ISSN 2177-9309
emteia Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana
Universidade Federal de Pernambuco
Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica EDUMATEC

A COMPARAÇÃO DE ÁREAS DE FIGURAS PLANAS EM DIFERENTES AMBIENTES: PAPEL E LÁPIS, MATERIAIS MANIPULATIVOS E NO APPRENTI GÉOMÈTRE 2

Anderson Douglas Rodrigues
Mestre
UFPE– Pernambuco – Brasil
anderdouglasprs@gmail.com
Paula Moreira Baltar Bellemain
Doutora
UFPE – Pernambuco – Brasil
pmbaltar@gmail.com

Resumo

O presente artigo discute como alunos de 6º ano do ensino fundamental lidam com uma tarefa de comparação de áreas de figuras planas em ambientes com características distintas: Papel e Lápis, Materiais Manipulativos e no software de geometria[1] *Apprenti Géomètre* 2. As bases teóricas da pesquisa são a Teoria dos Campos Conceituais de Gérard Vergnaud e a abordagem da área como grandeza, proposta por Régine Douady e Marie-Jeanne Perrin-Glorian. Os sujeitos da pesquisa resolveram a tarefa em duplas, em um dos três ambientes supracitados. Os ambientes Materiais Manipulativos e *Apprenti Géomètre* 2 proporcionaram uma maior diversidade de possibilidades de ação, em relação ao Papel e Lápis, como o decalque com papel manteiga, a decomposição efetiva das figuras com tesoura e as ferramentas do menu, tais como mover, rotacionar, decompor e agrupar, por meio das quais foi possível realizar decomposição e recomposição sem perda nem sobreposição e sobrepor as figuras. Entre os teoremas-em-ação verdadeiros mobilizados pelos sujeitos estão "a área é invariante por isometrias", observado em todos os ambientes, e "figuras equidecompostas têm áreas iguais", identificado na resolução com o *Apprenti Géomètre* 2. Também foram observados indícios de teoremas-em-ação falsos como "duas figuras que têm mesma área são congruentes".

Palavras-chave: Área. Grandeza geométrica. *Apprenti Géomètre*. Teoria dos Campos Conceituais. Recursos.

Résumé

Ce travail porte sur la résolution d'une tâche de comparaison d'aire de surfaces planes par des élèves de sixième, dans trois environnements différents: papier-crayon, matériels manipulatifs et le logiciel de géométrie Apprenti Géomètre 2. Son cadre théorique est celui de la Théorie des Champs Conceptuels de Gérard Vergnaud. L'approche de l'aire en tant que grandeur proposée par Régine Douady et Marie-Jeanne Perrin-Glorian est adoptée dans la recherche. Les sujets ont résolu la tâche en binômes, dans l'un des trois environnements cités. La possibilité d'utiliser le papier calque, les ciseaux et le scotch dans l'environnement matériels manipulatifs et les fonctionnalités du logiciel a permis une diversité plus

[1] Mais informações sobre esse software podem ser encontradas em Silva (2016).

grande de possibilités d'action, pour reproduire et déplacer les figures ainsi que pour faire des découpages-recollements sans perte ni chevauchement. Parmi les théorèmes-en-acte vrais mobilisés par les sujets il y a celui selon lequel l'aire est invariante par isométries, observé dans les trois environnements et celui selon lequel deux figures equidécomposables ont des aires égales, identifié dans le logiciel. Nous avons repéré aussi des signes de la mise en œuvre de théorèmes-en-acte faux comme, par exemple, deux figures qui ont même aire sont congruentes.

Mots clefs: Aire, Grandeur Géométrique, Apprenti Géomètre, Théorie des Champs Conceptuels, Ressources.

INTRODUÇÃO

Nossa dissertação (SILVA, 2016), da qual o estudo aqui apresentado é um recorte, investigou o tratamento dado por alunos do 6º ano do ensino fundamental às situações que dão sentido à área como grandeza geométrica, em diferentes condições.

Esse trabalho dá continuidade a um conjunto de pesquisas que vêm sendo desenvolvidas há mais de 15 anos pelo grupo Pró-grandezas[2], sobre a aprendizagem e o ensino das grandezas e medidas, com ênfase nas grandezas geométricas comprimento, área e volume (BELLEMAIN; LIMA, 2002). A produção desse grupo, em diálogo com outros pesquisadores brasileiros e estrangeiros, tem permitido identificar erros e dificuldades persistentes na aprendizagem desse campo, analisar sua abordagem em livros didáticos, investigar o potencial de recursos para favorecer a apropriação de conhecimentos sobre grandezas e medidas, entre outros enfoques.

Entre os possíveis recursos, estão os materiais manipulativos, como o tangram e as malhas, bem como os softwares de geometria. Pesquisas como as de Baltar (1996) e de Baldini (2004) identificaram contribuições de softwares de geometria dinâmica, como o *Cabri-géomètre*, para a aprendizagem da dissociação entre área e perímetro.

