

LES LABORATOIRES DE MATHÉMATIQUES POUR ENSEIGNER, UNE MÉTAPHORE PRODUCTIVE

Hier et aujourd'hui, pour les élèves comme pour les maîtres

Luc Trouche

Institut National de recherche Pédagogique et Université de Lyon, France

Luc.Trouche@inrp.fr

Résumé

La métaphore des "laboratoires" pour faire et apprendre des mathématiques apparaît dans l'histoire dès lors que l'on veut renouveler, développer cet enseignement. La conférence montrera l'évolution de cette métaphore, depuis la création d'ICME (1908). Les laboratoires de mathématiques sont toujours présentés en relation avec les instruments qu'ils contiennent, l'évolution de la métaphore accompagne donc l'évolution de ces instruments. On montre dans cet article comment l'évolution des environnements technologiques permet de concevoir, dans l'espace de la classe de mathématiques "ordinaire", des moments de vie d'un laboratoire de mathématiques, puis de prolonger, à distance, ces laboratoires. On montre aussi que le développement des laboratoires de mathématiques pour les élèves suppose un développement des laboratoires de mathématiques pour les professeurs. On appuiera ce point de vue sur l'expérience française d'une association de professeurs concepteurs de ressources en ligne, Sésamath. On en déduit la nécessité de nouvelles approches théoriques articulant conception de ressources, évolution des pratiques, et développement professionnel, et combinant aspects individuels et collectifs du travail des professeurs.

Palavras-chave: laboratoires de mathématiques pour l'enseignement, travail collectif des enseignants, outils pour faire, enseigner, et apprendre les mathématiques

MATHEMATICS LABORATORIES FOR TEACHING, A PRODUCTIVE METAPHOR

Abstract

The metaphor of "laboratories" to do and learn mathematics appeared in history, when emerges the necessity of renewing and developing mathematics teaching. The conference will show the evolution of this metaphor, since the creation of ICME (1908). The mathematical laboratories are always presented in relation to the *instruments* they contain, so the evolution of the metaphor accompanies the evolution of these instruments. We show in this paper how the evolution of technological environments makes it possible to conceive, in the space of the 'ordinary' mathematics class, moments of life of a laboratory of mathematics, and then to prolong, at a distance, these laboratories. It is also shown that the development of mathematics laboratories for students implies the development of mathematical laboratories for teachers. This viewpoint will

be supported by the French experience of a teacher association developing online resources, Sésamath. We deduce the need for new theoretical approaches articulating resource design, evolution of practices, and professional development, combining individual and collective aspects of teachers work.

Keywords: mathematics laboratories for teaching, teachers collective work, tools for doing, teaching and learning mathematics.

La métaphore des laboratoires mathématiques est ancienne. On la trouve par exemple sous la plume du mathématicien français Borel, pour appuyer une réforme de l'enseignement (1902) qui veut promouvoir les apprentissages scientifiques comme composante essentielle du développement intellectuel des élèves du XX^{ème} siècle.

C'est une métaphore régulièrement revisitée, par exemple par la Commission Internationale sur l'Enseignement des Mathématiques (ICMI) lors de sa création à Rome (Maschietto et Trouche 2010). Les laboratoires sont alors liés à la manipulation d'objets et d'outils pour découvrir des propriétés ou mettre à l'épreuve des conjectures.

Mais les laboratoires apparaissent toujours à l'état de *projets*, qui mettent en évidence le coût nécessaire de leur mise en œuvre (en particulier pour la formation des maîtres). Le développement de l'informatique apporte de nouveaux outils, et questionne, au-delà de l'enseignement, la nature des mathématiques et les conditions de leur pratique.

Uma metáfora antiga...



« O ideal do laboratório de Matemática seria, por exemplo, uma oficina de marcenaria e o mestre seria um carpinteiro.
Sob a direção do professor de Matemática, aconselhados pelo mestre, os alunos trabalhariam em pequenos grupos na confecção de modelos e aparelhos simples.
Se tivéssemos um torno, eles poderiam construir superfícies de revolução com polias e cordas, eles fariam experiências de Mecânica, verificariam de forma concreta o paralelogramo de forças, etc.
Teria em um canto uma balança de mercearia, água e alguns recipientes permitiriam que os alunos trabalhassem, com dados concretos, os problemas clássicos de vazão. »

(Borel, 1904)

