REnCiMa
Revista de Ensino de Ciências e Matemática

eISSN 2179-426X
10.26843/rencima.v12n5a25

Regra de Cramer: uma perspectiva histórica para o ensino de sistemas lineares

Kleyton Vinicyus Godoy[1]

Douglas Gonçalves Leite[2]

Resumo: A partir da História da Matemática, como um recurso metodológico para o ensino de conceitos matemáticos, o presente artigo visa abordar, o método conhecido como Regra de Cramer. Os autores se baseiam na publicação de 1750, intitulada *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques* (Introdução a análise das linhas curvas algébricas), em que Gabriel Cramer (1704-1752) discorre a respeito de curvas e equações, além de apresentar originalmente a regra utilizada para resolver sistemas lineares. Neste artigo, mantém-se a linguagem e estética matemática do período, bem como, procura-se dar um breve panorama contextual da referida obra e algumas passagens da biografia do matemático. Esta pesquisa se apoia nas classificações de Fried (2014), em que considera elementos culturais, curriculares e motivacionais para relacionar a História da Matemática e a Educação Matemática. Conclui-se que a inserção deste tema, por meio de uma perspectiva histórica, pode fornecer elementos para o professor desmistificar a visão da matemática como uma ciência pronta e acabada.

Palavras-chave: Sistemas Lineares. Gabriel Cramer. Regra de Cramer. História da Matemática. Educação Matemática.

Cramer´s Rule: a historical perspective for teaching linear systems

Abstract: Through the History of Mathematics, as a methodological resource for teaching mathematical concepts, this article aims to approach, the method known as Cramer's Rule. We based on the 1750 publication, entitled *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques* (Introduction to the analysis of algebraic curved lines), in which Gabriel Cramer (1704-1752) discourse about curves and equations, in addition to originally presenting the rule used to solve linear systems, in addition to originally presenting the rule used to solve linear systems. This article maintains the language and mathematical aesthetics of the period, as well as, give a brief contextual overview of this work and some passages from the mathematician's biography. This research is based on the classifications of Fried (2014), in which it considers cultural, curricular and motivational elements to relate History of Mathematics and Mathematics Education. We conclude that the insertion of this theme, through a historical perspective, can provide elements for the teacher to demystify the view of mathematics as a ready and finished science.

Keywords*:* Linear Systems. Gabriel Cramer. Cramer's Rule. History of Mathematics. Mathematics Education.

La Regla de Cramer: una perspectiva histórica para la enseñanza de sistemas lineales

***Resumen*:** A través de la Historia de las Matemáticas, como recurso metodológico para la enseñanza de conceptos matemáticos, este artículo tiene como objetivo abordar el método

---

[1] Doutor em Educação Matemática. Professor da Secretaria de Estado da Educação de São Paulo (SEE-SP). São Paulo. Brasil. ✉ klegodoy@gmail.com https://orcid.org/0000-0003-2590-6282
[2] Doutorando em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista (UNESP), *campus* Rio Claro. São Paulo. Brasil. ✉ douglas_rcunesp@hotmail.com https://orcid.org/0000-0002-3401-3040

Recebido em 01/04/2021 | Aceito em 14/06/2021 | Publicado em 25/08/2021

conocido como Regla de Cramer. Nos basaremos en la publicación de 1750, titulada *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques* (Introducción al análisis de líneas curvas algebraicas), en el que Gabriel Cramer (1704-1752) discute curvas y ecuaciones, además de presentar originalmente la regla utilizada para resolver sistemas lineales. En este artículo se mantiene el lenguaje y la estética matemática de la época, además de dar una breve reseña contextual de esa obra y algunos pasajes de la biografía del matemático. Esta investigación se basa en las clasificaciones de Fried (2014), en las que considera elementos culturales, curriculares y motivacionales para relacionar la Historia de las Matemáticas y la Educación Matemática. Concluimos que la inserción de este tema, a través de una perspectiva histórica, puede aportar elementos para que el profesor desmitifique la visión de la matemática como una ciencia lista y terminada.

Palabras clave: Sistemas Lineales. Gabriel Cramer. Regla de Cramer. Historia de las Matemáticas. Educación Matemática.

1 Introdução

Dentre as pesquisas em Educação Matemática que relatam a abstrusidade dos estudantes em compreender os conteúdos matemáticos, Silva e Santos (2020) mostram a realidade do baixo desempenho dos educandos na disciplina de Matemática por meio dos resultados divulgados em exames nacionais e internacionais. Dessa forma, na eminente preocupação em minimizar a dificuldade dos estudantes ao lidarem com conceitos matemáticos, a Educação Matemática tem como uma de suas finalidades, incorporar elementos de determinados procedimentos metodológicos no desenvolvimento de atividades em sala de aula.

Em meio a diversas possibilidades metodológicas, tais como: jogos matemáticos, utilização de tecnologia, resolução de problemas, etnomatemática, modelagem matemática, entre outras, iremos destacar a *História da Matemática* como um recurso metodológico para abordar tópicos em Matemática.

D'Ambrósio (1996) destaca que a utilização da História da Matemática em sala de aula, pode proporcionar a satisfação e o desejo por parte dos discentes em descobrir como foi o processo de origem e desenvolvimento dos assuntos matemáticos abordados, bem como possibilita uma compreensão da herança cultural da civilização humana por meio da investigação dos contextos, valores, crenças, hábitos, linguagens e costumes aos quais esses conceitos matemáticos foram formulados e evoluídos.

A utilização da História da matemática em sala de aula, na concepção de Mendes (2003), possibilita a construção das noções básicas dos conhecimentos matemáticos, entretanto, a investigação histórica não deve ficar somente a cargo do professor, os educandos devem participar do processo de construção dos tópicos matemáticos: “Isso significa ser necessário ao professor levantar na História da Matemática, problemas que necessitem respostas, visando assim torná-los como ponto de partida das atividades pedagógicas a serem desenvolvidas em sala de aula.” (MENDES, 2003, p. 229).

Assim sendo, é importante que, durante o processo de investigação histórica, o professor revele aos estudantes que, a ciência matemática bem como seus conceitos, é uma criação humana, fruto das necessidades humanas, e que em diversos casos, esses conhecimentos passaram por um processo de ressignificação que perpassou durante vários séculos, até culminar no modo que apresentamos e reconhecemos esses conceitos matemáticos atualmente.

Diante desse cenário, optamos por apresentar um processo de “solução” de um determinado problema matemático, a partir de uma perspectiva histórica, em que serão expostos os processos originais da resolução de sistemas lineares, a partir da obra do matemático Gabriel Cramer (1704-1752), publicada em 1750, intitulada “Introdução à Análise das Linhas Curvas Algébricas” (*Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques*). O método que denominamos como *Regra de Cramer* foi apresentado originalmente nessa publicação.

A Regra de Cramer, em geral, é um conteúdo matemático presente nos livros didáticos e que geralmente faz parte do currículo de matemática nos níveis de Ensino Médio ou Ensino Superior - apresentada como uma alternativa para resolução de sistemas lineares após o ensino de Matrizes e Determinantes. A partir disso, objetivamos a criação de um material educacional direcionado àqueles professores que procurem por trabalhos matemáticos com elementos da História da Matemática.

A resolução de sistemas lineares é um assunto com escassa difusão no cenário nacional quando se é concebido historicamente, e principalmente no que se refere à Regra de Cramer. Portanto, esclarecemos que não iremos abordar outros métodos de resoluções de sistemas lineares, como o método da adição, substituição ou outros procedimentos conhecidos.