Duas especificidades principais podem ser destacadas em nosso objeto de pesquisa (SILVA, 2016): o desenvolvimento e a aplicação de um conjunto de tarefas similares em ambientes distintos (papel e lápis, materiais manipulativos e software de geometria) e a utilização do software de geometria belga *Apprenti Géomètre* 2 desenvolvido pelo CREM[3] (2007). Considerando que, via de regra, as tarefas escolares sobre área são resolvidas em

2 O grupo *Pró-grandezas: ensino-aprendizagem das grandezas e medidas*, da Universidade Federal de Pernambuco, certificado no diretório de grupos de pesquisa do Cnpq, é liderado pelos professores Paula Baltar e Paulo Figueiredo Lima. É formado por pesquisadores em Educação Matemática, mestrandos, doutorandos, estudantes de licenciatura em matemática, pedagogia e expressão gráfica e professores da educação básica e do ensino superior.

3 Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques (CREM) é um grupo de pesquisa e desenvolvimento responsável pelo projeto de elaboração do *Apprenti Géomètre*.

ambientes estáticos com o uso apenas de papel e lápis, pretendíamos verificar possíveis impactos da utilização de outros recursos sobre os procedimentos empregados pelos alunos.

Devido à escolha desse foco, o desenvolvimento da pesquisa beneficiou-se fortemente da interlocução com pesquisas anteriores e em andamento no LEMATEC[4] (Laboratório de Ensino da Matemática e Tecnologia).

O recorte desse artigo diz respeito à resolução de uma tarefa de comparação de áreas, nos três ambientes supracitados.

Apresentaremos, a seguir, o referencial teórico adotado, os procedimentos metodológicos, as análises a priori e a posteriori da tarefa de comparação de área, nossas considerações finais e as referências.

REFERENCIAL TEÓRICO

Adotamos a abordagem da área como uma grandeza geométrica, apoiada nos estudos de Douady e Perrin-Glorian (1989), realizados na França, nos anos 1980, no nível equivalente ao 4º e 5º anos do ensino fundamental brasileiro.

Essas autoras evidenciaram erros e entraves na resolução de problemas sobre área, dentre os quais confusões entre área e perímetro (considerar que figuras que têm áreas iguais têm necessariamente perímetros iguais e reciprocamente, entre outras) e o uso inadequado de fórmulas (calcular o produto dos comprimentos dos lados de um paralelogramo não retângulo para determinar sua área, por exemplo). De acordo com Douady e Perrin-Glorian, alguns alunos consideram que a área é ligada de tal modo à figura que não se dissocia de outras características da mesma. Nessas condições, não parece possível, para esses alunos, modificar uma figura, mantendo sua área inalterada. Ou seja, qualquer modificação da figura modificaria necessariamente sua área e todas as demais características da figura (como seu perímetro, por exemplo).

Pesquisas brasileiras (DUARTE, 2002; FACCO, 2003; LIMA; BELLEMAIN, 2004; TELES, 2007; FERREIRA, 2010; FERREIRA; BELLEMAIN, 2013, entre outros) identificaram erros e dificuldades similares a esses, tanto no ensino fundamental como no ensino médio. Destacaram ainda que grande parte dos alunos comete erros em relação ao uso

[4] Grupo de pesquisa liderado pelos professores Verônica Gitirana e Franck Bellemain, registrado no Cnpq, que investiga a crescente introdução das tecnologias computacionais no ensino da matemática nas modalidades presencial e a distância (PORTAL DO LEMATEC, 2016).

de unidades de medida e alguns consideram que figuras com áreas iguais são necessariamente congruentes.

De acordo com Ferreira e Bellemain (2013), o modelo explicativo para tais entraves, proposto por Douady e Perrin-Glorian (1989) e adotado por Baltar (1996), baseia-se na organização das concepções dos alunos em dois polos - as concepções geométricas e as concepções numéricas - as quais são descritas da seguinte forma:

> As concepções geométricas se caracterizam por um amálgama entre a figura e a área, ou seja, para os sujeitos que mobilizam uma concepção geométrica é como se a palavra área remetesse à própria figura e não a uma propriedade da mesma. No outro extremo, estão as concepções numéricas, que focam exclusivamente o aspecto do cálculo. É o caso de respostas a problemas de cálculo de área, nas quais nenhuma unidade é mencionada ou utilizam-se unidades inadequadas (FERREIRA; BELLEMAIN, 2013, p. 3).

Douady e Perrin-Glorian (1989) enfatizam que os alunos mobilizam ora uma concepção geométrica de área, ora uma concepção numérica e, por vezes, as duas de forma simultânea, mas sem estabelecer relações pertinentes entre os aspectos geométricos e numéricos no tratamento de problemas sobre área. A mobilização dessas concepções provoca ou reforça muitas das dificuldades na aprendizagem da área.