... frequentemente revisitada



« Muitas escolas dedicaram longas discussões sobre o papel que deve ser atribuído às considerações de ordem prática e experimental:
- No ensino elementar, pode-se mencionar, por exemplo, as dobraduras de papel, os trabalhos ao ar livre, utilização de instrumentos simples para medir, a geometria da observação, etc. o cálculo prático e aproximado (uso de tabuadas, etc.), a questão geral de gráficos em Álgebra, a utilização mais generalizada de papel quadriculado...
- Falou-se nesses últimos anos dos *laboratórios de matemática*. O que foi feito nesse sentido e quais são os resultados? »

(ICMI, 1908)

... para reformar o ensino



« As escolas de Ensino Médio poderiam acomodar laboratórios de ciência matemática ao lado dos laboratórios de ciências físicas. Alunos e professores encontrariam ali documentação, recursos informáticos, software ... que poderiam constituir oficinas. Poderiam ser reservados horários para a formação continuada de professores. Estas propostas parecem ambiciosas e razoáveis. Ambiciosas pois implicam evoluções de todos aqueles que atuam no sistema educativo. Razoáveis porque os professores de Matemática hoje estão abertos à mudança.
Existe entre a Matemática e a Informática uma solidariedade fundamental baseada na história (Turing, Von Neumann) e nas práticas atuais... »

(Kahane, 2000)

On trouve dans la littérature une variété de description de laboratoires, avec deux pôles dont on voit bien la complémentarité : soit un lieu spécifique, champ d'expérimentation en marge du curriculum ; soit sur un ensemble structuré d'activités, visant la construction de significations mathématiques profondes, au cœur des classes ordinaires.

Cette variété apparaît bien dès qu'on interroge un moteur de recherche avec les mots clés « laboratoires de mathématiques – lycée » : on trouve alors des ressources institutionnelles pour développer des « moments » de laboratoire dans les classes, aussi bien que des idées pour développer des structures à côté des classes.

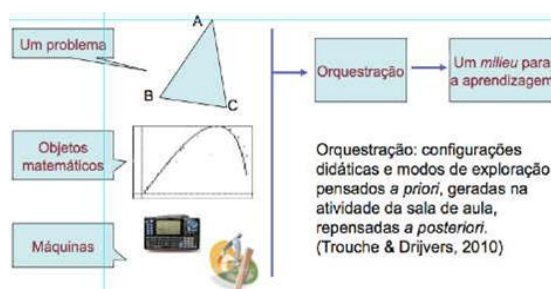
Mettre en œuvre moments de laboratoire dans les classes suppose de disposer de « bons » problèmes, d'objets mathématiques et d'outils pour les manipuler. Cela suppose aussi de penser une orchestration de ce problème, appuyant une mobilisation pertinente des instruments à la disposition des élèves.

... com definições variadas

- 1) A room, equipped with some material: computers, books, and all kinds of objects that can be used for mathematical experiments or constructions [...]; the first thing to think about, a good set of *open activities* to propose to the children. The main feature of laboratories is that they should *feel free*, not under pressure. For the teachers also, math. laboratories are a field of experimentation, *out of any curriculum* (Barbeau & Taylor, 2006).
- 2) A math. laboratory is [...] a *structured set of activities aiming to construct meanings* for mathematical objects, [...] showing similarities with the concept of Renaissance workshops where apprentices *learned by doing and watching what was being done, communicating* with one another and with the experts (Anichini et al. 2003)

The image shows a Google search result for "laboratoires de mathématiques lycée". A red starburst highlights the search results. On the right, four blue callout boxes point to specific search results:

- Iniciativas institucionais**: Points to the top search result from Edu.SCO.
- Iniciativas pessoais apoiadas por instituições**: Points to a result from "Le laboratoire de mathématique du lycée Alphonse Doulet".
- Iniciativas de sociedades científicas**: Points to a result from "Commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques".
- Iniciativas de associações específicas**: Points to a result from "Henri Deschamps et un laboratoire de mathématiques dans un lycée".