Sousa, Sabino e Sabino (2017) apresentam em seu artigo, uma abordagem histórica e conceitual dos sistemas lineares, e relatam inicialmente que a ideia desse conceito matemático, esteve presente desde a Antiguidade por meio de papiros egípcios e tabletas babilônicas feitas de argila. Após esse breve histórico, descrevem o método chinês para resolução de sistemas lineares, escrito na obra chinesa, de autor desconhecido, intitulada *Chiu-Chang Suan-Shu* (Os Nove Capítulos da Arte da Matemática), por volta do século I da Era cristã. Posteriormente, os autores delineiam a relevância de como os conhecimentos de resolução de sistemas lineares foram importantes para o desenvolvimento da teoria das matrizes e determinantes pelo matemático Arthur Cayley (1821-1895). No decorrer do artigo, os autores comentam da introdução da notação dos determinantes, em que mencionam que Gabriel Cramer:

> apresentava resultados para matrizes de ordem n. Porém, a demonstração da regra não se encontra no livro, somente o valor das incógnitas em forma de frações, com o numerador e denominador sendo combinações dos coeficientes do sistema linear. Isto é, o que conhecemos, atualmente, por determinantes, porém com notação diferente (SOUZA, SABINO e SABINO, 2017, p.7).

Zuin e Santos (2019) têm a preocupação de relacionar História da Matemática e História da Educação Matemática, deste modo, realizam em um primeiro momento, uma abordagem histórica de como os povos babilônios, egípcios, chineses, hindus, gregos e árabes resolviam problemas relacionados a sistemas lineares. Em seguida, relatam um breve panorama do cenário brasileiro em relação às reformas educacionais no país e como essas legislações afetaram o ensino de Matemática. Por fim, apresentam exemplos de como o conteúdo de sistemas lineares eram abordados em alguns livros didáticos brasileiros. É citado que os livros *Matemática, segunda série ginasial* (1961) de Ary Quintella e *Matemática, Curso Ginasial, 2ª Série* (1959) de Osvaldo Sangiorgi, trazem métodos semelhantes aos de Cramer na discussão de um sistema linear com duas equações e duas incógnitas.

Tavares e Pereira (2013) se utilizam da História da Matemática expondo dois problemas envolvendo sistemas lineares, sendo que um deles foi adaptado da obra chinesa, *Os Nove Capítulos da Arte da Matemática*. Para solucionar estes problemas, os autores apresentam o método de resolução utilizado pelos chineses. Além de utilizar desse método prático chinês, o artigo traz uma generalização do método por meio de artifícios matemáticos e concluem que os chineses tinham uma certa noção, além dos sistemas lineares, também de matrizes e determinantes. Ao final, os autores relatam que aplicaram esses problemas e utilizaram os métodos com um grupo de discentes do 2° ano do Ensino Médio, e que tiveram resultados satisfatórios. Entretanto, não há menções a Gabriel Cramer.

Diante do exposto, nosso propósito é de que possamos ampliar estudos que utilizem a perspectiva histórica como um recurso metodológico no ensino de sistemas lineares, e consequentemente, por meio deste tema, visamos possibilitar aos professores e demais interessados, uma alternativa para utilizar elementos da História da Matemática em sala de aula.

Miguel e Miorin (2004, p.53), apontam diversas possibilidades que a utilização da História da Matemática no ensino proporciona, dentre as quais, também destacam a necessidade de elucidar “a matemática como uma criação humana” e “as razões pelas quais as pessoas fazem matemáticas”. O emprego da História da Matemática em sala de aula, conforme Miguel e Brito (1996), atua como uma alternativa para problematizações no processo de ensino e aprendizagem, assim, até mesmo o professor pode elencar informações factuais, isto é, utilizar as datas, nomes, locais e outros elementos dos personagens que contribuíram para a construção de uma determinada teoria, o que podem servir como fonte de dados para serem trabalhados com os estudantes nas aulas de matemática.

Iremos nos amparar principalmente nas justificativas de Fried (2014), que classifica que os trabalhos que buscam relacionar História da Matemática e Educação Matemática, se baseiam em uma tentativa de despertar o interesse dos estudantes pelo conteúdo, contemplando três características:

a) *tema motivacional* (designo afetivo): ocorre quando o professor insere histórias, anedotas e passagens da vida dos matemáticos. O objetivo dessas narrativas é tornar a matemática menos formal, assim, essas histórias podem ser verdadeiras ou especulativas por falta de evidências documentais. A intenção é mostrar aos educandos que, embora a Matemática seja uma ciência exata, seus criadores/personagens podem cometer erros como qualquer ser humano. Assim, partindo desse designo afetivo, a tentativa é humanizar o conteúdo matemático.

b) *tema curricular* (designo pedagógico): ocorre quando abordamos historicamente um conteúdo em sala de aula. O professor utiliza essa metodologia para proporcionar uma outra perspectiva aos estudantes sobre temas que fazem parte do currículo escolar.

c) *tema cultural* (designo cultural): ocorre quando nos propomos desmistificar a imagem da matemática como uma ciência inflexível, ou seja, apresentar aos estudantes que os conceitos matemáticos não se mantiveram lineares no decorrer do tempo, nem vistos e entendidos do mesmo modo ao longo da história. A introdução de métodos de resoluções com elementos da crença e tradição cultural de um povo ou comunidade na qual o estudante esteja inserido, também podem ser explorados pelos professores como uma possibilidade de motivação.

Reconhecemos que em muitos assuntos, ao considerarmos o rigor matemático (da época e até mesmo atual), trariam mais dúvidas aos educandos do que serviriam como suporte pedagógico e recurso metodológico para o professor. Assim posto, Fried (2014) frisa que o tratamento histórico em sala de aula pode ser adaptado, não importando se o professor segue rigorosamente a linguagem matemática do período histórico estudado, isto é, os professores devem moldar, quando necessário, os conceitos para uma linguagem e estética contemporânea, promovendo uma compreensão maior por parte dos estudantes.

Fried (2014) destaca que não há uma ordem correta para a utilização da História da Matemática no ensino. O professor é quem tem a percepção de seus educandos, logo, os professores têm a liberdade para decidirem o critério de escolha para utilizar o viés histórico em sala de aula: seja para iniciar um determinado conteúdo, ou então, utilizar para complementar e reforçar algo que já foi definido anteriormente.

Desse modo, visamos que os professores possam proporcionar aos estudantes: 1) uma aproximação a respeito de quem foi o criador da Regra de Cramer, 2) a motivação de Cramer na criação desse método, 3) a resolução de sistemas lineares utilizando o método formulado por Gabriel Cramer e 4) utilizar a linguagem e estética matemática do período.

2 Uma breve biografia de Gabriel Cramer

Figura 1: Gabriel Cramer (1704-1752)

Fonte: https://hls-dhs-dss.ch/fr/articles/025878/2005-08-17/. Acesso em: 12 mar. 2021

Visando humanizar o conteúdo matemático proposto, consideramos as ideias de Fried (2014) no que se refere ao *tema motivacional*. Posto isto, elencamos breves fatos relacionados à vida do criador da Regra de Cramer, o matemático suíço, nascido na cidade de Genebra (Figura 1).

Jean Isaac Cramer (1674-1751) e a esposa Anne Mallet (1672-1727), partiram da região da Holsácia (território alemão) para Estrasburgo (cidade francesa), até que, no início do século XVIII, se estabeleceram na cidade de Genebra, na Suíça. Durante o matrimônio, o casal teve três filhos: Jean Cramer (1701-1787), Gabriel Cramer (1704-1752), Jean Antoine Cramer (1707-1775) (GILLISPIE, 1981).

O pai e o irmão caçula de Gabriel Cramer, atuaram como médicos na cidade de Genebra; enquanto que seu outro irmão, Jean Cramer, trilhou caminho semelhante ao de Gabriel Cramer, atuando como professor de Direito, Matemática e Filosofia (GILLISPIE, 1981).

Podemos perceber que a família de Gabriel Cramer provavelmente fez parte da população nobre da cidade de Genebra. Esta condição econômica familiar, é interessante ser evidenciada aos estudantes, para que possam ter ciência de que naquele período, no cenário europeu, em geral, apenas cidadãos pertencentes à nobreza tinham condições de acesso para realizarem estudos acadêmicos.