A partir dessa constatação, essas autoras defendem que na aprendizagem do conceito de área devem-se considerar três quadros[5]: o geométrico, o numérico e o das grandezas. No quadro geométrico, estão as superfícies planas, consideradas como modelos matemáticos de faces de objetos do mundo físico. São objetos desse quadro, triângulos, quadriláteros, círculos, figuras de contornos irregulares etc. Esses objetos geométricos são comparados, segundo o atributo área. Nesse modelo, a área faz parte do quadro das grandezas e é caracterizada como classe de equivalência de superfícies de mesma área. O quadro numérico é composto pelas medidas, as quais são números reais não negativos ($3, \frac{1}{7}, \sqrt{5}$, etc.). Expressões compostas de um número acompanhado de uma unidade de área são maneiras de representar grandezas (3 ha, $\frac{1}{7}$ m², $\sqrt{5}$ km² etc.).

Com base na abordagem de área como grandeza, Ferreira e Bellemain (2013) esclarecem que a distinção dos três quadros leva a destacar que a área não corresponde nem à figura nem ao número:

[5] Segundo Douady e Perrin-Glorian (1989, p. 389), um quadro é constituído de objetos de um ramo da matemática, das relações entre esses objetos, de suas formulações eventualmente diversas e das imagens mentais que o sujeito associa num dado momento a esses objetos e relações.

> A área não pode ser a figura porque figuras diferentes são suscetíveis de ter mesma área (como no caso da decomposição e recomposição de uma figura sem perda nem sobreposição). Tampouco a área é um número, pois se a unidade muda, o número que expressa a medida também é alterado. Dada uma figura F, cuja área mede 3 cm², pode-se expressar essa área por 300 mm², ou seja, os números 3 e 300 não dão conta de expressar a área de F. Na organização conceitual proposta, a figura se situa no quadro geométrico, a área se situa no quadro das grandezas e a medida se situa no quadro numérico.

Para Bellemain e Lima (2002), é preciso simultaneamente distinguir e articular esses três quadros, o que é explicado, como segue, por Ferreira e Bellemain (2013):

> Se por um lado é importante estabelecer tais distinções entre a figura, a grandeza e o número, é preciso também articular esses aspectos de maneira pertinente. A mudança de quadros possibilita ao aluno uma busca de diversas formas de resolução de uma dada situação, colocando em evidência a existência de uma articulação intensa e necessária entre os processos presentes nos diferentes quadros, como também a construção de uma matemática menos fragmentada, mais articulada e dinâmica. (FERREIRA; BELLEMAIN, 2013, p. 4).

Estudos realizados com alunos brasileiros do ensino fundamental e médio (DUARTE, 2002; BELLEMAIN; LIMA, 2002; FACCO, 2003; TELES, 2007; FERREIRA, 2010; SILVA, 2016) adotaram a abordagem de área como grandeza e reforçaram a proposta de distinção e articulação dos três quadros para a superação de erros e dificuldades e para propiciar avanços na aprendizagem desse conceito.

Ferreira (2010) observou também que, nos livros didáticos, predominam nitidamente as situações de medida. As situações nas quais o aspecto numérico é secundário são minoritárias, o que pode conduzir ao desenvolvimento de concepções numéricas da área (DOUADY; PERRIN-GLORIAN, 1989).

Algumas pesquisas (BALTAR, 1996; DUARTE, 2002; FACCO, 2003; BALDINI, 2004; FERREIRA, 2010; PESSOA, 2010, entre outros) identificaram possíveis aportes de recursos como o tangram, o papel de decalque e malhas quadriculadas, ou ainda softwares de geometria dinâmica, para diagnosticar dificuldades dos alunos e/ou propiciar a aprendizagem desse conteúdo. Mas nenhuma delas investigou a resolução de tarefas similares em diferentes ambientes.

A escolha da Teoria dos Campos Conceituais (VERGNAUD, 1996) leva-nos a considerar a área como parte do campo conceitual das grandezas geométricas e suas medidas. Sob essa perspectiva, concebemos área como um conceito, ou seja, como uma tríade de conjuntos indissociáveis C = (S, IO, R), na qual:

- S (a referência) é o conjunto de situações que dão sentido à área;

- IO (o significado) é o conjunto de invariantes nos quais se assenta a operacionalidade dos esquemas, por meio dos quais se resolvem tarefas sobre a área;
- R (o significante) é o conjunto das formas que permitem representar simbolicamente a área, suas propriedades, as situações e os procedimentos de tratamento de tarefas sobre área.

Os invariantes operatórios permanecem, em grande parte, implícitos nas ações do sujeito, mas justificam o modo como lidam com as situações (VERGNAUD, 1996). Dentre eles, destacamos os teoremas-em-ação, que funcionam na ação dos sujeitos como proposições que os mesmos consideram verdadeiras. Tanto conhecimentos corretos e adequados matematicamente como aqueles que são considerados errados podem ser modelados como teoremas-em-ação.