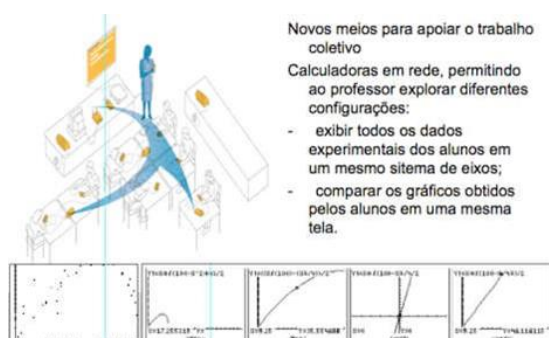


Les technologies informatiques donnent de nouveaux outils pour ces orchestrations, par exemple les réseaux de calculatrices, que le professeur peut exploiter de différentes façons (en superposant les résultats des élèves sur un même écran, ou en juxtaposant ces résultats pour permettre leur discussion par toute la classe.

J'ai suivi cet exemple dans une classe (10ème grade), dans cet environnement de réseau de calculatrices. Il s'agissait d'étudier les variations de l'aire d'un triangle isocèle en fonction de la base. Le professeur choisit de faire travailler les élèves avec des outils « anciens », règle graduée et compas. Les élèves rassemblent des couples de données (base, aire) de triangles différents.

Le réseau de calculatrices est mobilisé pour envoyer ces données sur l'écran commun.

La classe vit alors comme un laboratoire mathématiques. Les questions fusent : les points forment-ils une courbe ou un nuage ? Comment avoir beaucoup de points « automatiquement » ? La recherche d'une formule est le moyen « économique » d'accumuler les résultats et d'obtenir une courbe qui ajuste les points obtenus.



Um exemplo...

AB = AC = 10 cm, qual a área do triângulo ABC?

- ✓ Objetivo: o conceito de função (área em função de BC);
- ✓ Manipulação de ferramentas « antigos » (régua, compasso)
- ✓ Envio de dados para a tela;
- ✓ Um objeto se constitui, criação coletiva;
- ✓ Inúmeros problemas (imprecisão de medidas ou erros de cálculo, curva ou nuvem de pontos...);
- ✓ Co-elaboração de uma fórmula matemática que modeliza o problema dado.

Um exemplo...

Escolhas didáticas complexas para o professor:

- ✓ exibir, ou não, os nomes dos alunos autores;
- ✓ informar, ou não, a janela a ser escolhida para o gráfico;
- ✓ como gerenciar a discussão (o debate científico), tirando as significações?

Uma análise *a posteriori* reveladora

Uma viabilidade assegurada pelo interesse institucional e o trabalho colaborativo dos professores

De nouvelles questions apparaissent : comment expliquer, justifier le maximum ? Le ministère français a tenté de favoriser le développements de ces moments de laboratoires dans les classes en les introduisant aussi dans les évaluations, en particulier au baccalauréat : l'épreuve pratique de mathématique propose aux élèves la résolution d'un problème assez ouvert, supposant la formulation de conjectures en utilisant les technologies.

Dans l'exemple ci-contre, on peut découvrir la « philosophie » de cette épreuve. Il s'agit d'abord de construire des objets (ici une courbe) à l'aide d'une calculatrice, puis de formuler des conjectures avant tout calcul. L'élève appelle ensuite le professeur pour avoir un avis sur la justesse de la construction ou la pertinence des conjectures.

C'est après cet avis que l'élève choisit de reprendre la construction, ou de formuler de nouvelles conjectures, ou d'engager une démarche de preuve. Constructions et conjectures sont entrelacées : par exemple, l'élève doit remarquer que les deux tangentes aux points d'abscisses a et $-a$ se coupent sur l'axe des ordonnées, ce qui suppose de rechercher des invariants dans différentes configurations.

Evoluções institucionais...

O Ministério francês experimenta, desde 2007, uma prova prática de Matemática no « *baccalauréat* »

« O objetivo da prova é avaliar as competências dos alunos na utilização de calculadoras e softwares específicos em Matemática. Trata-se de avaliar nos alunos, a capacidade de mobilizar as tecnologias da informação e da comunicação para o ensino (TICE) para resolver um problema matemática

Os temas propostos aos candidatos são exercícios de Matemática nos quais a utilização das TICE (calculadoras gráficas programáveis, computadores e softwares específicos, softwares livres de preferência, planilhas, geometria dinâmica, CAS) intervêm de maneira significativa na resolução do problema proposto. »

(MEN, 2007)

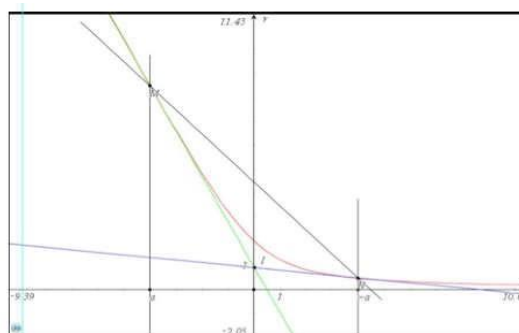
Um exemplo...