Com dezoito anos de idade, Gabriel Cramer concluiu seus estudos defendendo uma tese relacionada à Teoria do Som, no ano de 1722. Aos vinte anos, Cramer – juntamente com outros dois candidatos – concorreu a uma vaga pela cadeira de filosofia na Academia de Calvin, em Genebra. Entretanto, a cadeira foi ocupada pelo mais experiente dos candidatos, Amédée de la Rive. Os magistrados que examinaram os candidatos, reconheceram o potencial de Cramer, e do outro jovem candidato de vinte e um anos, Giovanni Ludovico Calandrini:

> Para fazer isso, eles separaram uma cadeira de matemática da filosofia e nomearam os dois jovens candidatos para ela. Esta nomeação proporcionou aqueles homens compartilharem as funções do cargo e o salário. Também foi previsto que eles pudessem se revezar em viagens de dois ou três anos "para aperfeiçoar seus conhecimentos", desde que aquele que permanecesse em Genebra desempenhasse todas as funções e recebesse todo o pagamento. Calandrini e Cramer, chamados Castor e Pollux por seus amigos, obtiveram permissão pela inovação de usar francês em vez do latim, não para cursos *ex cátedra*, mas para recitações (...). Calandrini ensinou álgebra e astronomia; Cramer, geometria e mecânica. Em 1734, Calandrini tornou-se professor de filosofia e Cramer ocupou a cadeira de matemática. Em 1750, ele foi nomeado professor de filosofia quando Calandrini entrou no governo (GILLISPIE, 1981, p.459, tradução nossa).

Além de exercer o ofício de professor na Academia de Calvin, em Genebra, Gabriel Cramer se ocupou com outras questões além da matemática, tais como, escreveu alguns tópicos da filosofia do direito, contribuiu com ideias para melhoria da artilharia e fortificações, instruiu trabalhadores no reparo de uma catedral, se ocupou com escavações e pesquisa de arquivos (GILLISPIE, 1981).

No ano de 1750, após um longo período de trabalho árduo e exercendo diversas atividades concomitantes, Gabriel Cramer conclui sua obra de maior destaque, intitulada *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques* (Introdução a análise das linhas curvas algébricas), publicação na qual é apresentado o método de Cramer, que permite resolver sistemas lineares de infinitas incógnitas e infinitas equações.

Nos últimos dois anos de vida, as coisas não foram tão fáceis para Cramer. Gillispie (1981) relata que Gabriel Cramer sempre dispôs de boa saúde, no entanto, adoeceu por conta do acúmulo de diversas funções e excesso de trabalho. Para piorar a situação, e consequentemente as condições de saúde do matemático, durante o percurso de uma viagem, Cramer sofreu um acidente na queda da carruagem em que estava.

O matemático ficou dois meses acamado, e na busca de melhor reestabelecimento, um médico aconselhou Cramer viajar para o Sul da França. Assim, ele partiu de Genebra em 21 de Dezembro de 1751, mas, faleceu duas semanas após o início da jornada até a França, em 4 de Janeiro de 1752. (GILLISPIE, 1981). Portanto, por meio dessas situações relatadas, os professores podem comentar aos estudantes que ao mesmo tempo que Cramer publicou sua obra de maior destaque, o excesso de funções acumuladas no período, lhe custou a saúde, inclusive a vida.

3 Um breve panorama da obra Introdução a análise das linhas curvas algébricas

A obra que utilizaremos como fonte primária será uma publicação de 1750 de Gabriel Cramer. Na época o matemático era professor de Filosofia e de Matemática das Academias e Sociedades reais de Londres, Berlim, Montpellier, de Lion e da academia do Instituto de Bolonha. O objetivo da obra era analisar diversas propriedades relacionadas às chamadas linhas curvas algébricas. A publicação recebeu o nome de *Introduction à l'analyse des Lignes Courbes Algébriques*. De acordo com Dauben e Scriba (2002), esta obra de Cramer teve um amplo reconhecimento por parte da comunidade matemática no período.

Logo no primeiro capítulo, intitulado *A natureza das linhas curvas em geral e das suas Equações*, o autor traz uma série de definições e considerações a respeito daquilo que ele considera ser uma linha regular, irregular, curvas planas e curvas de dupla curvatura. Nesse tópico, uma clara referência ao trabalho *Pesquisa sobre Curvas de Dupla Curvatura* de 1731 do geômetra Alexis Clairaut (1713-1765) é apresentada por Cramer em uma nota de rodapé.

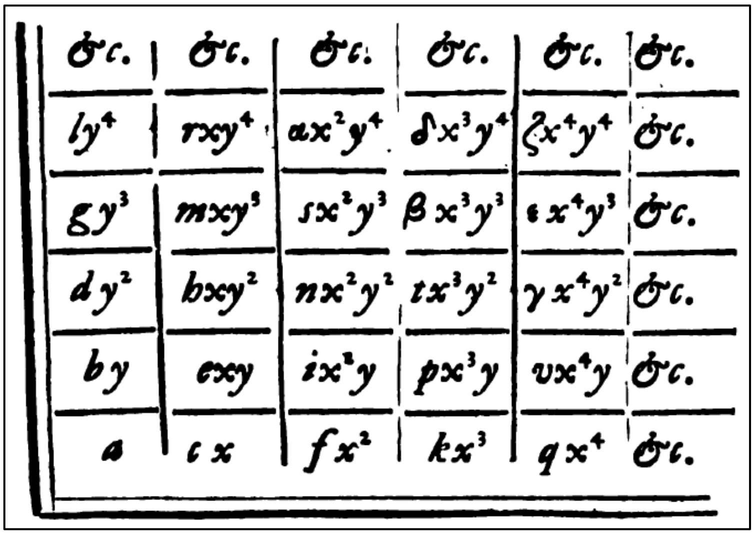
Mais adiante, Cramer continua com uma série de classificações de curvas, trabalhado com curvas transcendentais, mecânicas, entre outras. No capítulo seguinte, o autor busca expressões relacionando Equações de uma curva com relação à mudança de coordenadas.

Em seguida, no capítulo III intitulado *Sobre as Diferentes Ordens das Linhas Algébricas,* ele propõe uma classificação relacionando a potência de uma determinada expressão algébrica com uma correspondente classe de curvas:

> As diferentes linhas algébricas consideradas analiticamente divididas em diferentes ordens, segundo os graus de suas equações. Esses graus se estimam como no caso das igualdades determinadas, pelo grau do mais alto termo da equação. Mas, desde que na equação, das linhas algébricas, tendo duas indeterminadas x e y, o grau de cada termo se estima pela soma dos expoentes das potências de x e de y. Os termos que temos nas constantes, nas quais não há nem x e nem y, são do grau zero. Aqueles que possuem um x sem y ou um y sem x, mas onde essa indeterminada pode ser multiplicada por um coeficiente ou uma grandeza constante qualquer, como by ou cx, são os termos do primeiro grau. Os termos do segundo grau são aqueles onde se encontram xx, xy, ou yy. Mas x^3, xxy, xyy e y^3 são os termos do terceiro grau, x^4, x^3y, x^2y^2, xy^3 e y^4 são aqueles do quarto e assim segue-se (CRAMER, 1750, p.52, tradução nossa).

A discussão a respeito das classificações de curvas era recorrente desde o período de Descartes (1596-1650) e Newton (1643-1727). Cramer apresenta o paralelogramo de Newton (Figura 2) para representar as expressões algébricas:

Figura 2: Paralelogramo de Newton



&c.	&c.	&c.	&c.	&c.	&c.
ly^4	rxy^4	ax^2y^4	δx^3y^4	ζx^4y^4	&c.
gy^3	mxy^3	sx^2y^3	βx^3y^3	ϵx^4y^3	&c.
dy^2	bxy^2	nx^2y^2	tx^3y^2	γx^4y^2	&c.
by	exy	ix^2y	px^3y	vx^4y	&c.
a	cx	fx^2	kx^3	qx^4	&c.

