiva cognitivista parece se assentar no pressuposto de uma questão não matemática em um problema matemático, instaurando a hipótese de que todo problema

[2] Fragmento do texto: modelling is a process that transforms a non-mathematical question into a mathematical problem to solve. A model is then a conceptual correspondence between real-world entities and phenomena and a mathematical expression.

não matemático pode ser matematizado, raciocínio nem sempre possível, sobretudo, se considerarmos o extrato de texto de Christensen, Skovsmose e Yasukawa (2008):

> Por exemplo, pode haver um local sagrado para uma população indígena que é conhecida também por ser rico em minerais. Pode ser possível analisar os custos econômicos e os benefícios da exploração mineral do sitio por meio de uma detalhada descrição matemática; No entanto, é impróprio e impossível "matematizar" o significado cultural do sitio[3] (CHRISTENSEN; SKOVSMOSE; YASUKAWA, 2008, p. 78).

Embora a perspectiva cognitivista seja dominante em diferentes pesquisas e práticas voltadas à sala de aula, assumimos a noção de MM de Sodré e Guerra (2018), Sodré (2019), Oliveira e Sodré (2021) e Sodré e Oliveira (2021), por defenderem que os “saberes não matemáticos condicionam e são condicionados pelos saberes matemáticos para a construção de um modelo matemático” (SODRÉ; OLIVEIRA, 2021, p. 39) sob os pressupostos teórico-metodológicos da Teoria Antropológica do Didático, daqui em diante TAD, que considera o estudo do homem frente às situações. Na perspectiva da TAD, a MM está

> vinculada à noção de atividade matemática desde os primeiros desenvolvimentos deste quadro de investigação, quando se assume que fazer matemática consiste essencialmente na atividade de produzir, transformar, interpretar e desenvolver modelos para ser capaz de fornecer respostas a certas questões problemáticas[4] (FLORENSA; GARCIA; SALA, 2020, p. 23).

Outras investigações sobre o ensino de MM, à luz da TAD, ampliam as descrições iniciais propostas por Chevallard (1989), em particular, as investigações de Bolea (2002), García, Gascón, Ruiz Higueras e Bosch (2006), Barquero (2009), Fonseca, Gascón e Oliveira (2014), Florensa, Garcia e Sala (2020) e Gascón e Nicolás (2021) que interpretam os processos de MM por meio de reconstruções/construções de organizações praxeológicas de complexidade crescente.

No entanto, é preciso considerar que as descrições iniciais da MM, sob a ótica da TAD e apresentadas por Chevallard (1989), cumprem as seguintes etapas:

[3] Fragmento de texto: For example, there may be a sacred site for an indigenous population that is known also to be rich in minerals. It may well be possible to analyse the economic costs and benefits of mining that site through a detailed mathematical description; however, it is both inappropriate and impossible to — mathematisell the cultural significance of the site.

[4] Fragmentos do texto: vinculada a la noción de actividad matemática desde los primeros desarrollos de este marco de investigación, cuando se asume que hacer matemáticas consiste esencialmente en la actividad de producir, transformar, interpretar y hacer evolucionar modelos matemáticos para poder aportar respuestas a ciertas cuestiones problemáticas.

> 1. Definimos o sistema que pretendemos estudar, especificando os "aspectos" **pertinentes** para o estudo que queremos fazer deste sistema, o conjunto de **variáveis** pelas quais se divide no domínio de realidade onde nos aparece.
> 2. Constrói-se então o modelo propriamente dito estabelecendo certo número de relações, R, R', R", etc., entre as variáveis consideradas na primeira etapa, sendo o modelo do sistema a ser estudado **o conjunto dessas relações**.
> 3. Trabalha-se o modelo obtido com o objetivo de produzir **conhecimentos** sobre o sistema em estudo, que tomem a forma de novas relações entre as variáveis do sistema[5] (CHEVALLARD, 1989, p. 53, grifos do autor).

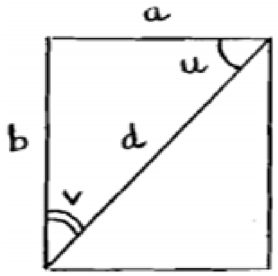
Focalizamos então a terceira etapa de processo apresentado por Chevallard (1989), que sugere o trabalho do modelo matemático para produzir novos conhecimentos sobre o domínio de realidade, tanto no sentido intramatemático quanto extramatemático. De acordo com a TAD, a noção de modelo matemático pode ser compreendida como um instrumento que permite conhecer um dado domínio de realidade (CHEVALLARD, 2005) associado, isto é, "o modelo, como sempre na atividade científica, não é a imagem mais completa possível da realidade. Ao contrário, fornece uma imagem (deliberadamente) empobrecida dela, e é isso que faz sua força"[6] (CHEVALLARD, 1989, p. 60).

Bosch, Chevallard e Gascón (2006) destacam que os modelos, longe de serem suas representações exatas sobre um domínio de realidade, podem ser boas "máquinas" para a produção de conhecimentos sobre a realidade questionada. Assim, "o modelo não é propriamente uma cópia ou uma reprodução do real, mas um **acréscimo** ao real, uma construção artificial, posta em relação de forma determinada, supostamente adequada, com o real"[7] (CHEVALLARD, 1989, p. 60, grifos do autor). Na esteira dessa construção, Chevallard (1989) aponta alguns exemplos relativos ao trabalho do modelo matemático, ao considerar os domínios de realidade da geometria (Figura 1).

---

[5] Fragmento do texto: 1. On définit le système que l'on entend étudier, en en précisant les «aspects» pertinents par rapport à l'étude que l'on veut faire de ce système, soit l'ensemble des variables par lesquelles on le découpe dans le domaine de réalité où il nous apparaît; 2. On construit alors le modèle à proprement parler en établissant un certain nombre de relations, IR, IR', IR ", etc., entre les variables prises en compte dans la première étape, le modèle du système à étudier étant l'ensemble de ces relations; 3. On «travaille» le modèle ainsi obtenu, dans le but de produire des connaissances relatives au système étudié, connaissances qui prennent la forme de nouvelles relations entre les variables du système.
[6] Fragmentos do texto: Ce modèle, comme toujours dans l'activité scientifique, n'est pas l'image la plus complète possible du réel. Tout au contraire, il en fournit une image (volontairement) appauvrie, et c'est là ce qui fait sa force.
[7] Fragmento do texto: Le modèle n'est pas à proprement parler une copie ou une reproduction du réel, mais un **ajout** au réel, une construction artificielle, mise en relation d'une manière déterminée, supposée adéquate, avec le réel.

Figura 1: Sistema de retângulos



Fonte: Chevallard (1989, p.55)

De acordo com Chevallard (1989), o sistema geométrico pode permitir a construção de modelos métricos a partir das seguintes variáveis:

a) **a** e **b:** designam as medidas dos comprimentos dos lados;
b) **d:** é a medida da diagonal;
c) **S:** indica a medida da superfície da área;
d) **(u)** e **(v):** medem os ângulos formados pelos lados e a diagonal.

A partir dessas informações, o autor evidencia algumas relações entre as variáveis compreendidas como diretas: **(1) S = a . b; (2) $d^2 = a^2 + b^2$; (3) u= arctan (b/a)** e **(4) v = arctan (a/b)** (CHEVALLARD, 1989, p.55). O autor ainda acrescenta:

> Um trabalho matemático simples no modelo nos dá um novo conhecimento (que poderia produzir dentro da teoria geométrica não "medida"): o sistema definido aqui pelas medidas (a) e (b) pode ser tanto por medidas $(\boldsymbol{d})$ e $(\boldsymbol{u})$. Foi o primeiro fato $\boldsymbol{a^2} + \boldsymbol{b^2} = \boldsymbol{d^2}$, $\left(\frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}}\right) = \boldsymbol{tg}(\boldsymbol{u})$, daí as igualdades: $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} * \boldsymbol{tg}(\boldsymbol{u})$ e $\boldsymbol{a^2} + \mathbf{a^2}\boldsymbol{tg^2}(\mathbf{u}) = \boldsymbol{a^2}\left(\mathbf{1} + \boldsymbol{tg^2}(\mathbf{u})\right) = \frac{\boldsymbol{a^2}}{\boldsymbol{cos^2}(\mathbf{u})} = \boldsymbol{d^2}$, que imediatamente temos $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{d} * \boldsymbol{Cos}\ (\boldsymbol{u})$ e $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{d} * \boldsymbol{Sen}\ (\boldsymbol{u})$[8] (CHEVALLARD, 1989, p.55, tradução nossa).

O extrato de texto parece encaminhar uma das funcionalidades do trabalho do modelo matemático construído a partir do sistema geométrico do retângulo, isto é, a capacidade de produzir novos conhecimentos ou novas relações com outros objetos de maneira articulada e integrada.