Adotamos ainda o estudo das situações que dão sentido à área como grandeza desenvolvido por Baltar (1996), no qual são consideradas três grandes classes (comparação de área, medida de área e produção de superfícies) bem como a inclusão de uma quarta classe, a de mudança de unidade, proposta por Ferreira (2010).

Nas situações de comparação trata-se em primeiro plano de decidir se duas figuras pertencem ou não a uma mesma classe de equivalência (ou seja, se têm mesma área) ou de estabelecer uma ordem entre as áreas de duas ou mais figuras. Nas situações de medida, o resultado esperado é um número seguido de uma unidade de área e, nesse caso, o que está em foco é a passagem da grandeza ao número mediante a escolha de uma unidade. As situações de produção são aquelas nas quais se solicita que sejam desenhadas ou descritas figuras que respeitam determinadas condições: por exemplo, traçar no papel quadriculado uma figura de área 10 cm²; dada uma figura F, desenhar uma figura G, diferente de F, com mesma área; ou uma figura J com perímetro igual ao de F etc. Nas situações de mudança de unidade, uma área é inicialmente representada utilizando certa unidade U e solicita-se que seja expressa a mesma área, com o uso de uma unidade diferente de U, como por exemplo, expressar em hectares a área de uma região de três quilômetros quadrados.

Em nossa dissertação (SILVA, 2016) foram considerados os diferentes tipos de situações que dão sentido à área, mas, nesse artigo, escolhemos focar apenas em uma tarefa de *comparação de área*.

PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Como já foi dito, esse texto apresenta um recorte da nossa dissertação (SILVA, 2016), cujo objetivo foi investigar o tratamento dado por alunos de 6º ano do ensino fundamental às situações que dão sentido à área como grandeza (comparação de área, medida de área, mudança de unidade e produção de superfície) em ambientes com características distintas.

O dispositivo experimental foi organizado em duas etapas. A primeira, denominada de familiarização nos ambientes (não-digital e digital)[6], consistiu em um conjunto de tarefas que não envolviam a área, mas permitiam aos alunos lidar com malhas, com corte e colagem e com o *Apprenti géomètre 2*. Esses recursos eram desconhecidos ou pouco usuais na escola campo. Além disso, a familiarização permitiu que os alunos adquirissem conhecimentos a serem reinvestidos na segunda etapa do dispositivo, a qual denominamos de dispositivo central.

Na segunda etapa, os alunos inicialmente resolveram as tarefas sobre área em duplas, cada uma delas em um ambiente. Em outro momento, trios compostos por sujeitos que resolveram a tarefa em diferentes ambientes debateram as mesmas tarefas.

Os sujeitos da pesquisa foram 12 alunos[7] de uma turma de 6º ano de uma escola da rede pública municipal situada na zona da mata norte do estado de Pernambuco. A opção pelo 6º ano justifica-se por se tratar de um momento de transição entre os anos iniciais e finais do ensino fundamental. Em princípio, o conceito de área é introduzido entre o 4º e o 5º anos do ensino fundamental e retomado no 6º ano. A escola campo de pesquisa foi escolhida em virtude do acesso dos autores e da disponibilidade de espaço físico e recursos necessários à aplicação das tarefas previstas.

O recorte desse artigo diz respeito à primeira parte do dispositivo central da pesquisa, na qual todos os sujeitos estavam no laboratório de informática dessa escola para resolver em duplas um conjunto de tarefas sobre área. Duas duplas realizaram as tarefas no ambiente que chamamos *Papel e Lápis* (APL), duas duplas no ambiente intitulado na pesquisa *Materiais Manipulativos* (AMM) e duas duplas realizaram as tarefas no software de geometria *Apprenti Géomètre* 2 (AG2).

Nessa etapa do dispositivo central, cada dupla só podia realizar as tarefas com os recursos disponíveis no respectivo ambiente. Os alunos do ambiente *Papel e Lápis* (APL)

[6] Denominamos de ambiente não-digital aquele formado por malha quadriculada, malha isométrica pontilhada, papel de decalque, tesoura, fita adesiva, cola e canetas hidrográficas, e de ambiente digital o software AG2. Papel branco e lápis grafite estavam disponíveis para todos os sujeitos nos três ambientes.

[7] Os participantes da pesquisa foram indicados pela equipe pedagógica da escola por terem se destacado em uma avaliação interna de matemática aplicada pela rede municipal de ensino.

receberam apenas a ficha com as instruções da tarefa grampeada e o lápis grafite. Nos demais ambientes, também foram entregues a ficha e o lápis grafite. Além disso, foi entregue aos alunos do ambiente *Materiais Manipulativos* (AMM) um kit contendo: papel de decalque (manteiga), lápis de colorir, tesoura, fita adesiva, cola, malhas pontilhadas quadradas, malha isométrica pontilhada e malhas quadriculadas. As duplas do *Apprenti Géomètre* 2 (AG2) poderiam utilizar os diferentes menus e ferramentas desse software para responder a tarefa. As instruções das tarefas foram adaptadas a cada ambiente, mas eram bastante similares.