Seja uma função definida sobre \mathbb{R} por: $f(x) = -x + \sqrt{x^2 + 4}$.

Nota-se C sua curva representativa num sistema ortogonal

Seja a um real qualquer, M e N os pontos de C de abscissas respectivas a e $-a$.

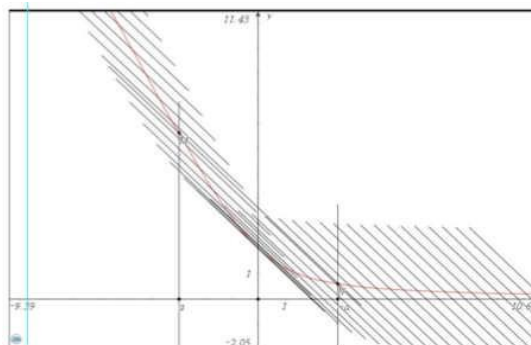
- 1) Construir a curva com o auxílio de um software de sua escolha, chamar o examinador para verificação.
- 2) Variar a e formular conjecturas relativas, respectivamente, à reta MN e à intersecção I das tangentes à C em M e N . Chamar o examinador para verificação das conjecturas.
- 3) Determinar em função de a as coordenadas dos pontos M e N . Justificar as conjecturas enunciadas na questão 2.



Autre conjecture : quand a varie, la droite MN garde une pente constante. Le « jeu » mathématique ne mobilise pas que le registre graphique : des calculs réalisés par ailleurs peuvent aussi appuyer les conjectures, mettre en évidence des régularités que le registre graphique ne révèle pas toujours aussi facilement. Les laboratoires mathématiques peuvent ainsi s'inviter dans ces moments d'évaluation pourtant très contraints...

Cette expérience de renouvellement du baccalauréat a suscité à la fois l'enthousiasme de certains professeurs, et des réactions hostiles, tant elle bousculait des habitudes professionnelles anciennes. Finalement, elle conduisait à revoir l'ensemble du baccalauréat : sa généralisation a donc été reportée en 2013...

Un phénomène récent, liée aux mutations numériques, renouvelle la façon de penser les laboratoires : c'est le développement d'associations d'enseignants qui conçoivent et partagent des ressources en ligne. En France, Sésamath est un exemple caractéristique de ce processus.



« A prova induz uma relação diferente dos alunos com a Matemática (atividade experimental, várias tentativas possibilitadas pelo uso das TICE, conjecturas necessárias...) Ela induz também processos de ensino diferentes, dando mais importância ao processo de investigação Ela coloca em jogo uma avaliação diferente, considerando a atividade do aluno mais que seu resultado A generalização desse tipo de prova deve fazer evoluir o ensino de Matemática » (Fort, 2007)
E ainda assim... Nenhuma generalização prevista antes de 2013!
Dificuldade de evoluções que tocam os pontos sensíveis do ensino de Matemática...

Sésamath (<http://www.sesamath.net/>), uma recente associação de professores de Matemática (2001)...
... um crescimento muito rápido (100 membros, 5000 professores em grupos de projeto, 100.000 conexões por dia)...
... uma filosofia do doar, do dividir e do serviço público



Sésamath, ce sont des milliers d'enseignants qui travaillent ensemble dans des groupes de projets, qui mettent à la disposition de dizaines de milliers de professeurs des ressources nouvelles pour leur enseignement. Le site Mathenpoche propose ainsi des exercices, regroupés suivant les niveaux et les thèmes d'enseignement.

Cette dernière année, l'association Sésamath a franchi un pas supplémentaire, en développant une nouvelle interface « LaboMep » (Laboratoires de mathématiques en poche), permettant aux professeurs de travailler ensemble à la construction de nouvelles activités pour les élèves.

Il semble y avoir une relation profonde entre le travail que les professeurs de Sésamath réalisent dans leur propre laboratoire, LaboMep, et l'activité de laboratoire qu'ils développent dans leur propre classe. J'ai ainsi pu suivre le travail d'un professeur de Sésamath, Pierre, dans sa propre classe : le temps et l'espace du travail mathématique sont profondément réorganisés.