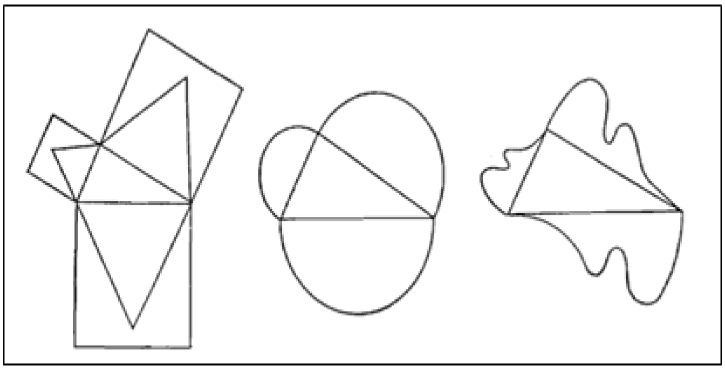
Com essa compreensão, Chevallard (1989) apresenta o teorema de Pitágoras como um modelo de triângulos retângulos, por estabelecer uma característica dos triângulos retângulos, cujas variáveis podem ser denotadas pelas medidas dos lados do triângulo

[8] Fragmento do texto: Un travail mathématique simple sur le modèle nous fournit une connaissance nouvelle (que nous aurions pu produire en demeurant dans la théorie géométrique non «métrisée») : le système, paramétré ici par les mesures a et b, pourrait l'être aussi bien par les mesures d et u. On a en effet d'abord $a^2 + b^2 = d^2$, b/a =tgu, d'où les égalités b=atgu et $a^2 + a^2tg^2u = a^2(l + tg^2u) = a^2/cos^2u = d^2$, qui donnent aussitôt a =d cosu et b = d sinu.

retângulo dadas por **a**, **b** e **c**: $C^2 = a^2 + b^2$. “Essa igualdade tem uma interpretação clássica no registro do sistema: a área do quadrado construído sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados construídos nos dois lados do ângulo reto”[9] (CHEVALLARD, 1989, p. 55, tradução nossa).

Entretanto, se considerarmos a multiplicação da igualdade $C^2 = a^2 + b^2$ por $\pi/8$, obteremos: $\frac{\pi.C^2}{8} = \frac{\pi.a^2}{8} + \frac{\pi.b^2}{8}$, cuja interpretação geométrica será: a área do semicírculo de diâmetro da hipotenusa é igual à soma das áreas dos semicírculos construídos sobre ambos os catetos do triângulo. Em última instância, “multiplicando a igualdade pitagórica por um coeficiente numérico adequado ($k.c^2 = k.a^2 + k.b^2$), poderíamos dizer o mesmo sobre triângulos equiláteros ($k = \frac{\sqrt{3}}{4}$), ou sobre quaisquer outras figuras semelhantes entre si construídas nos lados do triângulo”[10] (CHEVALLARD, 1989, p. 56, tradução nossa), como orienta a Figura 2.

Figura 2 – Sistema de retângulos



Fonte: Chevallard (1989, p. 56)

Percebemos então que diferentes objetos de ensino estudados nas instituições escolares podem constituir práticas potencialmente capazes de evidenciar, embora parcialmente, o trabalho de modelos matemáticos para a construção de novos saberes, cuja delimitação entre o que é domínio de realidade e o que é o modelo matemático associado a esse domínio é dotada de certa relatividade. Mediante o princípio metodológico fundamental (BOSCH; CHEVALLARD; GASCÓN, 2006), em que se inclui a TAD, os saberes são “hipóstase improvável” (CHEVALLARD, 2005, p. 152) cuja questão de sua

[9] Fragmento do texto: Cette égalité a une interprétation classique dans le registre du système: l'aire du carré construit sur l'hypoténuse est égale à la somme des aires des carrés construits sur les deux côtés de l'angle droit.
[10] Fragmento do texto: ultiplions-la par $\pi/8$; on obtient l'égalité $\pi c^2/8 = \pi\ a^2/8 + \pi\ b^2/8$, dont l'interprétation géométrique est immédiate: l'aire du demi-cercle de diamètre l'hypoténuse est égale à la somme des aires des demi-cercles construits sur les deux côtés de l'angle droit. Et, en multipliant l'égalité de Pythagore par un coefficient numérique adéquat ($kc^2 = ka^2 + kb^2$), on pourrait dire la même chose à propos des triangles équilatéraux ($k = \frac{\sqrt{3}}{4}$), ou de toutes autres figures semblables entre elles construites sur les côtés du triangle.

existência não está jamais inteiramente assegurada e, como tal, é sempre discutível e dependente da situação que "inclui a 'razão de ser' ou a *racionalidade* que dá sentido à atividade matemática realizada"[11] (BOSCH; CHEVALLARD; GASCÓN, 2006, p. 3, grifos dos autores, tradução nossa).

Nesta investigação, nosso foco se assenta no trabalho de modelos matemáticos de práticas sociais da matemática financeira escolar, por pressupormos que o uso, o estudo e até a criação desses modelos são ressonâncias das transposições didáticas (CHEVALLARD, 1999, 2005, 2019) de uma prática específica de MM herdadas de versões sobre esse saber presente em fragmentos histórico-epistemológicos de diferentes contextos.

Nesse sentido, parece-nos necessário, senão imperioso, encontrar possíveis respostas para alguns questionamentos, entre estes: como viviam as organizações praxeológicas concernentes ao trabalho do modelo matemático de práticas sociais da matemática financeira escolar? Que aspectos histórico-epistemológicos dessas organizações praxeológicas são preservados no ensino escolar ou na formação de professores? Que fragmentos dessa prática sofreram "erosões" ou deixaram de ser vivenciados entre os objetos de ensino?

A partir desses questionamentos, elucidamos a questão de investigação e o objetivo deste texto.

Questão de investigação e a delimitação do objetivo

Os questionamentos supracitados podem ser problematizados a partir de recursos da TAD, especificamente, por meio da problemática ecológica constitutiva da abordagem antropológica (CHEVALLARD, 1999, 2019), e, em sentido mais amplo, pela subteoria da transposição didática e/ou institucional do saber (CHEVALLARD, 2019), quando encaminha "de maneira mais geral, em toda instituição *I* que 'importa' $\mathscr{k}$ de alguma outra instituição, digamos I∞, $\mathscr{k}$ terá de se adaptar às condições que prevalecem em I e, portanto, à *ecologia* epistemológica de I"[12] (CHEVALLARD, 2019, p. 74, grifos do autor, tradução nossa).

Chevallard (2019) acrescenta que o processo de transposição didática e/ou institucional, classicamente interpretado como "copiar e colar", de um dado objeto de saber

[11] Fragmento do texto: includes the "raison d'être" or *rationale* that gives sense to the performed mathematical activity.
[12] Fragmento do texto: More generally, in every institution I which "imports" $\mathscr{k}$ from some other institution, say I∞, $\mathscr{k}$ will have to adapt to the conditions prevailing in I, and therefore to the epistemological ecology of I.

é designado de *k*. Esse conhecimento *k* que "vive" em uma instituição ***I*** sob condições e restrições dessa instituição pode ser assumido em outra instituição, aqui simbolizada por ***J***, sob diversas manifestações, mas que essa "transição" da versão de *k* de uma instituição para outra não constitui um "copiar e colar", pois "isso acarreta uma série de distorções que tornam $\mathscr{k}$ uma cópia quase viável"[13] (CHEVALLARD, 2019, p. 74, tradução nossa).

No cerne da subteoria da transposição didática e/ou institucional, Chevallard (2019) considera uma questão despretensiosa, mas bastante abrangente. Para o autor, o que é isso que se chama de k? Indaga, referindo-se ao conhecimento propriamente, com a clareza de destacar as diferentes "versões" existentes de *k* e conforme o meio institucional. Dessa forma, Chevallard (2019) ressalta dois princípios fundamentais dessa subteoria: o primeiro é que o saber escolar não se confunde com o saber acadêmico; o segundo princípio postulado é que essa diferença entre o conhecimento escolar e o acadêmico é negado por quase todas as pessoas da instituição escolar, inclusive pelos professores que devem ensinar alguma "versão" de ***k*** na referida instituição escolar.

À luz desses aspectos teóricos da TAD, a ratificação ou não de nossa hipótese supracitada nos encaminha a buscar responder a alguns questionamentos de interesse desse quadro teórico aqui parafraseado a partir de Chevallard (2019), nos seguintes termos: *De onde vem esse saber relativo ao trabalho de modelos da matemática financeira escolar? Como ocorreu sua legitimidade, epistemologicamente falando? Esse saber é viável a longo prazo? Ou deverá ser reconstruído para o ensino escolar?*

Assim, objetivamos evidenciar ressonâncias das transposições didáticas e/ou institucionais direcionadas ao trabalho de modelos matemáticos das práticas sociais da matemática financeira escolar a partir de um recorte histórico-epistemológico de algumas obras, mais precisamente de Euler (1795), Lacroix (1799) e Burat (1876), tendo em vista o indispensável papel dessas obras para a construção de versões (CHEVALLARD, 2019) de organizações praxeológicas de uma prática específica de MM financeira verificada, de algum modo, nas atuais manifestações de professores em formação inicial (SODRÉ, 2019), inclusive com vestígios em obras didáticas no ensino escolar contemporâneo, aqui entendidos como possíveis produtos de transposições didáticas e/ou institucional.

Além disso, nossos recursos teórico-metodológicos se assentam a partir da linha de investigação sugerida por Chevallard (2005), a saber:

[13] Fragmento do texto: it entails a number of distortions that make $\mathscr{k}$ into a near-copy viable.