Foi solicitado aos sujeitos que além de responder a tarefa, explicassem como haviam resolvido por escrito, nas respectivas fichas. Todas as duplas foram filmadas. Para auxiliar na filmagem e ler os enunciados das tarefas, caso os alunos apresentassem dificuldades de leitura, contamos com a participação de monitores que foram instruídos a não fornecer explicações sobre o conteúdo das tarefas.

O recorte desse artigo diz respeito apenas à tarefa 1 do dispositivo central. A fim de fundamentar e justificar as escolhas na formulação da tarefa 1, apresentamos a seguir sua análise a priori[8], na qual são antecipados procedimentos de resolução e teoremas-em-ação passíveis de serem mobilizados pelos sujeitos, e a análise a posteriori, na qual são descritos os procedimentos que os alunos utilizaram para responder essa tarefa em conexão com nossa interpretação, em termos dos teoremas-em-ação que podem explicar esses procedimentos.

ANÁLISE A PRIORI DA TAREFA 1- COMPARAÇÃO DE ÁREA

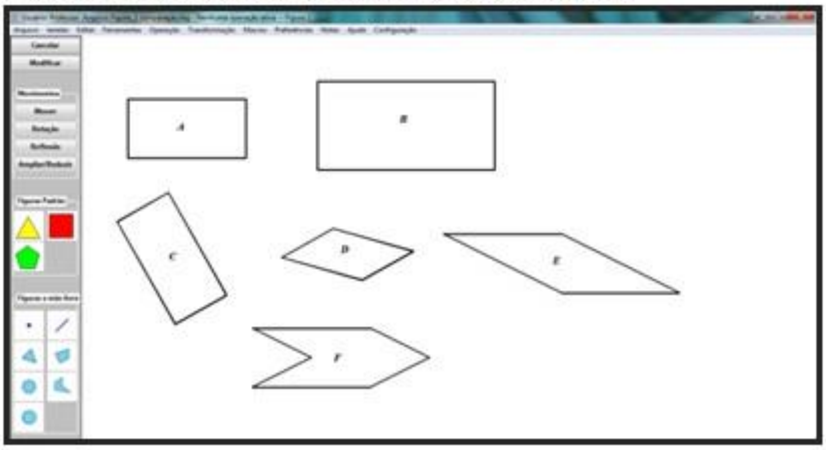
Trata-se de uma situação de comparação de áreas, na qual se solicita que indiquem quais dentre cinco figuras (todas poligonais) tinham a área igual à de um retângulo traçado em posição prototípica (com os lados paralelos às bordas do papel).

[8] Embora essa pesquisa não se caracterize como uma engenharia didática (ARTIGUE, 1996), alguns elementos dessa metodologia inspiraram nossa pesquisa, como é o caso da análise a priori e sua confrontação com a análise a posteriori.

TAREFA 1- (Versão *Apprenti Géomètre 2*)

Abra o arquivo "*tarefa Figure_1.fag*" que está na área de trabalho do seu computador, em seguida clique na opção aluno, escreva seu nome, após esses procedimentos, você deve escolher o menu AB ou AC que contém todas as ferramentas do *Apprenti Géomètre* 2 necessárias à realização desta tarefa, o idioma Português Br. e clicar em OK.

1- Indique quais das figuras abaixo têm mesma área que o retângulo A:



Resposta

____

____

Explique como você fez para responder essa tarefa:

____

____

Pretendíamos identificar que ideia de mesma área os alunos mobilizariam nessa situação. A tarefa foi pensada de modo a bloquear os procedimentos numéricos de comparação, com a intenção de privilegiar a articulação entre os quadros geométrico e das grandezas. Como observado por Ferreira (2010), as situações nas quais o aspecto numérico é central são as mais frequentes nos livros didáticos e, portanto, a tarefa proposta era provavelmente pouco usual para os sujeitos da pesquisa.

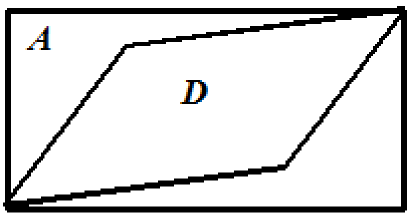
Respostas possíveis esperadas

As figuras que possuem a mesma área que o retângulo A são C, E e F. A área do paralelogramo D é menor que a de A e o retângulo B tem área maior que a de A.

O retângulo C é congruente ao retângulo A, mudando apenas a localização e a posição, e foi incluído para observar se os alunos mobilizariam o teorema-em-ação correto, segundo o qual *a área de uma figura é invariante por isometria*. Para verificar a igualdade das áreas, os alunos precisavam reconhecer o retângulo C, traçado em posição não prototípica e compará-lo com o retângulo A, por sobreposição. As figuras E e F podem ser obtidas a partir de A, por decomposição e recomposição, sem perda nem sobreposição. Se os alunos indicarem essas figuras como tendo mesma área que A, interpretamos como indício da mobilização do teorema-em-ação correto segundo o qual *figuras equidecompostas têm áreas iguais*. Pode-se inferir também que essa resolução se apoia na invariância da área por isometria e na aditividade das áreas (a área da união de duas figuras X e Y, quase-disjuntas[9] é a soma das áreas das figuras X e Y).