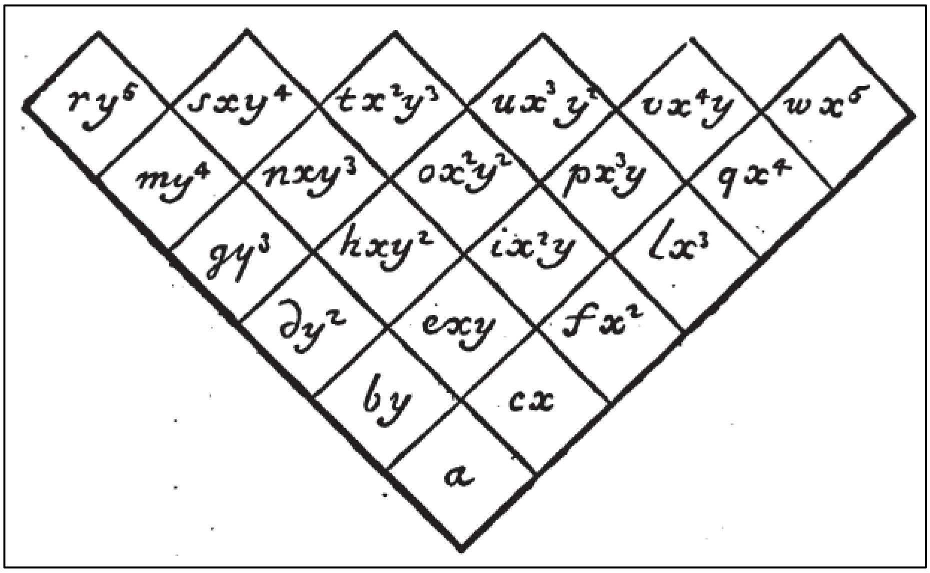
Fonte: Cramer (1750, p.55)

Cramer considera que Newton deu um maior detalhamento das categorias de expressões:

> O senhor Newton organiza os termos da equação de uma linha algébrica em um paralelogramo dividido em diversos casos, ou pequenos quadrados. Coloca em cada linha horizontal os termos onde a variável y tem o mesmo expoente, e esses expoentes aumentam de uma unidade ao longo de linha em linha. Coloca em cada coluna vertical os termos onde a indeterminada x tem o mesmo expoente, e esses expoentes crescem de uma unidade passando de uma coluna para a outra, da esquerda para a direita (....) nessa disposição os termos de um mesmo grau se encontram colocados em diagonal (...) (CRAMER, 1750, p.52, tradução nossa).

Além de trazer a proposta de organização de Newton para um conjunto de expressões, ele apresenta a sugestão de Jean Paul de Gua de Malves (1713-1786), em que é realizada uma rotação do paralelogramo de Newton, organizando as expressões em um formato triangular (Figura 3), denominado Triângulo Algébrico ou Analítico.

Figura 3: Triângulo Algébrico



Fonte: Cramer (1750, p.56)

No mesmo capítulo ele aborda a possibilidade de relação entre o grau de uma curva e a quantidade de abscissas possíveis, nessa direção, além de trabalhar o que chamamos atualmente de raízes de um polinômio, ele desenvolve o chamado *Paradoxo de Cramer,* o qual em linhas gerais, relaciona o número de interseções entre duas curvas planas, e a quantidade de pontos necessários para representar cada uma delas.

Ao estudar a possibilidade de interseções entre curvas e o envolvimento dos coeficientes das curvas, com as possíveis abscissas (raízes), em uma nota de rodapé, ele discorre a respeito de uma regra geral e suficiente para sistemas de primeiro grau, esta que se tornaria conhecida como *Regra de Cramer.* “Eu creio ter encontrado para isso, uma

Regra suficientemente cômoda e geral, quando tem um problema qualquer de equações e de desconhecidos dos quais não passam do primeiro grau. A encontraremos no Apêndice nº 1." (CRAMER, 1750, p.60, tradução nossa, grifo nosso). É interessante observarmos que Gabriel Cramer relatou que obteve um procedimento de resolução "suficientemente cômodo", pois, provavelmente se referindo ao "método da substituição":

> Quando um problema contém diversos desconhecidos, somos obrigados a formar diversas equações; então, para descobrir os valores desses desconhecidos, fazemos todos desaparecerem, menos um, que combinado com as grandezas conhecidas, o problema é determinado, uma *Equação final,* cuja resolução revela esse primeiro desconhecido, e em seguida, todos os outros. A álgebra forneceu regras para isso, cujo sucesso é infalível, contanto que tenhamos paciência para segui-las. Mas, o cálculo torna-se extremamente longo quando o número de equações e de desconhecidos é grande, e quando esses desconhecidos nas equações propostas aumentam para graus elevados. Nesse segundo caso, pelos métodos ordinários, caímos em um outro inconveniente; este é levado para equações mais compostas que não são necessárias, e que contêm raízes supérfluas (CRAMER, 1750, p.656, tradução nossa).

Com relação aos capítulos seguintes, o quarto, ele continua a trabalhar relações envolvendo interseções entre curvas, relacionando o número de pontos com o grau das expressões analisadas.

No quinto e sexto capítulo, ele analisa uma possível correspondência entre operações com coeficientes das expressões consideradas e propriedades envolvendo as abscissas de cada uma delas.

No sétimo capítulo ele traz uma série de referências como Brook Taylor (1685-1731), James Stirling (1692-1770), Willem Jacob´s Gravesande (1688-1742), e nessa parte, o trabalho do matemático se direciona ao estudo de séries. Por fim, nos demais capítulos seguintes, são realizados estudos dedicados aos ramos de determinadas curvas, bem como pontos singulares das mesmas.

Após esse trabalho amplo e precisamente organizado, a inserção de apêndices se tornou necessária pois, segundo o próprio Cramer, "o Apêndice contém três demonstrações que teriam interrompido a sequência do discurso se tivéssemos inserido onde eles são citados"*.* (CRAMER, 1750, p.XXII, tradução nossa).

Após a apresentação desse breve panorama contextualizando o que está descrito na obra, iremos abordar a Regra de Cramer conforme inserida no primeiro apêndice da publicação.

4 A Regra/O Método de Cramer (1750)

No ensino de matemática, antes de enunciarmos a Regra de Cramer, de modo geral, é abordada a Teoria das Matrizes e a Teoria dos Determinantes. É interessante apontarmos que no período em que a obra de Cramer foi publicada (1750), essas teorias ainda estavam em desenvolvimento. Além dos trabalhos de Augustin-Louis Cauchy (1789-1857), o historiador Eves (2011) relata que Arthur Cayley (1821-1895) e James Joseph Sylvester (1814-1897), na segunda metade do século XIX, foram os principais responsáveis por parte das definições e propriedades dos conceitos de matrizes e determinantes. Ou seja, os atributos que empregamos para o ensino da Regra de Cramer, foram de matemáticos posteriores a Cramer, dado que ele escreveu seu método aproximadamente 100 anos antes das definições de Teoria das Matrizes e Teoria dos Determinantes.

Deste modo, salientamos que podemos trabalhar a Regra de Cramer historicamente desde o Ensino Fundamental 2 (6° ao 9° ano), porém, não aconselhamos apresentar aos educandos mais do que duas equações e duas incógnitas, além disso, nessa faixa etária e nível de ensino, sugerimos que os sistemas lineares sejam aqueles que possuem uma única solução – Sistema Possível e Determinado (SPD). No Ensino Médio, é possível a introdução de mais uma equação e incógnita, isto é, sistemas lineares de três equações e três incógnitas.

O Método de Cramer (1750) funciona como uma fórmula para obtenção dos valores das incógnitas do sistema. O número de incógnitas deve ser equivalente ao número de equações do sistema, caso contrário, esse método não se aplica. Vale a pena comentar que Cramer não apresentou uma demonstração da Regra, apenas indicou que as fórmulas podem ser obtidas ordenando todas as combinações possíveis entre os coeficientes das incógnitas e os valores conhecidos presentes no sistema.

Cramer (1750, p.657) enuncia que “Sejam vários desconhecidos [incógnitas] z, y, x, v, e assim por diante, e tantas equações”.

Figura 4: Notação de Cramer para representar Sistemas Lineares

$$\begin{aligned}
A^1 &= Z^1 z + Y^1 y + X^1 x + V^1 v + \&c. \\
A^2 &= Z^2 z + Y^2 y + X^2 x + V^2 v + \&c. \\
A^3 &= Z^3 z + Y^3 y + X^3 x + V^3 v + \&c. \\
A^4 &= Z^4 z + Y^4 y + X^4 x + V^4 v + \&c. \\
&\&c.
\end{aligned}$$

Fonte: Cramer (1750, p.657)

Sendo:

A^1, A^2, A^3, A^4: os valores conhecidos das equações, de modo que A^1 é o valor conhecido da primeira equação, A^2 é o valor conhecido da segunda equação, e assim por diante.

z, y, x, v: as incógnitas das equações.