> Tentar delimitar vantajosamente (particularmente graças a certas economias retrospectivas) a génese sócio histórica do saber designado para ser ensinado. Tomando em conta as realizações atuais, seria possível constituir uma epistemologia artificial como resumo melhorado – isto é, deixando de lado os becos sem saída, as falhas, mas reimplantando toda a riqueza de desenvolvimentos fértil e por vezes esquecidos da construção histórica do saber (CHEVALLARD, 2005, p. 54-55, tradução nossa).

Sob essa ótica, é possível encaminharmos a escolha de uma trajetória histórico-epistemológica, mediante a delimitação da gênese sócio-histórica das obras de Euler (1795), Lacroix (1799) e Burat (1876) a partir de noções do percurso de estudo e pesquisa (CHEVALLARD, 2013), daqui em diante PEP, bem como de fragmentos empíricos encaminhados por Sodré (2019).

Empiria de formação inicial de professores: o caso da Matemática Financeira

O recorte empírico aqui considerado parte das análises de Sodré (2019), por este autor destacar a prática de MM no contexto de formação inicial de professores de uma instituição pública, e abordar a reconstrução/construção do modelo matemático do problema de financiamento em prestações fixas.

O estudo de Sodré (2019) revela fortes indícios de uma problemática da MM enquanto prática dependente do condicionamento mútuo de saberes matemáticos e não matemáticos, o que perfaz, entre outros aspectos, a reconstrução e o trabalho do modelo matemático pelos professores a partir de suas manifestações frente às situações em contexto, por exemplo, financiamento de veículos.

A investigação de Sodré (2019) pautou-se em recursos teórico-metodológicos da TAD e na delimitação de dois sistemas didáticos (CHEVALLARD, 2019) auxiliares, simbolizados por $\boldsymbol{S_1\ (x_1,\ x_3,\ \wp)}$ e $\boldsymbol{S_2\ (x_2,\ x_5,\ \wp)}$, sendo $\boldsymbol{x_i}$ o conjunto formado pelos professores participantes e $\wp$ a estrutura praxeológica, aqui interpretada pelo tipo de modelo matemático do problema de financiamento em prestações fixas. A trajetória desse estudo consistiu em construir uma infraestrutura praxeológica que permitisse responder, apesar de parcialmente, além da TAD, ao problema da profissão docente de interesse sobre como ensinar MM?

Uma das problemáticas de nosso interesse acerca da compra de veículos é parafraseada a partir de dados da empiria de Sodré (2019, p. 109), com os seguintes elementos:

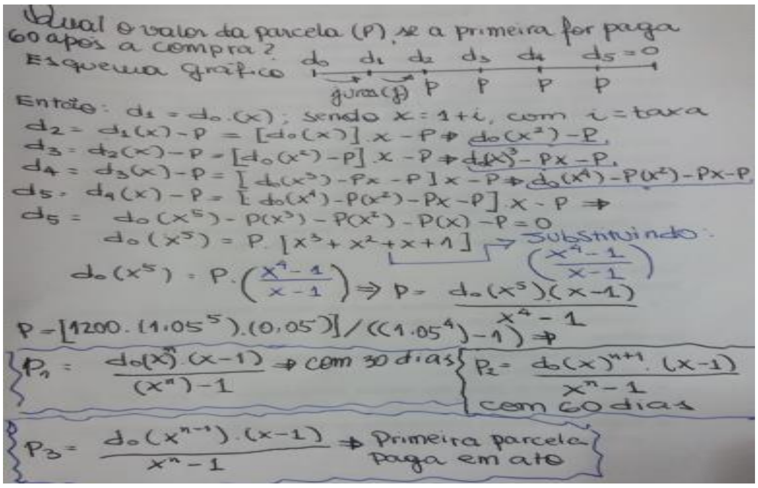
- **Situação específica 2**: (a) Valor do veículo: R$ 52.900,00; (b) Valor da entrada R$ 20.000,00; (c) Prazo do financiamento: 48 meses; (d) Taxa de juros mensal anunciada: 1,79%; (e) Valor da parcela: R$: p = 1.113,10.

A partir dessa situação específica, derivaram os seguintes questionamentos:

- **Q_{24}**: Qual o valor da parcela a ser paga, caso a primeira parcela seja paga com sessenta dias após a compra?
- **Q_{25}**: Qual o valor da parcela a ser paga, caso a primeira parcela seja paga no ato da compra?
- **Q_{26}**: Qual o valor do veículo a ser pago no plano de 48 prestações, caso ele seja quitado com um ano de antecedência?

O estudo desses questionamentos pelos professores encaminhou-os à construção de situações com matemática do tipo "micromundo"[14] tal como propõe Rieber (1996), isto é, situações com menor número de prestações fixas como destaca a figura 3.

Figura 3 – Registro do sistema didático auxiliar $\boldsymbol{S_1}$ ***(x_1, x_3, $\wp$)***



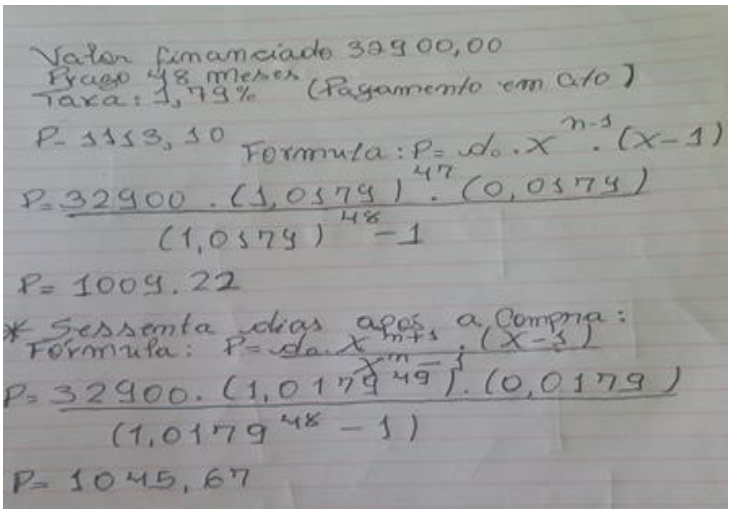
Fonte: Sodré (2019)

A figura 3 indica, além da reconstrução do modelo matemático do problema de financiamento em prestações fixas com reduzido número de prestações (cinco prestações) para simular o tipo de problema real, o trabalho do modelo revelado pelos professores que aqui descrevemos partir de elementos da figura: (I): $p_1 = \frac{d_0(x)^n \, . \, (x-1)}{x^n - 1} \rightarrow$ *prestação com trinta dias após a compra*; (II): $p_2 = \frac{d_0(x)^{n+1} \, . \, (x-1)}{x^n - 1} \rightarrow$ *prestação com sessenta dias após a compra* e (III)*:* $p_3 = \frac{d_0(x)^{n-1} \, . \, (x-1)}{x^n - 1} \rightarrow$ *prestação paga em ato da compra*.

[14] Segundo Barros (2013, p. 30): "Rieber (1996) acrescenta que um micromundo deve ter duas características: um domínio simples e coincidir com a necessidade cognitiva do aluno. A primeira remete a um domínio "simples" de comandos para o aluno interagir, apesar de o micromundo poder envolver ideias complexas. A segunda remete ao micromundo coincidir com o estado cognitivo ou afetivo do aluno, ou seja, este deve saber o que fazer no micromundo com pouco ou nenhum treinamento".

Embora a formulação de p_1 do cálculo da prestação com trinta dias após a compra não contemple objetivamente as questões **Q_{24}**, **Q_{25}** e **Q_{26}** anunciadas, essa formulação se derivou das observações dos professores para o estudo de outras situações de compra e venda. Além disso, é preciso considerar que as manifestações dos professores revelam, em nosso entendimento, parte do trabalho do modelo matemático para atender as respectivas situações específicas associadas ao cálculo da prestação para trinta dias após a compra, sessenta dias após a compra e a primeira prestação paga no ato da compra, determinante para encaminhar o tipo de problema em contexto concreto, como orienta a figura 4.

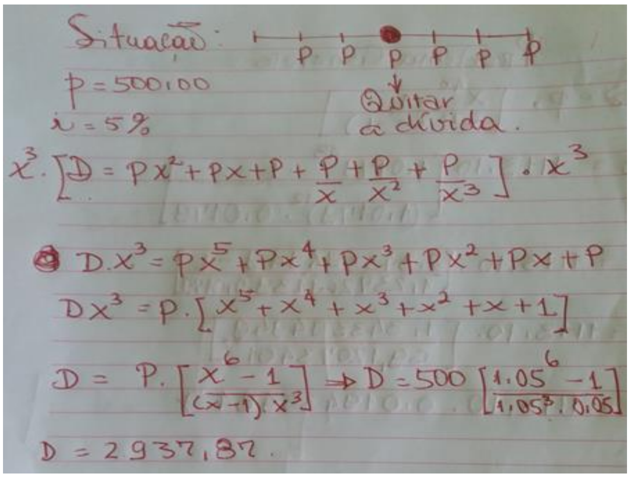
Figura 4 – Registro do sistema didático auxiliar S_1 $(x_1, x_3, \wp)$



Fonte: Sodré (2019)

A problemática **Q_{26}** (SODRÉ, 2019) foi encaminhada de maneira análoga, isto é, considerando uma situação do tipo “micromundo” (RIEBER, 1996) com seis prestações fixas mensais sob uma taxa de juros de 5% ao mês, conforme os registros da Figura 5.