É possível verificar por inclusão que o retângulo B tem área maior que a de A. Essa resolução também se justifica pela invariância da área por isometria e pela aditividade das áreas, uma vez que é possível traçar uma figura congruente a A no interior de B e por isso a área de B é maior que a de A. No caso da comparação das áreas de A e D, é possível traçar um paralelogramo congruente a D totalmente contido em A. Para isso, é necessário não apenas transladar o paralelogramo, mas também efetuar uma rotação do mesmo. Como mostra a figura 1, é possível posicionar o paralelogramo D de modo que seus vértices coincidam com os do retângulo A e observar que sua área é menor que a de A, pois parte do retângulo não é coberta por D:

Figura 1 - Sobreposição do paralelogramo D ao retângulo A



Fonte: Silva (2016)

É possível ainda decompor o paralelogramo e recompor suas peças, sem perda nem sobreposição, de modo a obter uma figura de mesma área que D, totalmente contida no retângulo A. Por isso, com base no teorema-em-ação segundo o qual *a área é invariante por isometrias* e na aditividade das áreas, é possível concluir que a área do paralelogramo D é menor que a do retângulo A.

Além das respostas corretas, é possível prever que alguns alunos cometam erros já observados em pesquisas anteriores.

[9] Duas figuras são quase disjuntas quando têm no máximo pontos de fronteira em comum.

Uma resposta que pode ser dada pelos alunos é que nenhuma das figuras tem área igual à do retângulo A. Esse erro é provavelmente baseado na ideia de que a área é a própria região (indício de concepção geométrica da área) e, portanto, ao mudar de localização ou de posição, a área da figura muda.

Outra possibilidade é considerar que apenas a figura C tem mesma área que A, pois são figuras congruentes, variando apenas sua localização e posição. Nesse caso, pode-se inferir que a resposta se apoia no teorema-em-ação falso, segundo o qual *duas figuras de mesma área são necessariamente congruentes*.

Alguns alunos podem pensar que a área está relacionada ao formato das figuras, levando a concluir (erradamente) que A, B e C possuem áreas iguais por serem retângulos.

Pode-se prever também que alguns alunos não reconheçam que as figuras E e F possuem mesma área que A por compararem comprimentos associados a essas figuras (projeções horizontais e verticais, “base” e “altura”, comprimentos dos lados ou o perímetro das figuras) o que levaria a concluir (erradamente) que as áreas de E e de F são maiores que a de A. Uma comparação de “espaço ocupado” em um sentido mais perceptivo e prático também levaria a uma dificuldade de identificar as figuras E e F como tendo mesma área que A.

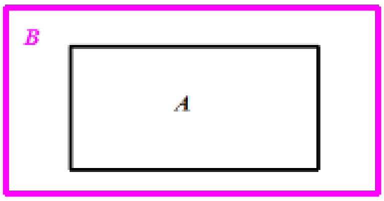
Especificidades dos Procedimentos nos Três Ambientes

Os alunos que utilizaram o ambiente Papel e Lápis (APL) só podiam comparar as áreas das figuras mentalmente, uma vez que não dispunham de nenhum outro material (nem manipulativo nem o software), o que dá ao ambiente uma característica estática e favorece a comparação baseada na percepção. Para verificar a igualdade ou desigualdade das áreas deveriam deslocar (efetuar uma rotação e transladar) uma das figuras e sobrepor à outra mentalmente ou realizar procedimentos de decomposição e recomposição das figuras mentalmente ou riscando na ficha à mão livre. Nos demais ambientes, esse modo de resolver a tarefa também era possível.

No ambiente de Materiais Manipulativos (AMM), o fato de disponibilizar papel manteiga, tesoura e fita adesiva permitia realizar efetivamente o decalque e sobreposição das figuras, bem como o corte-colagem (decomposição e recomposição, sem perda nem sobreposição) para comparar suas áreas. Com esses procedimentos e com base na invariância da área por isometria, podiam verificar que a área de A é igual à de C, menor que a de B e maior que a de D. Essa verificação empírica, articulada com a mobilização do teorema-em-ação segundo o qual *figuras equidecompostas têm áreas iguais*, levava também concluir que as áreas das figuras E e F são iguais à de A.