Z^1, Y^1, X^1, V^1: os coeficientes da primeira equação; Z^2, Y^2, X^2, V^2: os coeficientes da segunda equação; Z^3, Y^3, X^3, V^3: os coeficientes da terceira equação; Z^4, Y^4, X^4, V^4: os coeficientes da quarta equação e assim por diante.

É importante esclarecermos que para Cramer (1750), por exemplo, Z^2 não significa que Z está elevado ao quadrado, ou seja, em nada tem a ver com potenciação, mas sim, para identificar a qual equação determinado valor se refere no sistema. Lembramos que, Fried (2014) relata que adaptações podem se fazer necessárias, assim, sugerimos aos professores que desejem minimizar quaisquer adversidades por parte dos educandos com potenciação, é possível adaptar essa notação por meio de índices: Z_1, Z_2, Z_3, Z_4; Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 e assim por diante, semelhante a ideia de quando trabalhamos com matrizes e determinantes, em que os índices representam linhas e colunas.

A notação matemática usual costuma ordenar as equações em $x, y, z, w, \ldots$, entretanto, nesse caso não aconselhamos o professor fazer uma adaptação e sim apontar aos estudantes essa diferença de estética matemática daquela época em relação a notação atual. Outras duas sugestões de adaptação, dado que os discentes estão acostumados com os valores da incógnita primeiro, é deslocar o sinal de igual para depois das incógnitas; além de utilizar a chave para representar que as equações fazem parte de um sistema linear:

$$\begin{cases} Z_1z + Y_1y + X_1x = A_1 \\ Z_2z + Y_2y + X_2x = A_2 \\ Z_3z + Y_3y + X_3x = A_3 \end{cases}$$

Deste modo, recomendamos aos professores, que acharem necessário, fazer essas adaptações para o método em sala de aula com os educandos. Contudo, no artigo manteremos a notação original de Cramer (1750).

4.1 Sistemas Possíveis e Determinados (SPD)

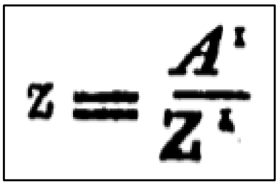
São aqueles sistemas lineares que apresentam apenas uma única solução possível. No caso de estarmos com estudantes do Ensino Médio ou Ensino Superior, podemos acrescentar que são aqueles sistemas lineares em que o determinante da matriz do sistema é diferente de zero. Vejamos alguns exemplos utilizando o Método de Cramer (1750).

- *1° caso: Uma incógnita e uma equação*

$$A^1 = Z^1 z$$

Neste caso, Cramer (1750) apresenta (Figura 4) que a obtenção do valor da incógnita z é dada por:

Figura 4: Fórmula de Cramer para sistemas de uma incógnita e uma equação



$$z = \frac{A^1}{Z^1}$$

Fonte: Cramer (1750, p.657)

Podemos reparar que neste caso, a resolução é semelhante a uma das maneiras usuais de equação de primeiro grau. Em turmas do Ensino Médio ou Ensino Superior, é importante acrescentarmos que para Cramer (1750), o resultado da incógnita é obtido pela quantidade de maneiras diferentes que podemos permutar os elementos que compõe o sistema: a quantidade de incógnitas e o número de equações, logo, nesse caso, como se trata de um sistema de uma incógnita e uma equação, $n = 1$, é equivalente dizermos que esses elementos podem ser permutados uma vez só. Ou seja, $P_1 = 1! = 1$. Frisamos que Cramer (1750) comenta que os elementos devem ser ordenados de acordo com todas as combinações possíveis, ou seja, essa notação de permutação é uma adaptação que fizemos para explicar as ideias do matemático.

Vejamos um exemplo:

$$10 = 5z$$

- z: é a incógnita deste sistema de uma equação e uma incógnita;
- 10: é o valor conhecido da equação, A^1;
- 5: é o coeficiente de z, Z^1.

Aplicando o método de Cramer (1750) para esses casos, devemos isolar a incógnita z, obtendo:

$$z = \frac{A^1}{Z^1}$$

$$z = \frac{10}{5}$$

$$z = 2$$

Logo, a única solução que satisfaz este sistema é z = 2. Em notação atual, S = {2}. Empregando a notação de matrizes e determinantes, e utilizando o exemplo acima, temos:

$$z = \frac{det([10])}{det([5])}$$

2° caso: Duas incógnitas e duas equações

$$\begin{cases} A^1 = Z^1 z + Y^1 y \\ A^2 = Z^2 z + Y^2 y \end{cases}$$

Neste caso, Cramer (1750) apresenta que para resolver um sistema deste tipo (Figura 5), podemos obter os valores de z e y do seguinte modo:

Figura 5: Fórmula de Cramer para sistemas de duas incógnitas e duas equações

$$z = \frac{A^1 Y^2 - A^2 Y^1}{Z^1 Y^2 - Z^2 Y^1}, \ \& y = \frac{Z^1 A^2 - Z^2 A^1}{Z^1 Y^2 - Z^2 Y^1}.$$

Fonte: Cramer (1750, p.657)

Retomando o que dissemos no *1º caso*, Cramer (1750) utiliza todos os arranjos possíveis com os elementos que compõe o sistema:

> A análise dessas Fórmulas fornece essa Regra Geral. O número das equações e dos desconhecidos sendo n, encontraremos o valor de cada incógnita formando n frações das quais o denominador como tendo os termos que há a partir dos diversos arranjamentos de n-coisas diferentes. Cada termo é composto de letras ZYXV et, sempre escritos na mesma ordem, mas aos quais distribuímos como expoentes, os n primeiros números variados de todas as maneiras possíveis (CRAMER, 1750, p.658, tradução nossa).

Vemos neste segundo caso que para obter os valores de z e y, temos duas equações e duas incógnitas, logo a quantidade de ordenações possíveis é dada por $n = 2$. Deste modo, a quantidade de maneiras que podemos ordenar os elementos do sistema é dado por $P_2 = 2! = 2$. Assim, os arranjos entre os elementos do sistema é o resultado da ordenação de *1 2* (posição 1 e posição 2) e *2 1* (posição 2 e posição 1). No caso, a posição 1 se refere à primeira equação e a posição 2 refere-se à segunda equação.

Em relação ao denominador e o numerador das frações para obter cada uma das incógnitas, Cramer (1750) descreve que:

> O denominador comum sendo também formado, teremos o valor de z dando para esse denominador o numerador que se forma modificando, em todos os termos, Z em A. E o valor é a fração que tem o mesmo denominador e para o numerador, a quantidade que resulta quando mudamos Y em A, em todos os termos do denominador. E encontraremos uma maneira semelhante para seus outros desconhecidos (CRAMER, 1750, p.658, tradução nossa).

Ou seja, podemos observar que no denominador das frações, não utiliza os valores conhecidos para realizar as combinações possíveis entre os elementos, mas somente os valores dos coeficientes de z e y. Na notação atual, esse denominador representa o resultado obtido pelo determinante da matriz do sistema linear. Enquanto que no numerador da fração, o matemático ordena os valores conhecidos com os valores dos coeficientes de z e y. Para obter o valor de z, Cramer (1750) arranja as ordenações possíveis entre o valor conhecido e os coeficientes de y. Enquanto que, para obter o valor de y, ele repete o mesmo processo, contudo, arranja as ordenações possíveis entre o valor conhecido e os coeficientes de z.

Essas ordenações são obtidas substituindo os valores conhecidos, respeitando a posição da incógnita a qual deseja-se encontrar o valor. No caso de obtermos o valor de z, os valores conhecidos A^1 e A^2 ocupam, respectivamente, as posições de Z^1 e Z^2. De modo semelhante, para obtermos o valor de y, os valores conhecidos A^1 e A^2 ocupam, respectivamente, as posições de Y^2 e Y^1. Notem que o processo é exatamente como utilizado nos dias de hoje, a única diferença é de que estes arranjos são realizados e obtidos por meio de determinantes.