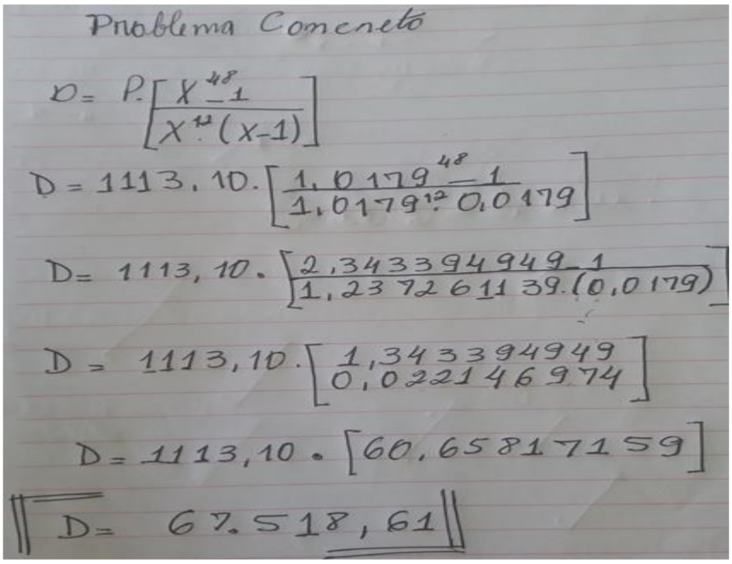
Figura 5 - Registro do sistema didático auxiliar S_2 $(x_2, x_5, \wp)$



Fonte: Sodré (2019)

Essa organização praxeológica revelada pelos professores evidencia o indispensável papel do trabalho do modelo matemático frente às situações dele derivadas, o que culminou com “o cumprimento de tarefas diferenciadas graças à transferência analógica de ‘esquemas’ adquiridos em uma prática anterior” (BOURDIEU, 2002 [1972], p. 261), como explicita o registro da Figura 6.

Figura 6 - Registro do sistema didático auxiliar ***S**₂* ***(x**₂**, x**₅**,*** ℘)



Fonte: Sodré (2019)

A dinâmica empreendida pelos sistemas didáticos auxiliares S_1 e S_2, constituídos pelos professores integrantes da empiria encaminhada por Sodré (2019), em nosso entendimento, evidencia o indispensável papel do trabalho do modelo matemático para o cálculo de prestações, além de dar sentido e significado ou, mais precisamente, uma razão de ser (BOSCH; CHEVALLARD, GASCÓN, 2006) ao estudo de polinômios como um saber estruturante, senão imprescindível, para construção/reconstrução do modelo matemático do problema de financiamento em prestações fixas apresentado por Sodré (2019), que em geral, parece destituído de uma possível “aplicação” na escola básica.

Entretanto, salientamos que:

> as práticas da álgebra escolar de polinômios, pode evidenciar potencialidades para o ensino da matemática escolar, dada à relevância histórico-epistemológica do papel dos polinômios na construção de diferentes objetos do conhecimento, e da própria instituição escolar, como o estudo de funções polinomiais, trigonométricas, logarítmicas e exponenciais (OLIVEIRA; SODRÉ, 2021, p. 9).

Quanto ao trabalho de Sodré (2019) acerca do modelo matemático de financiamento, embora destaque o uso de objetos da matemática financeira em um contexto de formação docente, é preciso considerar que grande parte das qualidades de relações (CHEVALLARD, 2005) com esse saber, pode ser, em todo caso, "incorporações" de sujeições institucionais (CHEVALLARD, 2019), aqui entendidas como ressonâncias da transposição didática e/ou institucional de organizações praxeológicas construídas/reconstruídas historicamente para o ensino, cujo caminhar pode levar a cabo "distorção, que muitas vezes cria fragmentos de saber sem precedentes e inesperados"[15] (CHEVALLARD, 2019, p. 76, tradução nossa).

De outro modo, parece-nos evidente que as qualidades de relações com objetos da matemática financeira mantêm estreita relação pela transposição didática dos fragmentos de obras, sem perder de vista, o papel determinante da construção do saber em obras de Euler (1795), Lacroix (1799) e Burat (1876). Para melhor compreensão, no item a seguir, expomos a retrospectiva metodológica em ordem decrescente dessas obras, pois a obra de Euler (1795) apresenta traços de obras próximas à sua temporalidade, incluindo as de Lacroix (1799) e Burat (1876).

Análise dos resultados: uma trajetória histórico-epistemológica

Todo PEP, enquanto dispositivo didático-metodológico, pode ser gerador de diferentes trajetórias para delimitação da gênese sócio-histórica do saber, por isso recorremos a elementos histórico-epistemológicos de recortes de obras para análises, em particular, as dos autores Euler (1795), Lacroix (1799) e Burat (1876), por pressupormos que esses recortes podem evidenciar práticas de transposições didáticas e/ou institucionais de noções da matemática financeira escolar que, inclusive, parecem se fazer presentes no sistema de ensino brasileiro, segundo as indicações da Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2017), daqui em diante BNCC, mesmo que sob o "discurso" da educação financeira.

Assim, a análise dessas obras atesta o trabalho de modelos matemáticos cujo propósito é produzir conhecimentos, conforme apresentamos a seguir.

- Obra de Burat (1876): *Traité d'algèbre élémentaire* - [Tratado de álgebra elementar]

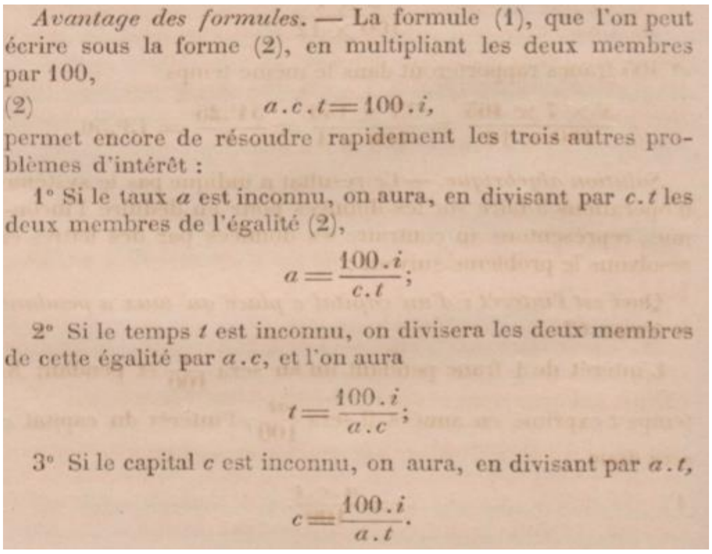
A obra de Burat (1876) está estruturada em quatro livros, subdivididos da seguinte forma: o Livro I é dedicado ao cálculo algébrico; o Livro II é direcionado à equação do

[15] Fragmento do texto: [...] *"distortion" process, which often concocts unprecedented and unanticipated pieces of knowledge ℘σ [...].*

primeiro grau e aos problemas associados; o Livro III aborda equações e desigualdades de segundo grau; e o IV e último Livro destaca progressões, logaritmos e situações financeiras.

Burat (1876) apresenta em notas preliminares as origens da álgebra e a utilidade das fórmulas, explicitando que "o objetivo da álgebra é simplificar e generalizar a resolução de problemas" (BURAT, 1876, p. 1, tradução nossa), inclusive como destaca em sua descrição (Figura 7).

Figura 7 – Trabalho do modelo matemático sobre o cálculo de juros



Avantage des formules. — La formule (1), que l'on peut écrire sous la forme (2), en multipliant les deux membres par 100,

(2) $$a.c.t = 100.i,$$

permet encore de résoudre rapidement les trois autres problèmes d'intérêt :

1° Si le taux a est inconnu, on aura, en divisant par $c.t$ les deux membres de l'égalité (2),

$$a = \frac{100.i}{c.t};$$

2° Si le temps t est inconnu, on divisera les deux membres de cette égalité par $a.c$, et l'on aura

$$t = \frac{100.i}{a.c};$$

3° Si le capital c est inconnu, on aura, en divisant par $a.t$,

$$c = \frac{100.i}{a.t}.$$

Fonte: Burat (1876, p. 4)

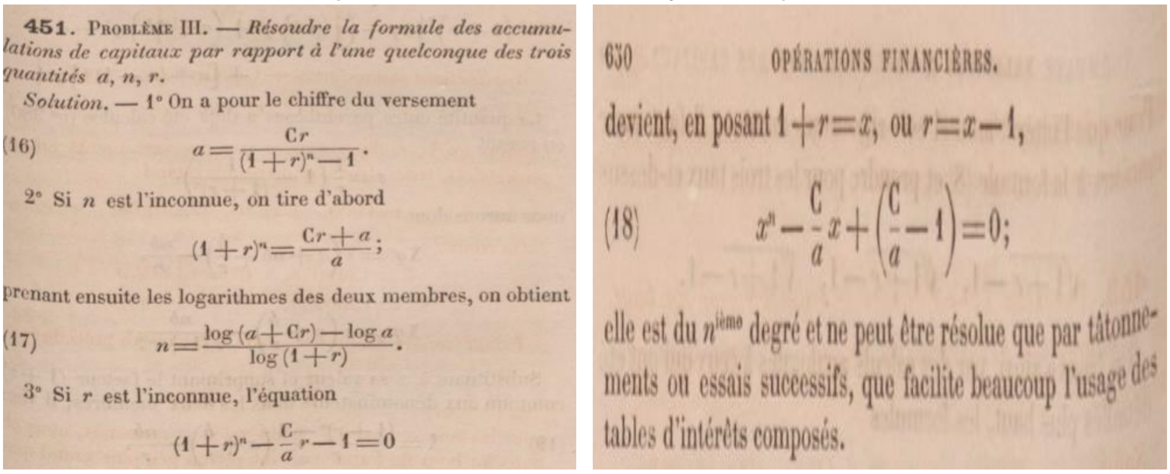
O recorte da obra de Burat (1876) aponta elementos de generalização das seguintes fórmulas:

Fórmula (1) - $\left[\boldsymbol{i} = \frac{\boldsymbol{a.c.t}}{\boldsymbol{100}}\right]$ explicitada para o trabalho do modelo matemático que encaminha a construção/reconstrução da fórmula (2) descrita por: ***a. c. t = 100 . i***. Assim, o autor reconhece a vantagem dessas fórmulas, nos seguintes casos: 1º: Se a taxa ***a*** for desconhecida, teremos ***c*** e ***t*** dividindo os dois membros da igualdade (2): $a = \frac{100\,.i}{c.t}$; 2º: Se o tempo ***t*** for desconhecido, dividiremos os dois membros desta igualdade por ***a*** e ***c***, e dado por: $t = \frac{100\,.i}{a.c}$ e 3º: Se o capital ***C*** for desconhecido, teremos, dividindo por ***a*** e ***t***: $c = \frac{100\,.i}{a.t}$.

Após essa generalização, Burat (1876, p. 2, tradução nossa) explicita que "essas duas *fórmulas* indicam com grande concisão a tabela de cálculos a serem feitos para resolver imediatamente todas as questões do mesmo tipo". Além disso, e de nosso interesse, Burat (1876) parece deixar evidente o que temos assumido pela noção do trabalho do modelo matemático que pode ser interpretado pela construção/reconstrução das fórmulas que somente em contextos assumem a funcionalidade de modelos matemáticos, isto é, suas variáveis são dotadas de sentidos e significados dependendo do tipo de contexto concreto considerado.

Essa organização praxeológica do trabalho do modelo matemático parece buscar, mas não somente, a ergonomia do saber a partir do uso de fórmulas, conforme observamos na Figura 8.

Figura 8: Fórmula de acumulação de capitais


451. PROBLÈME III. — *Résoudre la formule des accumulations de capitaux par rapport à l'une quelconque des trois quantités a, n, r.*

Solution. — 1° On a pour le chiffre du versement

(16) $$a = \frac{Cr}{(1+r)^n - 1}.$$

2° Si n est l'inconnue, on tire d'abord

$$(1+r)^n = \frac{Cr + a}{a};$$

prenant ensuite les logarithmes des deux membres, on obtient

(17) $$n = \frac{\log(a + Cr) - \log a}{\log(1+r)}.$$

3° Si r est l'inconnue, l'équation

$$(1+r)^n - \frac{C}{a}r - 1 = 0$$

650 OPÉRATIONS FINANCIÈRES.

devient, en posant $1 + r = x$, ou $r = x - 1$,

(18) $$x^n - \frac{C}{a}x + \left(\frac{C}{a} - 1\right) = 0;$$

elle est du $n^{ième}$ degré et ne peut être résolue que par tâtonnements ou essais successifs, que facilite beaucoup l'usage des tables d'intérêts composés.

Fonte: Burat (1876, p. 649-650)

Dentre os vários aspectos abordados por Burat (1876) no trabalho do modelo matemático da fórmula de acumulação de capitais (**Problema III** - Figura 8), descrita por $\left[a = \frac{Cr}{(1+r)^{n} - 1}\right]$, há o explícito uso dos logaritmos como parte da técnica para o cálculo do período (n) dado por: $\left[(1+r)^n = \frac{Cr+a}{a}\right] \Rightarrow \left[n = \frac{log(a+Cr) - \log(a)}{\log(1+r)}\right]$. Essa manifestação objetiva do autor parece evidenciar o uso do método de *prostaférese* que consistia em "transformar" multiplicações em adições, por exemplo, aqui interpretado pela dialética da contradição antigo/novo anunciada por Chevallard (2005), cuja dinâmica de construção do saber deve evidenciar-se "*com duas caras contraditórias entre si*" (CHEVALLARD, 2005, p.77, grifos do autor, tradução nossa).

Além disso, Burat (1876) recorre a noções de substituição de variáveis na descrição das operações financeiras ao atribuir (**1 + r) = x ou r = (x – 1)** (*Opérations Finanières*, Figura 8), talvez motivado pela ergonomia e praticidade para o uso do modelo matemático expresso por simbologias que nos faz lembrar as equações polinomiais da empiria de Sodré (2019).

É preciso considerarmos que a noção de substituição de variáveis, inclusive presente no ensino escolar, pode ser interpretada pela noção *paramatemática* explicitada por Chevallard (2005), enquanto noções ferramentais para a construção de saberes sem se constituírem objetos de ensino. Isto é, são "*objetos de saberes auxiliares*, necessários para o ensino (e aprendizagem) dos objetos matemáticos propriamente ditos. Devem ser "aprendidos" (ou melhor, conhecidos), mas não são ensinados (segundo um planejamento de ensino das noções matemáticas)" (CHEVALLARD, 2005, p.59-60, grifos do autor, tradução nossa), porém indispensáveis para a construção do saber.

Sob essa compreensão, a obra de Lacroix (1799) acerca de questões relacionadas aos juros do dinheiro, parece caminhar no sentido do trabalho de modelos matemáticos, como podemos conferir:

- Obra de Lacroix (1799): *Elémens d'Algèbre* - [Elementos de álgebra]

Em sua obra, Lacroix (1799) enfatiza vários objetos de saberes que se aproximam das ideias reveladas por Burat (1876), ao incluir temáticas como progressões aritméticas e geométricas, logaritmos e situações relacionadas a juros de capitais e, talvez por conta disso, a estruturação das organizações praxeológicas Burat (1876) mantenha certa similaridade com as de Lacroix (1799), no sentido da articulação e integração dos objetos de saberes, cujo propósito é o seu uso em situações, inclusive relativas ao cálculo de juros, conforme Figura 9.

Figura 9: Fórmula de juros compostos

La seconde, connoissant a, A et n, trouver r, conduit au taux d'intérêt par le moyen de la somme primitive, de celle qui a été remboursée, et du temps qu'a duré le placement; on a dans ce cas $1+r=\sqrt[n]{\frac{A}{a}}$.

La troisième, connoissant A, r et n, trouver a, et pour laquelle il vient $a=\frac{A}{(1+r)^n}$, a pour objet de déterminer le capital qu'il faut placer pour avoir droit, après un nombre n d'années, à une somme A.

La quatrième, connoissant A, a et r, trouver n, ne peut se résoudre que par les logarithmes (229, 244). En prenant celui de chaque membre de l'équation proposée, il vient $lA=la+nl(1+r)$, d'où $n=\frac{lA-la}{l(1+r)}$. Par cette dernière, on trouve dans combien d'années le capital a doit avoir produit une somme A.

Ainsi, en désignant chaque paiement par a, le premier paiement qui a lieu $n-1$ années avant l'expiration du dernier terme, rapporté à cette époque, vaut nécessairement $a(1+r)^{n-1}$; le second, rapporté à la même époque, ne vaut que $a(1+r)^{n-2}$; le troisième..... $a(1+r)^{n-3}$, et ainsi des autres jusqu'au dernier, qui n'a que la valeur a. Mais d'un autre côté, la somme prêtée étant représentée par A, vaudra entre les mains de l'emprunteur, après n années, un capital $A(1+r)^n$, qui devra être égal à toutes les avances réunies que le prêteur a reçues de lui; on aura donc

$$A(1+r)^n=a(1+r)^{n-1}+a(1+r)^{n-2}+a(1+r)^{n-3}\ldots+a,$$

ou, en prenant la somme de la progression que forme le second membre,

$$A(1+r)^n=\frac{a[(1+r)^n-1]}{r},$$

Fonte: Lacroix (1799, p. 295-297)

O recorte da obra de Lacroix (1799) (Figura 9) parece-nos explicitar o trabalho do modelo matemático quanto ao cálculo de juros compostos, mais precisamente, ao destacar a partir da teoria de progressões, a construção do modelo matemático para o cálculo de prestações fixas, conforme a descrição do autor: $\boldsymbol{A.(1+r)^n = a.\left[\frac{(1+r)^n-1}{r}\right]}$ (LACROIX, 1799, p. 297).