No *Apprenti Géomètre 2*, os alunos poderiam utilizar a ferramenta *mover* que tem a função de arrastar figuras (translação) e deslocar o retângulo A colocando-o sobre o retângulo B (ou reciprocamente), como ilustra a imagem a seguir:

Figura 2- Inclusão da figura A na figura B



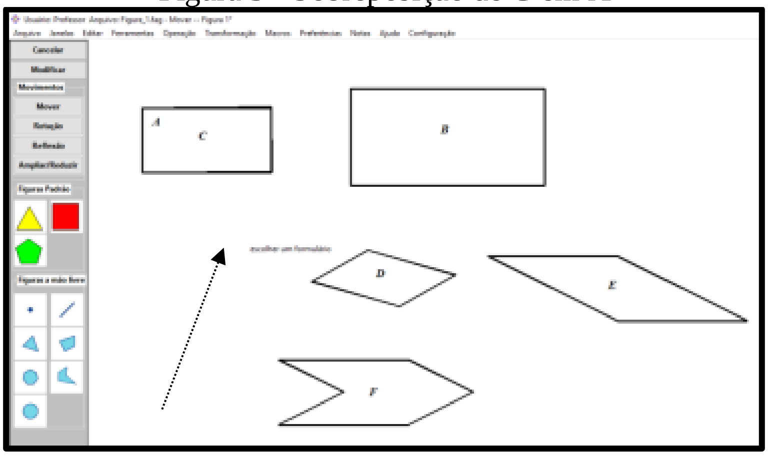
Fonte: Silva (2016)

A mobilização do teorema-em-ação segundo o qual *as isometrias conservam a área*, está subjacente ao procedimento de transladar um retângulo para colocá-lo sobre o outro. Os retângulos A e B estão em posição prototípica (com lados paralelos às bordas da folha de papel) e portanto não é necessário rotacionar nenhum deles para realizar efetivamente a inclusão. Essa ação permite visualizar que A “cabe dentro” de B e concluir, com base na aditividade das áreas, que a área de A é menor que a de B.

Tanto o software como o papel de decalque permitem verificar empiricamente se as figuras são congruentes. Mas é preciso também mobilizar os invariantes operatórios que dão fundamento a esse procedimento, ou seja, se há inclusão estrita, não há igualdade das áreas. Se há sobreposição (figuras congruentes), há igualdade das áreas.

Para comparar as áreas de A e C no *Apprenti Géomètre* 2, os alunos precisavam selecionar a ferramenta rotação, aplicar esse processo deixando a figura C na mesma posição da figura A e em seguida selecionar *mover* do menu *Movimento* para arrastar a figura C sobrepondo-a diretamente ao retângulo A como ilustra a imagem a seguir:

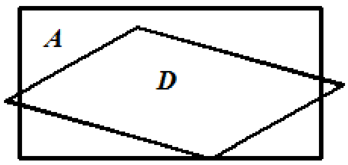
Figura 3 - Sobreposição de C em A



Fonte: Silva (2016).

Com relação à comparação das áreas do paralelogramo D e do retângulo A no ambiente Papel e Lápis, os alunos teriam que realizar esse processo apenas visualmente e no ambiente Materiais Manipulativos poderiam decalcar o paralelogramo com o papel de decalque (manteiga) e o sobrepor ao retângulo A. No *Apprenti Géomètre 2*, poderiam selecionar a ferramenta *mover*, arrastar o paralelogramo D sobrepondo-o ao retângulo A e logo após aplicar rotação central (o que permitiria observar que o paralelogramo "cabe dentro" do retângulo e portanto tem área menor). Caso aplicasse apenas a ferramenta *mover*, como ilustra a figura 4, também poderiam concluir que a área de D é menor que a de A ao perceber que o que "sobra" no paralelogramo tem área nitidamente menor do que o que "resta" no retângulo.

Figura 4- Sobreposição de D em A

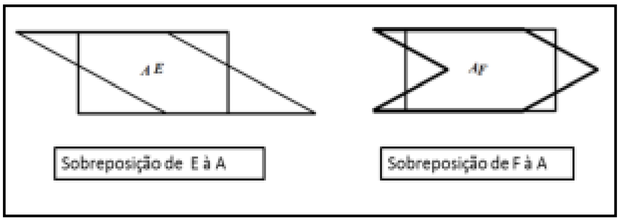


Fonte: Silva (2016)

Quanto à comparação das áreas das figuras A e E, bem como A e F, em qualquer dos três ambientes, resoluções baseadas na percepção podem levar a concluir que as figuras E e F ocupam mais espaço que A, porque são mais "espalhadas" e por isso têm área maior e não igual à de A, conduzindo a erro.

No ambiente Materias Manipulativos os alunos poderiam utilizar o papel manteiga para reproduzir as figuras E e F e sobrepor ao retângulo A. No *Apprenti Géomètre 2* poderiam utilizar a ferramenta *mover* para deslocar as figuras E e F e colocar sobre A. Assim constatariam que as figuras E e A não coincidem por sobreposição (nem tampouco F e A), como mostra a figura 5.

Figura 5- Sobreposição de E e F à A



Fonte: Silva (2016).