Outro apontamento dado por Cramer (1750), é dito em relação aos sinais destas ordenações, podendo ser positivos (+) ou negativos (–), de acordo com a quantidade de *desarranjos* das combinações possíveis entre os elementos do sistema:

> Quando um expoente é seguido no mesmo termo, mediatamente ou imediatamente, de um expoente menor que ele, eu chamarei de um Desarranjo. Que contamos, para cada termo, o númerro de desarranjos: se ele é par ou nulo, o termo terá o sinal +; se ele é impar, o termo terá o sinal –. Por ex. no termo $Z^1Y^2V^3$ não há algum desarranjo: esse termo terá então o sinal +. O termo $Z^3Y^1X^2$ tem também o sinal +, pois ele tem dois desarranjos, 3 antes de 1 e 3 antes de 2. Mas o termo $Z^3Y^2X^1$ que tem três desarranjos, 3 antes de 2, 3 antes de 1 e 2 antes de 1, terá o sinal – (CRAMER, 1750, p.658, tradução nossa).

Para uma quantidade *par* de desarranjos, a ordenação tem sinal positivo, enquanto que, para uma quantidade *ímpar* de desarranjos, a ordenação tem sinal negativo. Vejamos alguns casos: a) A^1Y^2, observem que nesse caso a quantidade de desarranjos é igual a 0 (par), dado que a posição 1 vem antes da posição 2, logo, o sinal dessa combinação deve ser positivo; b) A^2Y^1, analisem que nesta ordenação a quantidade de desarranjos é igual a 1 (ímpar), visto que a posição 2 vem antes da posição 1, logo, o sinal dessa ordenação deve ser negativo.

Desse modo, podemos sugerir aos educadores a possibilidade de utilizar a explicação de Cramer (1750), em relação aos desarranjos posicionais, transpondo para a notação atual dos conceitos matemáticos presentes na Regra de Cramer: o porquê dos sinais dos determinantes ora são positivos ou negativos.

Dado o sistema abaixo, vamos obter os valores de z e y:

$$\begin{cases} 14 = 4z - 2y \\ 12 = 6z - 6y \end{cases}$$

- z e y: são as incógnitas do sistema;
- 14 e 12: A^1 e A^2 (valores conhecidos, 1ª e 2ª equação);
- 4 e 6: Z^1 e Z^2 (coeficientes de z, 1ª e 2ª equação);
- -2 e -6: Y^1 e Y^2 (coeficientes de y, 1ª e 2ª equação).

Temos então de encontrar os valores de z e y:

$$z = \frac{A^1Y^2 - A^2Y^1}{Z^1Y^2 - Z^2Y^1}$$

$$z = \frac{A^1Y^2 - A^2Y^1}{Z^1Y^2 - Z^2Y^1} = \frac{14.(-6) - (12.6)}{4.(-6) - (6.(-2))} = \frac{-84 - (72)}{-24 - (-12)} = \frac{-84 - 72}{-24 + 12} = \frac{-156}{-12} = 13$$

$$y = \frac{Z^1A^2 - Z^2A^1}{Z^1Y^2 - Z^2Y^1}$$

$$y = \frac{Z^1A^2 - Z^2A^1}{Z^1Y^2 - Z^2Y^1} = \frac{4.12 - (6.12)}{4.(-6) - (6.(-2))} = \frac{48 - (72)}{-24 - (-12)} = \frac{48 - 72}{-24 + 12} = \frac{-24}{-12} = 2$$

Logo, a única solução que satisfaz este sistema é $z = 13$ e $y = 2$. Em notação atual, S = {13,2}.

Nas modalidades de Ensino Médio e Ensino Superior, o professor pode em um determinado momento, mostrar a relação dessa fórmula de Cramer (1750) com a maneira que reconhecemos a Regra atualmente. Utilizando o exemplo apresentado no 2° caso, empregar o método de Cramer (1750), seria o mesmo que nos dias de hoje, resolver:

$$z = \frac{det\left(\begin{bmatrix} 14 & -2 \\ 12 & -6 \end{bmatrix}\right)}{det\left(\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 6 & -6 \end{bmatrix}\right)}$$

$$y = \frac{det\left(\begin{bmatrix} 4 & 14 \\ 6 & 12 \end{bmatrix}\right)}{det\left(\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 6 & -6 \end{bmatrix}\right)}$$

- *3° caso: Três incógnitas e três equações*

$$\begin{cases} A^1 = Z^1z + Y^1y + X^1x \\ A^2 = Z^2z + Y^2y + X^2x \\ A^3 = Z^3z + Y^3y + X^3x \end{cases}$$

Cramer (1750) apresenta que para resolver um sistema deste tipo (Figura 6), podemos obter os valores de z, y e x do seguinte modo:

Figura 6: Fórmula de Cramer para sistemas de três incógnitas e três equações

$$z = \frac{A^1Y^2X^3 - A^1Y^3X^2 - A^2Y^1X^3 + A^2Y^3X^1 + A^3Y^1X^2 - A^3Y^2X^1}{Z^1Y^2X^3 - Z^1Y^3X^2 - Z^2Y^1X^3 + Z^2Y^3X^1 + Z^3Y^1X^2 - Z^3Y^2X^1}$$

$$y = \frac{Z^1A^2X^3 - Z^1A^3X^2 - Z^2A^1X^3 + Z^2A^3X^1 + Z^3A^1X^2 - Z^3A^2X^1}{Z^1Y^2X^3 - Z^1Y^3X^2 - Z^2Y^1X^3 + Z^2Y^3X^1 + Z^3Y^1X^2 - Z^3Y^2X^1}$$

$$x = \frac{Z^1Y^2A^3 - Z^1Y^3A^2 - Z^2Y^1A^3 + Z^2Y^3A^1 + Z^3Y^1A^2 - Z^3Y^2A^1}{Z^1Y^2X^3 - Z^1Y^3X^2 - Z^2Y^1X^3 + Z^2Y^3X^1 + Z^3Y^1X^2 - Z^3Y^2X^1}$$

Fonte: Cramer (1750, p.657)

Como já relatado anteriormente, Cramer (1750) utiliza todos os arranjos possíveis com os elementos que compõe o sistema, vemos nesse terceiro caso que para obter os valores de z, y e x, temos três equações e três incógnitas, logo a quantidade de ordenações possíveis é dada por $n = 3$. Deste modo, a quantidade de maneiras que podemos ordenar os elementos do sistema é dado por $P_3 = 3! = 6$. Assim, as combinações entre os elementos do sistema é o resultado da ordenação de *1 2 3* (posição 1, posição 2 e posição 3), *1 3 2* (posição 1, posição 3 e posição 2), *2 1 3*; *2 3 1*; *3 1 2* e *3 2 1*. No caso, a posição 1 se refere à primeira equação, a posição 2 refere-se à segunda equação e por fim, a posição 3 é referente à terceira equação.

A mesma regra vale para formar os numeradores e os denominadores das frações. No numerador, um arranjo entre os valores conhecidos com os coeficientes das incógnitas, enquanto que no denominador, o arranjo se dá somente entre os coeficientes das incógnitas. Em relação ao sinal das ordenações, vamos analisar algumas combinações e verificar a quantidade de desarranjos possíveis. Neste caso $n = 3$, então precisamos olhar as três combinações possíveis em cada ordenação, vejamos três exemplos:

a) $A^1Y^2X^3$: olhemos primeiro A^1Y^2 (posição 1 vem antes da posição 2), depois A^1X^3 (posição 1 vem antes da posição 3) e finalmente, Y^2X^3 (posição 2 vem antes da posição 3); podemos observar que em nenhuma dessas ordenações há um desarranjo, ou seja, a quantidade de desarranjos nessa combinação é igual a 0 (par), logo, o sinal deve ser positivo;

b) $A^1Y^3X^2$: temos A^1Y^3 (posição 1 vem antes da posição 3), A^1X^2 (posição 1 vem antes da posição 2) e Y^3X^2 (posição 3 antes da posição 2 – isto é um desarranjo, pois, pensando em uma ordenação a posição 2 deveria vir antes da posição 3); assim, a quantidade de desarranjos neste caso é igual a 1 (ímpar), logo, o sinal deve ser negativo;

c) $A^2Y^3X^1$: A^2Y^3 (sem desarranjo, 2 antes do 3), A^2X^1 (desarranjo, o "correto" seria posição 1 antes da posição 2) e Y^3X^1 (desarranjo, o "correto" seria 1 antes do 3), assim, nessa combinação a quantidade de desarranjos é igual a 2 (par), logo, o sinal deve ser positivo.