Essa estruturação apresentada por Lacroix (1799) revela certa similaridade com a reconstrução do modelo matemático evidenciado na Figura 3: $\boldsymbol{d_0}.(\boldsymbol{1}+\boldsymbol{i})^{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{p_1}.\left[\frac{(\boldsymbol{1}+\boldsymbol{i})^{\boldsymbol{n}}-\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{i}}\right]$. Se considerarmos **x = (1 + i)**, teremos: $\boldsymbol{d_0}.(\boldsymbol{x})^{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{p_1}.\left[\frac{\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{n}}-\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{1}}\right]$, cuja reconstrução algébrica pode culminar na estrutura da Figura 3: $\boldsymbol{p_1} = \left[\frac{\boldsymbol{d_0}.(\boldsymbol{x})^{\boldsymbol{n}}.(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{1})}{(\boldsymbol{x})^{\boldsymbol{n}}-\boldsymbol{1}}\right]$ ⇒ *Cálculo da prestação fixa a ser paga com trinta dias após a compra.*

Além disso, as noções de cálculo de juros, associado às progressões e ao uso de logaritmos presentes em fragmentos da obra de Lacroix (1799) para o cálculo de variáveis do modelo matemático da situação de juros compostos, parecem ser reflexos da obra de Euler (1795). Talvez, isso seja em virtude da aplicação desses saberes e, não menos importante, por serem organizações praxeológicas criadas para responder às problemáticas dos laboriosos cálculos aritméticos com variadas motivações, desde as da astronomia até as de instituições comerciais, e por envolverem a operação de produto entre dois fatores a ser reduzida para a operação elementar de adição, verificada também nos tipos de problemas do cálculo de juros, como podemos conferir a seguir.

- Obra de Euler (1795): *Élémens d' algèbre* - [Elementos de álgebra]

Os fragmentos sobre o cálculo de juros na obra de Euler (1795) são apresentados ao final da terceira seção, em que há o estudo de relações e proporções, em particular, as proporções aritméticas e proporções geométricas como introdução às progressões aritméticas e geométricas, direcionamento adverso aos fragmentos encontrados nas obras de Lacroix (1799) e de Burat (1876).

Além disso, Euler (1795) reconhece que nas proporções geométricas se assenta

> O fundamento da regra de três tão celebrada na aritmética; porque o que procuramos nesta regra? Supomos três números dados e procuramos um quarto que está com eles em proporção geométrica; de modo que o primeiro está para o segundo como o terceiro está para o quarto[16] (EULER, 1795, p. 375, tradução nossa).

Especificamente sobre o cálculo de juros, Euler (1795) ratifica o papel da regra de três na estruturação da organização praxeológica do cálculo de juros. “Portanto, nada mais

[16] Fragmento do texto: le fondement de cette réglé de trois si célébré dans l'arithmétique; car que cherche -t-on dans cette réglé ? On suppose trois nombres donnés, & on en cherche un quatrième qui soit avec ceux -là en proportion géométrique ; de façon que le premier soit au second comme le troisième est au quatrième.

fácil do que calcular os juros sobre qualquer capital: basta dizer, seguindo a regra de três: 100 dá 5; o que dará o capital proposto?” (EULER, 1795, p. 431, tradução nossa), informação presente também em fragmentos da obra de Lacroix (1799).

Ressaltamos o importante papel da regra de três na estruturação das praxeologias do cálculo de juros simples e compostos reconhecido por Euler (1795) e por Berthoud-Fabry (1829). Este último autor assume claramente o uso da regra de três enquanto prática que permite a MM financeira, inclusive para a reconstrução/construção do modelo matemático da situação de juros compostos, como verificamos na Figura 10.

Figura 10: Fórmula de juros compostos a partir da regra de três[17]

—395. On appelle intérêts *composés* ou *cumulés*, les intérêts ajoutés chaque année au capital, pour porter intérêt l'année suivante; c'est ce que l'on appelle prendre les intérêts des intérêts.

Voici la formule algébrique qui peut servir de règle générale pour trouver les intérêts composés.

Soit le capital $=$ a; le taux de l'intérêt $= \frac{n}{m}$; le nombre d'années $=$ t; on aura au bout de la 1.re année $a + \frac{an}{m} = \frac{a(m+n)}{m}$.

Envisageant $\frac{a(m+n)}{m}$ comme un nouveau capital, et faisant cette règle de trois : a donne $\frac{a(m+n)}{m}$, combien donnera $\frac{a(m+n)}{m}$, on aura $\frac{a(m+n)^2}{m^2}$ pour la 2.de année, et par conséquent $\frac{a(m+n)^t}{m^t}$ pour t d'années.

Soit donc le capital a $=$ fr. 6000; l'intérêt $\frac{n}{m} = \frac{1}{20}$; le nombre d'années t $=$ 4; on aura au bout de la 4.e année : $\frac{6000 \times (20+1)^4}{20^4} = \frac{6000 \times 21^4}{20^4} = \frac{6000 \times 194481}{160000} = \frac{6 \times 194481}{160} = \frac{3 \times 194481}{80} = \frac{583443}{80} =$ fr. 7293. 03,75.

- 395. Juros *compostos* ou *cumulativos* são os juros adicionados anualmente ao capital, para incorrer juros no ano seguinte; isso é chamado de tomar os juros sobre juros.

Aqui está a fórmula algébrica que pode ser usada como regra geral para encontrar juros compostos.

Seja o capital = a; a taxa de juros = $\frac{n}{m}$; o número de anos = t; no final de um ano: a + $\frac{a.n}{m} = \frac{a(m+n)}{m}$.

Considerando $\frac{a(m+n)}{m}$ como o novo capital e tomando a regra de três: sendo $\frac{a(m+n)}{m}$, quanto dará de $\frac{a(m+n)}{m}$. Teremos então $\frac{a.(m+n)^2}{m^2}$ ao final de dois anos, e por consequência $\frac{a.(m+n)^t}{m^t}$, ao final de t anos.

Então seja o capital a = fr. 6000; a taxa de juros $\frac{n}{m} = \frac{1}{20}$; o período de 4 anos. Teremos no final de 4 anos: $\frac{6000\,x\,(20+1)^4}{20^4} = \frac{6000\,x\,(21)^4}{20^4} = \frac{6000\,x\,194481}{160000} = \frac{6\,x\,194481}{160} = \frac{3\,x\,194481}{80} = \frac{583443}{80} = fr.7293.03{,}75$

Fonte: Berthoud-Fabry (1829, p. 163, tradução dos autores)

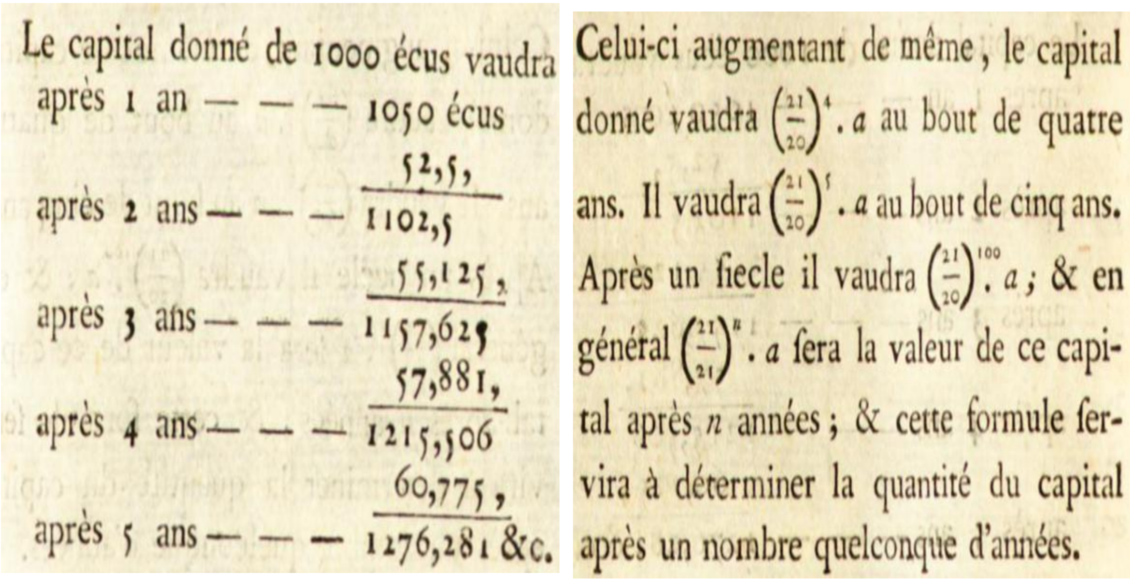
No referido recorte, sem perder de vista os saberes auxiliares, ou seja, os *paramatemático* (CHEVALLARD, 2005) recorridos pelo autor, verificamos a estruturação do saber na seguinte ordem: (a) Apresentação da definição de juros compostos; (b) A fórmula geral para enfrentar o tipo de situação de juros compostos; (c) Reconstrução do modelo matemático frente ao seu uso uma situação particular com dados potencialmente reais e (d) O explícito uso da regra de três na estruturação do modelo matemático para o cálculo de juros compostos.

Nesse caminhar, fragmentos da obra de Euler (1795, p. 431, tradução nossa) revelam a construção de noções de juros compostos ao acrescentar que “não vamos parar nesses cálculos de juros simples, a fim de passarmos a calcular os juros sobre os juros

[17] Tradução nossa dos registros da Figura 10.

antecipadamente”[18], especificamente ao recorrer pela transição entre o numérico e o algébrico a partir de exemplos calculados anualmente, durante cinco anos, como demonstra a Figura 11.

Figura 11: Transição do numérico-algébrico de juros compostos



Le capital donné de 1000 écus vaudra
après 1 an — — — 1050 écus
52,5,
après 2 ans — — — 1102,5
55,125,
après 3 ans — — — 1157,625
57,881,
après 4 ans — — — 1215,506
60,775,
après 5 ans — — — 1276,281 &c.