Mathenpoche: um dos projetos de destaque da associação, centenas de exercícios que podem ser baixados livremente, que podem ser comentados ou enriquecidos...

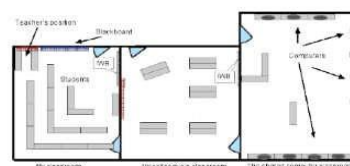


LaboMep: uma interface « laboratório » de concepção, experimentação, compartilhamento de recursos, a partir do banco inicial do Mep (*Math en poche*), uma versão adaptada para trabalhar em rede na sala de aula.



A sala de aula do professor Pierre

Uma reorganização do espaço e das relações entre professores, alunos e ferramentas (quadro negro, lousa inteligente, softwares, recursos da Internet...)



Les élèves ont dans ce contexte une responsabilité importante dans la prise en charge des problèmes mathématiques. Ils travaillent la plupart du temps en groupe, largement Internet pour rechercher les ressources nécessaires (par exemple pour avoir les résultats de multiplications...). Le rapport au savoir est ainsi profondément transformé.

On a beaucoup parlé, dans ce qui précède, de « ressources ». En français, ou en anglais, on peut définir une ressource comme ce qui re-source le travail du professeur ou de l'élève. Ce jeu sur les mots n'est pas possible en espagnol ou portugais, mais l'idée reste, de la nécessité d'un renouvellement des pratiques et du « matériel didactique », en donnant à cette expression un sens très large.

Finalement, ce qui ressort de ce tour d'horizon, c'est que les technologies, anciennes comme nouvelles, donnent bien de nouveaux moyens pour les laboratoires mathématiques, ouvrant l'activité des élèves comme des professeurs vers davantage de collaboration et supposant des évolutions institutionnelles fortes.

Os alunos do professor Pierre



Usar o Google para fazer uma multiplicação...

Busca-se o resultado de uma multiplicação da mesma forma que se busca o número de habitantes de São Paulo

O paradigma da rede substitui o paradigma da flecha



Em Francês (vs Inglês)	Em Português (vs Espanhol)
Source	Fontes
Ressource (= re-source)	Recursos

Esso significa: "regenerar",
"recargar", "realimentar".

Finalmente...

As TIC (em particular os recursos *on-line*), novos meios para os laboratórios de Matemática.

Articular antigas e novas tecnologias (Maschietto et Trouche, 2010)

Articular novas formas de trabalho dos alunos e novas formas de trabalho do professor.

Articular a mudança de cima (currículo, avaliações) e a mudança pelos professores (colaboração entre seus pares).

Para a pesquisa, pensar mais nos processos de *design* de recursos « vivos » (Gueudet et Trouche, 2010) e nos aspectos coletivos do desenvolvimento profissional de professores.

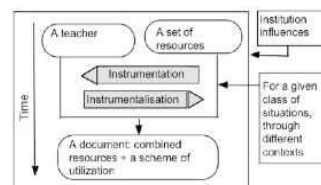
Revenons pour conclure à cette thématique des ressources pour l'enseignement, au-delà de la thématique des laboratoires. L'étude du travail des professeurs à partir du jeu entre les ressources (qu'il utilise, qu'il conçoit, qu'il partage), sa pratique (en classe et hors classe) et ses connaissances ouvre de nouveaux horizons théoriques, explorés dans le cadre de l'approche documentaire du didactique que je développe aujourd'hui.

La collaboration entre le Brésil et la France, engagée dans le cadre de l'accord CAPES-COFECUB est un bon cadre pour développer cette approche, à travers les quatre axes qui structurent cette collaboration, en particulier l'axe 3 sur les ressources. Les rencontres que nous avons eues lors du colloque pre-PME à Sao Paulo, comme celles que nous venons d'avoir dans le colloque HTEM augurent bien des développements à venir.