Dado o sistema abaixo de três equações e três incógnitas:

$$\begin{cases} 8 = z + 2y + x \\ 3 = 2z - y + x \\ 2 = 3z + y - x \end{cases}$$

Temos:

- z, y e x: são as incógnitas do sistema;
- 8, 3 e 2: A^1, A^2 e A^3;
- 1, 2 e 3: Z^1, Z^2 e Z^3;
- 2, -1 e 1: Y^1, Y^2 e Y^3;
- 1, 1 e -1: X^1, X^2 e X^3.

Utilizando o Método de Cramer (1750), vamos obter os valores de z, y e x:

$$z = \frac{A^1Y^2X^3 - A^1Y^3X^2 - A^2Y^1X^3 + A^2Y^3X^1 + A^3Y^1X^2 - A^3Y^2X^1}{Z^1Y^2X^3 - Z^1Y^3X^2 - Z^2Y^1X^3 + Z^2Y^3X^1 + Z^3Y^1X^2 - Z^3Y^2X^1}$$

$$z = \frac{\big(8.(-1).(-1)\big) - (8.1.1) - \big(3.2.(-1)\big) + (3.1.1) + (2.2.1) - (2.(-1).1)}{\big(1.(-1).(-1)\big) - (1.1.1) - \big(2.2.(-1)\big) + (2.1.1) + (3.2.1) - (3.(-1).1)} = \frac{15}{15} = 1$$

$$y = \frac{Z^1A^2X^3 - Z^1A^3X^2 - Z^2A^1X^3 + Z^2A^3X^1 + Z^3A^1X^2 - Z^3A^2X^1}{Z^1Y^2X^3 - Z^1Y^3X^2 - Z^2Y^1X^3 + Z^2Y^3X^1 + Z^3Y^1X^2 - Z^3Y^2X^1}$$

$$y = \frac{\big(1.3.(-1)\big) - (1.2.1) - \big(2.8.(-1)\big) + (2.2.1) + (3.8.1) - (3.3.1)}{\big(1.(-1).(-1)\big) - (1.1.1) - \big(2.2.(-1)\big) + (2.1.1) + (3.2.1) - (3.(-1).1)} = \frac{30}{15} = 2$$

$$x = \frac{Z^1Y^2A^3 - Z^1Y^3A^2 - Z^2Y^1A^3 + Z^2Y^3A^1 + Z^3Y^1A^2 - Z^3Y^2A^1}{Z^1Y^2X^3 - Z^1Y^3X^2 - Z^2Y^1X^3 + Z^2Y^3X^1 + Z^3Y^1X^2 - Z^3Y^2X^1}$$

$$x = \frac{(1.(-1).2) - (1.1.3) - (2.2.2) + (2.1.8) + (3.2.3) - (3.(-1).8)}{\big(1.(-1).(-1)\big) - (1.1.1) - \big(2.2.(-1)\big) + (2.1.1) + (3.2.1) - (3.(-1).1)} = \frac{45}{15} = 3$$

Logo, a única solução que satisfaz este sistema é $z = 1$, $y = 2$ e $x = 3$. Em notação atual, S = {1,2,3}.

Novamente, salientamos que o professor pode relacionar o método de Cramer (1750) se valendo dos conceitos de matrizes e determinantes. Logo, utilizando o exemplo apresentado no 3° caso, empregar o método de Cramer (1750), seria o mesmo que nos dias de hoje, resolver:

$$z = \frac{det\left(\begin{bmatrix} 8 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}\right)}{det\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}\right)}$$

$$y = \frac{det\left(\begin{bmatrix} 1 & 8 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}\right)}{det\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}\right)}$$

$$x = \frac{det\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}\right)}{det\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}\right)}$$

Por fim, recomendamos aos professores construírem juntamente com os discentes, as fórmulas de Cramer (1750) para $n = 1$, $n = 2$ e $n = 3$. Além disso, no 2º e 3º caso, podem abordar o porquê dos sinais ora positivos, ora negativos, explicando os desarranjos posicionais. Não recomendamos abordar o Método de Cramer (1750), por meio dessa perspectiva histórica, para $n = 4$ ou mais, dado que o número de ordenações aumenta consideravelmente. Por exemplo, se $n = 4$, teremos $P_4 = 4! = 24$ ordenações possíveis em cada numerador e denominador; se $n = 5$, a quantidade de arranjos possíveis é de $P_5 = 5! = 120$; se $n = 6$, temos $P_6 = 6! = 720$ ordenações; e assim por diante.

No Ensino Superior, uma proposta de atividade que poderia ser realizada com os estudantes, seria utilizar a Regra de Cramer (1750) para obter as soluções de um sistema linear de $n = 4$, ou seja, quatro incógnitas e quatro equações.

4.2 Sistemas Possíveis e Indeterminados (SPI) e Sistemas Impossíveis (SI)

Cramer (1750) acrescenta que no geral, os sistemas têm uma determinada solução, mas pode haver casos particulares de sistemas lineares, cuja solução seja indeterminada ou impossível.

- *1° caso particular: sistemas possíveis e indeterminados*

São aqueles sistemas lineares que apresentam infinitas soluções possíveis. No caso de estarmos com educandos de níveis do Ensino Médio ou Ensino Superior, podemos acrescentar que são aqueles sistemas lineares em que o determinante da matriz do sistema é igual a zero. Cramer (1750) relata que um sistema é indeterminado quando:

> o denominador comum se encontra igual a zero; é dito, se ele tem não mais que duas equações, quando $Z^1Y^2 – Z^2Y^2 = 0$ se há nas três, quando $Z^1Y^2X^3 – Z^1Y^3X^2 – Z^2Y^1X^3 + Z^2Y^3X^1 + Z^3Y^1X^2 – Z^3Y^2X^1 = 0$ etc. Então se as grandezas A^1, A^2, A^3, etc. São elas que os numeradores sejam também iguais a zero, o problema é indeterminado; pois as [quantidades de] frações $\frac{0}{0}$ que devem fornecer o valor dos desconhecidos, são indeterminadas (CRAMER, 1750, p.659, tradução nossa).

Vejamos um exemplo. Dado o sistema abaixo, vamos determinar os valores de z e y:

$$\begin{cases} 5 = 2z + y \\ 15 = 6z + 3y \end{cases}$$

Temos um sistema linear de duas incógnitas e duas equações:

$$z = \frac{A^1Y^2 - A^2Y^1}{Z^1Y^2 - Z^2Y^1} = \frac{(5.3) - (15.1)}{(2.3) - (6.1)} = \frac{15 - 15}{6 - 6} = \frac{0}{0}$$

$$y = \frac{Z^1A^2 - Z^2A^1}{Z^1Y^2 - Z^2Y^1} = \frac{(2.15) - (6.5)}{(2.3) - (6.1)} = \frac{30 - 30}{6 - 6} = \frac{0}{0}$$

Quando um sistema linear resulta na indeterminação $\frac{0}{0}$, devemos relatar aos educandos que podemos listar algumas soluções possíveis, mas que, é inviável obtermos todos os resultados devido a infinidade de soluções de um sistema desse tipo. Ao aplicarmos o Método de Cramer (1750), podemos apenas constatar a indeterminação, ou seja, temos somente condição de classificar o sistema.

No exemplo acima, utilizando métodos usuais, podemos citar algumas soluções, tais como $z = 1$ e $y = 3$, em notação atual, $S = \{1,3\}$; $z = 2$ e $y = 1$, $S = \{2,1\}$;...;.