Celui-ci augmentant de même, le capital donné vaudra $\left(\frac{21}{20}\right)^4 . a$ au bout de quatre ans. Il vaudra $\left(\frac{21}{20}\right)^5 . a$ au bout de cinq ans. Après un ſiecle il vaudra $\left(\frac{21}{20}\right)^{100} . a$; & en général $\left(\frac{21}{21}\right)^n . a$ ſera la valeur de ce capital après n années ; & cette formule ſervira à déterminer la quantité du capital après un nombre quelconque d'années.

Fonte: Euler (1795, p. 433-434)

O fragmento da obra de Euler (1795) (Figura 11) revela alguns aspectos na estruturação transpositiva do saber, tais como, exemplificação por meio de uma situação específica - Dado um capital de 1000 écus aplicado a 5%, teremos:

$$1 \text{ ano} \Rightarrow 1050 \text{ écus}$$
$$2 \text{ anos} \Rightarrow (1050 + 52{,}5) = 1102{,}5$$
$$3 \text{ anos} \Rightarrow (1102{,}5 + 55{,}125) = 1157{,}625$$

Esse procedimento encaminhado por Euler (1795) é estruturado sob o argumento de que “como esse cálculo não leva muito tempo para resultar em frações, usaremos frações decimais, mas para aumentá-las além dos milésimos de ecu, já que as partes menores não são consideradas aqui”[19] (EULER, 1795, p. 433, tradução nossa) e, com isso, o mesmo

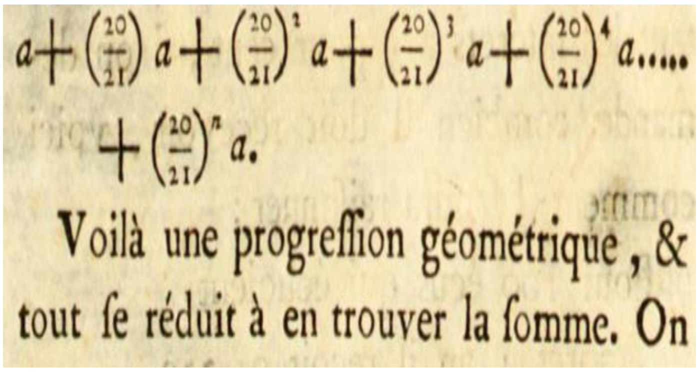
[18] Fragmento do texto: Nous ne nous arrêterons pas à ces calculs de l’intérêt simple , afin de passer auîïî-tôt au calcul de Vintérêt sur intérêt.
[19] Fragmento do texto: Comme ce calcul ne tarde pas à conduire à des fractions, nous nous servirons des fractions décimales, mais fans les pousser plus loin que jufqu’aux millièmes parties d’un écu, vu que des parties plus petites n’entrent pas ici en considération.

destaca a generalização do modelo matemático a partir de um dado capital simbolizado por $\boldsymbol{a}$ (Figura 11), sob as condições de 5% em um período qualquer de $\boldsymbol{n}$ anos, quando assim expressa: $\left[\left(\frac{21}{20}\right)^{n} . \, a\right]$.

A introdução do modelo matemático generalizado por Euler (1795) é orientada sob o argumento de redução dos esforços do cálculo a ser realizado, isto é, “você pode continuar da mesma maneira por quantos anos quiser; mas quando o número de anos é muito grande, o cálculo torna-se longo e enfadonho; aqui está como podemos encurtá-lo”[20] (EULER, 1795, p. 433, tradução nossa).

Além dessas observações, Euler (1795) destaca possíveis articulações e integrações com a soma dos termos de uma progressão geométrica, isto é, “aqui está uma progressão geométrica, e tudo se reduz a encontrar a soma dela”[21] (EULER, 1795, p. 450, tradução nossa), como orienta a Figura 12.

Figura 12: Do modelo de juros compostos a soma dos termos de uma progressão geométrica



$$a + \left(\frac{20}{21}\right) a + \left(\frac{20}{21}\right)^2 a + \left(\frac{20}{21}\right)^3 a + \left(\frac{20}{21}\right)^4 a \ldots + \left(\frac{20}{21}\right)^n a.$$

Voilà une progreffion géométrique, & tout fe réduit à en trouver la fomme. On

Fonte: Euler (1795, p. 450)

O trabalho do modelo matemático do cálculo de juros compostos evidenciado por Euler (1795) sustenta-se em fundamentos das progressões geométricas e do uso de logaritmos, este último como técnica para enfrentar problemáticas relacionadas ao cálculo de juros, conforme Figura 13, em que: “Um capital de 3452 libras a 6 por cento, quanto ele ganhará depois de 64 anos?”[22] (EULER, 1795, p. 437, tradução nossa).

[20] Fragmento do texto: On peut continuer de la même maniéré pour autant d’années qu’on voudra; mais lórfque le nombre des années est fort grand, le calcul devient long & ennuyeux j voici comment on peut l’abréger.
[21] Fragmento do texto: Voilà une progression géométrique, & tout se réduit à en trouver la somme.
[22] Fragmento do texto: Un capital de 3452 livres à 6 pour cent, de combien fera-t-il après 64 ans?

Figura 13: Uso da técnica de logaritmo no cálculo de juros

Un capital de 3452 livres à 6 pour cent, de combien ſera-t-il après 64 ans ?

Nous avons ici $a = 3452$, & $n = 64$. Donc le logarithme du capital cherché $= 64\,L.\,\frac{53}{50} + L.\,3452$, ce qu'on calcule de cette maniere :

$$
\begin{array}{rl}
L.\ 53 & = 1{,}7242759 \\
\text{ſouſtrayant } L.\ 50 & = 1{,}6989700 \\
\hline
L.\ \frac{53}{50} & = 0{,}0253059 \\
\text{multipl. par } 64 : 64\,L.\ \frac{53}{50} & = 1{,}6195776 \\
L.\ 3452 & = 3{,}5380708 \\
\hline
& \ 5{,}1576484.
\end{array}
$$

Et en prenant le nombre de ce logarithme, on trouve le capital cherché égal à 143763 livres.

Fonte: Euler (1795, p. 437)

Compreendemos que as organizações praxeológicas de Euler (1795), Lacroix (1799) e Burat (1876) revelam, além do trabalho de modelos matemáticos em diferentes temporalidades, peculiaridades comuns: articulações e integrações entre saberes, como as progressões, as regras operatórias dos logaritmos e regras de três, e ainda os objetos estruturantes de outros saberes no sentido da dialética antigo/novo (CHEVALLARD, 2005), que foram úteis, senão indispensáveis para a construção/reconstrução e/ou uso nos tipos de problemas de cálculo de situações de juros simples e composto, com o claro papel dominante dos recursos simbólicos da álgebra em amplo processo de difusão a partir do século XVI, sem perder de vista sua articulação com a aritmética e a geometria.

Considerações finais e perspectivas futuras

Este artigo objetivou evidenciar ressonâncias das transposições didáticas relacionadas com o trabalho de modelos matemáticos das práticas sociais da matemática financeira escolar a partir de um recorte histórico-epistemológico do estudo de Euler (1795), Lacroix (1799), Burat (1876), Duvillard (1787), Berthoud-Fabry (1829) e Woisard (1837), cujos fragmentos são versões do conhecimento (CHEVALLARD, 2019), alcançado por meio de organizações praxeológicas para o ensino da matemática financeira presentes, inclusive, na formação inicial de professores, conforme Sodré (2019).

Nossas análises revelaram que essas obras trazem em seu bojo, uma prática social de MM financeira específica de diferentes saberes, em particular, as progressões aritméticas e geométricas, regras operatórias dos logaritmos e a regra de três, assumidos pelos autores supracitados como fundamentos norteadores capazes de criar condições propícias à transposição didática e/ou institucional de que trata Chevallard (2019).

Nesse estudo, a MM financeira pareceu-nos dotada de uma ergonomia para o enfrentamento de outros tipos de problemas, além de possibilitar a liberação do espírito, segundo Burat (1876), para refletir sobre outras coisas. De outro modo, essas reconstruções do saber do cálculo de juros no sentido da transposição didática (CHEVALLARD, 2019) evidenciam algumas das condições que permitem sua viabilidade, ou ainda, pelo fato de o ele ser aqui interpretado como um saber “sábio” (CHEVALLARD, 2005), isto é, eleito pela cultura e/ou sociedade que o reconhecem como um saber indispensável às práticas sociais e, como tal, necessário às instituições escolares.

Esta investigação procurou responder, mesmo que parcialmente, a alguns questionamentos levantados à luz da TAD, parafraseados nos seguintes termos: *De onde vem esse saber relativo ao trabalho de modelos da matemática financeira escolar? Como ocorreu sua legitimidade, epistemologicamente falando? Esse saber é viável a longo prazo? Ou deverá ser reconstruído para o ensino escolar?* (CHEVALLARD, 2019).

A trajetória histórico-epistemológica da MM financeira a partir do recorte das referidas obras apontou algumas respostas a esses questionamentos, pois essa prática de MM que inclui o uso de objetos matemáticos em problemas do comércio parece ter sua delimitação pela prática social comercial. Não é por acaso que o próprio número de Euler, simbolizado por $e = 2{,}7182...$, pode ser interpretado como produto das práticas sociais ligadas ao cálculo de juros cujo desdobramento parece potencialmente amplo em diferentes áreas do conhecimento.