Uma nova abordagem teórica

Considerar o trabalho dos professores com os recursos, individual e coletivamente, dentro e fora da sala de aula (Adler 2000)

Distinguir os recursos dos quais o professor se apropria e o resultado dessa apropriação: o documento, entidade mista, amalgama de recursos e conhecimentos (Gueudet & Trouche, 2010)



Uma abordagem documental do didático

http://educmath.inrp.fr/Educmath/recherche/approche_documentaire

Colaboração franco-brasileira

Projeto CAPES-COFECUB (2009-2011)

Estudo do professor e de sua atividade matemática: concepções e recursos em e para sua atuação profissional

<http://educmath.inrp.fr/Educmath/recherche/projets/capes-cofecub/>

Responsável: Licia Maia (Brasil), Luc Trouche (França)

Um primeiro relatório de pesquisa (2010) abre novas questões sobre:

- as representações sociais de professores de Matemática,
- as decisões didáticas de professores,
- os conteúdos dos recursos para ensinar Matemática,
- a transição entre o Ensino Médio e a Universidade.

Diferenças entre a França e o Brasil que esclarecem as possíveis mudanças e as condições para estas mudanças.

En venant ici, je me disais qu'il y avait beaucoup de raisons de penser à Lévi-Strauss, mort récemment : son évocation de Recife, à l'ouverture de *Tristes Tropiques* (« A 5 h 30 du matin, nous entrions en rade de Recife tandis que piaillaient les mouettes... »), mais l'apport de son œuvre à la compréhension du bricolage constituant les ressources de l'activité humaine ou, enfin et surtout, l'idée profonde qu'une fraction de l'humanité ne peut se comprendre qu'en référence à toutes les autres.



REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANICHINI, G.; ARZARELLO, F.; CIARRAPICO, L.; ROBUTTI, O. **Matematica 2001**. La matematica per il cittadino. Attività didattiche e prove di verifica per un nuovo curricolo di Matematica. LUCCA: Matteoni Stampatore, 2003.

ARCAVI, A.; HADAS, N. Computer mediated learning, an example of an approach, **International Journal of Computers for Mathematical Learning**, 5, 25-45, 2000.

BARBEAU, E.; TAYLOR, P. J. **Challenging mathematics in and beyond the classroom: the 16th ICMI study**. New York: Springer, 2008.

BOREL, E. **Les exercices pratiques de mathématiques dans l'enseignement secondaire**, 1904,
http://smf.emath.fr/Publications/Gazette/2002/93/smf_gazette_93_47-64.pdf

FORT, M. **Rapport sur l'expérimentation d'une épreuve pratique de mathématiques au bac S**, MEN, 2007, <http://educmath.inrp.fr/Educmath/en-debat/epreuvepratique/rapportep>

GUEUDET, G.; TROUCHE, L. Towards new documentation systems for mathematics teachers? **Educational Studies in Mathematics**, 71(3), 199-218, 2009,
<http://springerlink.metapress.com/content/6600hx1254664n74/>

HOYLES, C.; KALAS, I.; TROUCHE, L.; HIVON, L.; NOSS, R.; WILENSKI, U. Connectivity and Virtual Networks for Learning, In C. HOYLES; J.-B. LAGRANGE (eds.), **Mathematical Education and Digital Technologies: Rethinking the terrain** 439-462, New York: Springer, 2009.

ICMI, **Les tendances modernes de l'enseignement des mathématiques, L'enseignement mathématique**, 10, 454-456, 1908,
<http://www.unige.ch/math/EnsMath>

KAHANE, J.-P. (dir.) **Informatique et enseignement des mathématiques**, 2001
<http://smf.emath.fr/Enseignement/CommissionKahane/RapportInfoMath/RapportInfoMath.pdf>

MASCHIETO, M.; TROUCHE, L. Mathematics learning and tools from theoretical, historical and practical points of view: the productive notion of mathematics laboratories. **ZDM – The International Journal on Mathematics Education**, 42(1), 33-47, (2010), <http://www.springerlink.com/content/48045470220u4073/>

Ministère de l'Éducation Nationale (MEN), **L'épreuve pratique du baccalauréat de la série scientifique**, 2007,
http://eduscol.education.fr/D1115/epr_pratique_presentation.htm

TRGALOVA, J.; JAHN, A.P; SOURY-LAVERGNE, S. Quality process for dynamic geometry resources: the Intergeo project, in V. Durand-Guerrier; S. Soury-Lavergne; F. Arzarello, **Proceedings of CERME 6**, 1161-1170, INRP, 2009,
<http://www.inrp.fr/editions/editions-electroniques/cerme6/working-group-7>

TROUCHE, L.; DRIJVERS, P., Handheld technology for mathematics education: flashback into the future. **ZDM, The International Journal on Mathematics Education**, 42(7), 667-681, 2010,
<http://www.springerlink.com/content/68n07260752h5260/>