- *2° caso particular: sistemas impossíveis*

São aqueles sistemas lineares que não apresentam qualquer tipo de solução possível. No caso de estarmos com estudantes do Ensino Médio ou Ensino Superior, podemos acrescentar que são aqueles que o determinante da matriz do sistema é igual a zero e que um ou mais determinantes da matriz adjunta são diferentes de zero. Cramer (1750) relata que um sistema é impossível quando:

> as grandezas A^1, A^2, A^3, etc. são tais que, o denominador comum sendo zero, os numeradores ou quaisquer dentre eles, não serão zero, o problema é impossível, ou a menos das grandezas desconhecidas que podem a resolver são todas, ou em parte, infinitas (CRAMER, 1750, p.659, tradução nossa).

Isto é, quando o valor do denominador comum é igual a zero e ao menos um dos numeradores resulte um valor diferente de zero, esse sistema linear será classificado como um sistema impossível, dado que não há qualquer resultado que satisfaça as condições de igualdade do sistema.

Cramer (1750) apresenta um exemplo para mostrar quando um sistema linear é impossível: “se temos para essas duas equações $2 = 3z - 2y$ & $5 = 6z - 4y$, encontraremos $z = \frac{2}{0}\ e\ y = \frac{3}{0}$. Então z & y são de grandezas infinitas, que estão uma para a outra em razão de 2 para 3”. (CRAMER, 1750, p.659, tradução nossa).

Ou seja, dado o sistema de equações,

$$\begin{cases} 2 = 3z - 2y \\ 5 = 6z - 4y \end{cases}$$

$$z = \frac{A^1Y^2 - A^2Y^1}{Z^1Y^2 - Z^2Y^1} = \frac{(2.(-4)) - (5.(-2))}{(3.(-4)) - (6.(-2))} = \frac{-8 + 10}{-12 + 12} = \frac{2}{0}$$

$$y = \frac{Z^1A^2 - Z^2A^1}{Z^1Y^2 - Z^2Y^1} = \frac{(3.5) - (6.2)}{(3.(-4)) - (6.(-2))} = \frac{15 - 12}{-12 + 12} = \frac{3}{0}$$

Podemos notar que o denominador comum é igual a zero e as incógnitas z e y, respectivamente, possuem valores iguais a 2 e 3 no numerador. Dessa forma, não é possível encontrarmos uma solução para z e y que satisfaça a igualdade das equações, logo, é um sistema impossível. Cramer (1750) comenta que:

> Modificando as incógnitas pelos métodos ordinais, cairemos na equação absurda $\frac{2}{3} = \frac{5}{6}$; pois a primeira equação dada $z = \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}$ e a segunda $z = \frac{4}{6}y + \frac{5}{6}$. Então $\frac{2}{3}y + \frac{2}{3} = \frac{4}{6}y + \frac{5}{6}$ que é um absurdo, se z & y são grandezas finitas (CRAMER, 1750, p.659, tradução nossa).

Ou seja, isolando a incógnita z em ambas equações do sistema, obtém-se, respectivamente, $z = \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}$ e $z = \frac{2}{3}y + \frac{5}{6}$. Desse modo, podemos observar que tanto na primeira, quanto na segunda equação, o coeficiente de y é igual a $\frac{2}{3}$. No entanto, $\frac{2}{3} \neq \frac{5}{6}$, consequentemente, ao atribuirmos valores para y, jamais encontraremos resultados que satisfaçam o sistema linear, dado que considerarmos $\frac{2}{3} = \frac{5}{6}$ é um absurdo.

5 Considerações Finais

Neste artigo, tivemos o propósito de fornecer aos professores um material que possa ser adaptado e introduzido em sala de aula, por meio de uma perspectiva histórica, na abordagem de resolução de sistemas lineares. Para isso, nos baseamos nas classificações de Fried (2014), que relaciona os trabalhos em História da Matemática e Educação Matemática sob três aspectos: tema motivacional, tema curricular e tema cultural. É importante destacar que, ao introduzirmos elementos históricos em sala de aula, não necessariamente esses três aspectos devam estar presentes. No entanto, buscamos fornecer subsídios que contemplassem todos estes temas.

Quanto ao tema motivacional, por meio de breves passagens biográficas relatadas por Gillispie (1981), trouxemos algumas informações a respeito da vida de Cramer com o intuito de humanizar e aproximar a ciência matemática dos estudantes.

Do ponto de vista do tema curricular, abordamos a Regra de Cramer, originalmente publicada na obra *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques* (Introdução a análise das linhas curvas algébricas). Apresentamos o Método de Cramer (1750), e concluímos que o tema pode ser utilizado até mesmo no Ensino Fundamental para o ensino de sistemas lineares com duas incógnitas e duas equações, dado que, por meio dessa perspectiva histórica, trazendo a obra original do matemático, embora esteja por trás a teoria das matrizes e determinantes, no período de Cramer esses conceitos ainda não haviam sido definidos. Sugerimos relacionar as fórmulas da Regra de Cramer (1750) com as teorias de matrizes e determinantes somente a partir do Ensino Médio – pois geralmente são conceitos introduzidos no currículo de matemática nessa etapa de ensino.

No aspecto do tema cultural, abordamos brevemente um panorama contextual da referida obra de Cramer (1750). Além disso, mantivemos a linguagem e a estética matemática do período, desse modo, permitindo que os professores possibilitem aos educandos perceberem que, os conceitos matemáticos não foram criados como conceitos inflexíveis, mas que demandaram grandes esforços que perpassaram longos períodos de estudos e adaptações.

Referências

CRAMER, G. **Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques**. Genève: chez les Frères Cramer & Cl. Philibert, 1750.

D´AMBROSIO, U. História da Matemática e Educação. In: FERREIRA, Eduardo Sebastiani (Org.). **Cadernos CEDES 40**. Campinas: Papirus, 1996.

DAUBEN, J W; SCRIBA, C. J. **Writing the history of mathematics**: its historical development. Basel: Birkhauser, 2002.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. Tradução: Hygino H. Domingues. 5ª ed. – Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2011.

FRIED, M. N. History of mathematics in mathematics education. In: MATTHEWS, M. R. (Ed.). **International Handbook of Research in History**, **Philosophy and Science Teaching**. Dordrecht, Heidelberg, New York, London: Springer, p. 669–703, 2014.

GILLISPIE, C.C. **Dictionary of scientific biography**. New York: Charles Scribner´s sons. Vol. 3, 1981.

MENDES, I. A. **História da matemática**: um enfoque transdisciplinar. In: XI Conferência Interamericana de Educação Matemática**. Anais XI CIAEM**, Blumenau: FURB, 2003.

MIGUEL, A.; BRITO, A. J. A história da matemática na formação do professor de matemática. In: FERREIRA, Eduardo Sebastiani (Org.). **Cadernos CEDES 40**. Campinas: Papirus, 1996.

MIGUEL, A.; MIORIM, M. A. **História na educação matemática**: propostas e desafios. Coleção Tendências em Educação Matemática. Belo Horizonte: Autêntica, 2007.

SILVA, R. T; SANTOS, S. X. Matemática: um desafio para a Educação Básica conforme demonstrado nos resultados das avaliações externas no Brasil e no estado de Goiás. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, v. 11, n. 6, p. 481-496, 2020.

SOUSA, F. B.; SABINO, E. R.; SABINO, E. R. **Abordagem histórica e conceitual sobre os sistemas de equações lineares e sua relação com matrizes e determinantes**. In: III Jornada de Estudos em Matemática. **Anais III JEM**. Marabá: Universidade Federal do Sul e Sudeste do Pará, 2017.

TAVARES, A. H. C; PEREIRA, A. G. C. **História de Matemática no ensino de Sistemas Lineares, Matrizes e Determinantes**. In: VII Congresso Iberoamericano de Educação Matemática. **Actas del VII CIBEM** – VII Congresso Iberoamericano de Educación Matemática. Montevideo: CIBEM, 2013.

ZUIN, E. S. L.; SANTOS, C. M. **Sistemas de equações lineares**: entre a história da matemática e a história da educação matemática. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2019.