A legitimidade epistemológica parece-nos fortemente condicionada pelos interesses sociais sobre o conhecimento do cálculo de juros envolvido nas transações financeiras e, com isso, reconhecido pelas instituições de ensino, por exemplo, pela escola básica, como um indispensável saber que deve ser mantido “vivo”, embora sob o discurso da educação financeira, conforme enfatiza a BNCC (BRASIL, 2017).

No que tange à possibilidade de reconstrução do objeto para o ensino, assumimos o uso de polinômios enquanto saber estratégico eleito na/para construção/reconstrução de diferentes objetos da matemática escolar ou em contextos de formação docente, segundo destacam Sodré (2019) e Oliveira e Sodré (2021), e que pode atender inclusive a dialética da contradição antigo/novo postulada por Chevallard (2005).

Assim, como parte das heranças histórico-epistemológicas das organizações praxeológicas da MM financeira para o atual ensino, destacam-se fragmentos ou “versões” de saberes, tais como: a baixa ênfase sobre o estudo de logaritmos em detrimento do estudo das funções logarítmicas, que não se confundem; o estudo de progressões aritméticas e geométricas e noções de regras de três, que parecem “padecer” do fenômeno da desarticulação “que se estende a praticamente todos os níveis do sistema de ensino de matemática”[23] (BOSCH; GARCÍA; GASCÓN; RUIZ HIGUERAS, 2006, p. 68, tradução nossa).

Nesse caminhar, observamos que vários objetos de ensino, entre estes, as proporções aritméticas e geométricas presentes na obra de Euler (1795), desapareceram na dinâmica das transposições institucionais dos programas de ensino da matemática escolar, pois “as praxeologias, de fato, envelhecem: seus componentes teóricos e tecnológicos perdem crédito e tornam-se opacos, enquanto surgem novas tecnologias que, ao contrário, colocam sob suspeita, de arcaicas, as técnicas estabelecidas”[24] (CHEVALLARD, 1999, p. 227, tradução nossa).

De qualquer modo, a trajetória histórico-epistemológica revelou que muitos dos objetos matemáticos atuais de ensino são objetos da matemática ensinada intensivamente nos séculos XVI, XVII, XVIII e até parte do século XIX, com algumas “distorções”, mas que se mantêm entre os saberes a serem ensinados nas instituições.

Em última análise, embora essa trajetória evidencie especificamente o papel dominante da regra de três na construção de diferentes saberes de interesse da escola básica, a BNCC parece não a reconhecer como elemento estruturante para construção de outros saberes, ao destacar entre algumas passagens dos objetos do conhecimento para o ensino, por exemplo, o “cálculo de porcentagens por meio de estratégias diversas, sem fazer uso da ‘regra de três’” (BRASIL, 2017, p. 300), o que percebemos ser ratificado inclusive por alguns autores de livros didáticos.

Nessa perspectiva, sentimo-nos estimulados a futuras pesquisas sobre o papel funcional da regra de três como uma indispensável técnica para a MM de objetos matemáticos de interesse do ensino escolar e mais amplamente de outras instituições, caso da matemática acadêmica.

---

[23] Fragmento do texto: que se extiende a prácticamente todos los niveles del sistema de enseñaza de las matemáticas.

[24] Fragmento do texto: Las praxeologías, de hecho, envejecen: sus componentes teóricos y tecnológicos pierden crédito y llegan a ser opacos, al tiempo que emergen nuevas tecnologías que, por contraste, ponen bajo sospecha, por arcaicas, las técnicas establecidas.

Referências

BARQUERO, B. **Ecología de la modelización matemática en la enseñanza universitaria de las matemáticas**. 2009. Tesis doctoral. Departament de Matemàtiques. Universitat Autònoma de Barcelona.

BERTHOUD-FABRY, Pierre-Frédéric. **Traité, ou cours complet d'arithmétique raisonnée**. Berne, 1829.

BOLEA, M. P. **El proceso de algebrización de organizaciones matemáticas escolares**. [Trabajo de Tesis Doctoral, Universidad de Zaragoza, 2002].

BOSCH, M.; CHEVALLARD, Y.; GASCÓN, J. Science or magic? the use of models and theories in didactics of mathematics. **Proceedings of the fourth congress of the european society for research in mathematics education**, 2006.

BOSCH, M.; GARCÍA, F. J.; GASCÓN, J.; RUIZ HIGUERAS, L. La modelización matemática y el problema de la articulación de la matemática escolar. Una propuesta desde la teoría antropológica de lo didáctico. **Educación Matemática**, v. 18, n. 2, p. 37-74, 2006.

BOURDIEU, P. **Esboço de uma teoria da prática**: precedido de três estudos de etnologia kabila. Oeiras: Celta, 2002 [1972].

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2012.

BURAT, É. **Traité d'algèbre élémentaire, à l'usage dês lycées, dês collèges et des candidats à l'école militaire de Saint-Cyr**. Paris: Librairie Classique d'Eugène Belin, (1876).

CHEVALLARD, Y. Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège. **Petit X**, vol, 19, num.19, p.43–72, 1989.

CHEVALLARD, Y. L'analise des pratiques enseignantes em théorie anthopologique du didactique, recherches em didactiques des mathematiques. **La Pensée Sauvage Éditions**, vol.19, num. 2, p.221-265, 1999.

CHEVALLARD, Y. **La transposición didáctica**: del saber sabio al saber enseñado. 2. ed. 3. Reimp. Buenos Aires: aiquegrupo editor, 2005.

CHEVALLARD, Y. Éléments de didactique du développement durable – Leçon 1*:* **Enquête codisciplinaire** *& EDD,* 2013.

CHEVALLARD, Y. Introducing the anthropological theory of the didactic: an attempt at a principled approach. **Hiroshima journal of mathematics education** – 12, p.71-114, 2019.

CRISTENSEN, O. R.; SKOVSMOSE, O.; YASUKAWA, K. The Mathematical state of worldexplorations into the characteristics of mathematical descriptions. **Alexandria - Revista de Educação em Ciências e Tecnologia**, v.1, n.1, p. 77-90, mar 2008.

CZOCHER, J. A. Precision, Priority, and Proxies in Mathematical Modelling. In.: Stillman, G. A.; Brown, J. P. (eds.), **Lines of Inquiry in Mathematical Modelling Research in Education**, ICME-13 Monographs, 2019.

DUVILLARD, Emmanuel-Etienne. **Recherches sur les rentes, les emprunts et les remboursemens**. Paris, 1787.

EULER, Léonard. **Élémens d'algèbre**. Lyon, 1795.

FLORENSA, I.; GARCÍA, F. J.; SALA, G. Condiciones para la enseñanza de la modelización matemática: estudios de caso en distintos niveles educativos. **Avances de Investigación en Educación Matemática**, 17, p.21–37, 2020.

FONSECA, C.; GASCÓN, J.; LUCAS, C. Desarrollo de un modelo epistemológico de referência en torno a la modelización funcional. **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa**, v. 17, n. 3, p. 289-318, nov. 2014.

GARCÍA, F. J.; BARQUERO, B.; FLORENSA, I.; BOSCH, M. Diseño de tareas en el marco de la teoría antropológica de lo didáctico. **Avances de Investigación en Educación Matemática**, 15, p.75-94, 2019.

GASCÓN, J.; NICOLÁS, P. Incidencia de los paradigmas didácticos sobre la investigación didáctica y la práctica docente. **Educación Matemática**, vol. 33, núm. 1, abril, 2021.

GREEFRATH, G.; VORHÖLTER, K. **Teaching and learning mathematical modelling: approaches and developments from german speaking countries**. ICME13 TOPICAL SURVEY. Cham: Springer, 2016.

LACROIX, Silvestre-François. **Élémens d'algèbre, à l'usage de l'École centrale des Quatre-Nations**. Paris, 1799.

OLIVEIRA, M. L. S.; SODRÉ, G. J. M. Traços da modelagem matemática escolar para o ensino de polinômios. **Revista Eletrônica de Educação Matemática**, Florianópolis, v. 16, p. 01-20, jan./dez. 2021.

RIEBER, L. P. Seriously considering play: designing interactive learning environments based on the blending of microworlds, simulations, and games. **Educational Technology Research & Development**, New York, v. 44, n. 2, p. 43-58, 1996.

SODRÉ, G. J. M.; GUERRA, R. B. (2018). O ciclo investigativo de modelagem matemática. **Educ. Matem. Pesq.**, São Paulo, v.20, n.3, pp. 239-262, 2018.

SODRÉ, G. J. M.; OLIVEIRA, M. L. S. O ciclo investigativo de modelagem matemática: uma transposição didática escolar. **VIDYA**, v. 41, n. 1, p. 35-57, jan. /jun., 2021 - Santa Maria, 2021.

SODRÉ, G. J. M. **Modelagem matemática escolar**: uma organização praxeológica complexa 2019. 161f. Tese (Doutorado em Educação em Ciências e Matemáticas) - Instituto de Educação Matemática e Científica, Universidade Federal do Pará, Belém.

WOISARD, J. L. **Arithmétique appliquée aux spéculations commerciales et industrielles**. Metz, 1837.