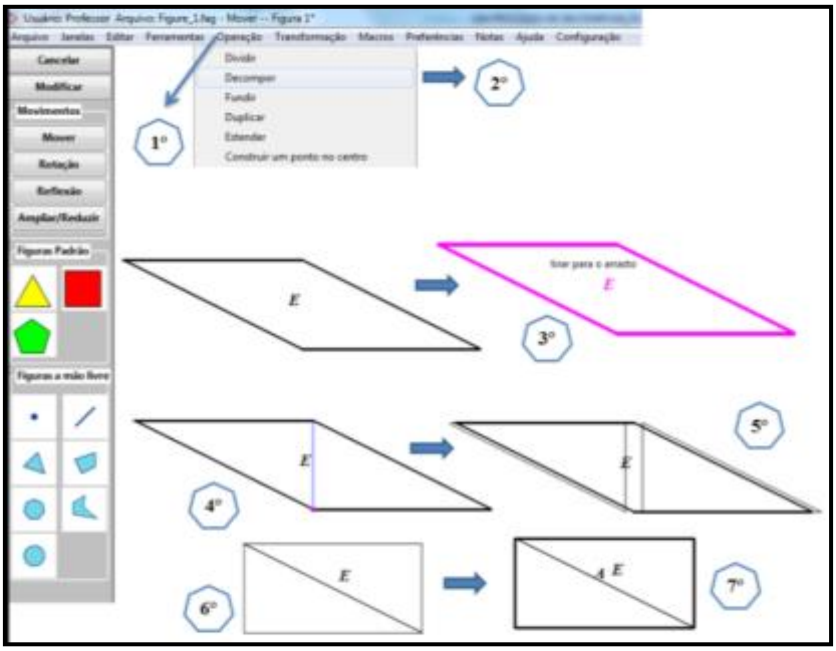
A mobilização do teorema-em-ação falso segundo o qual *figuras de mesma área são necessariamente congruentes* ou do teorema-em-ação equivalente (também falso) - *figuras não congruentes têm necessariamente áreas diferentes* - conduz ao erro de considerar que as áreas de E e de F são diferentes da de A.

Para concluir corretamente que as áreas de E e F são iguais à de A, os processos de decomposição e recomposição estão fortemente em jogo. Esses processos podem ser realizados mentalmente em qualquer dos três ambients, com tesoura e fita adesiva, no ambiente Materiais Manipulativos, ou utilizando funcionalidades do software.

Para decompor o paralelogramo E no *Apprenti Géomètre* 2, é preciso clicar no menu *Operação*, escolher a ferramenta *decompor*, selecionar a figura E, clicar em um dos vértices, arrastar com o mouse até o outro vértice pela diagonal. Formam-se dois triângulos separados. Para compor um retângulo com esses triângulos, utilizam-se algumas das transformações isométricas do plano (translação, rotação ou reflexão) no processo de recomposição das figuras, por meio da utilização das ferramentas do menu *Movimentos* (mover, rotação e reflexão). Em seguida, deve-se escolher a opção *agrupar* do menu editar, e após formar uma nova figura sobrepor ao retângulo A, observando que a nova figura e o retângulo A são congruentes. Pode-se também escolher a ferramenta *fundir* do menu *Operação*, compor definitivamente um retângulo, pela fusão[10] das partes decompostas, e sobrepor ao retângulo A como ilustra o 7º passo da figura 6, que apresenta o processo de decomposição e recomposição do paralelogramo não retângulo E seguido da comparação das áreas de E e A.

[10] Uma figura formada pela fusão de peças pode ser movida pela interface do software sem que suas peças se separem.

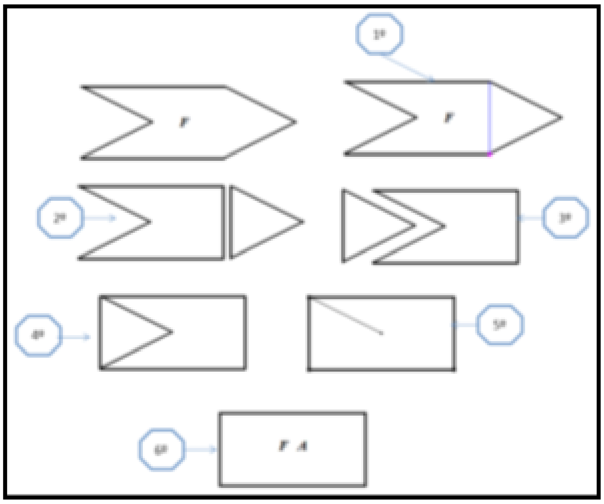
Figura 6 - Decomposição e recomposição de E para comparação das áreas de A e E



Fonte: Silva (2016).

Os mesmos procedimentos podem ser usados para comparar as áreas de F e A.

Figura 7- Decomposição, recomposição e sobreposição da figura F à figura A



Fonte: Silva (2016).

Se o aluno utiliza esses procedimentos e conclui que as figuras A, E e F têm áreas iguais, interpretamos que mobiliza o teorema-em-ação verdadeiro segundo o qual *figuras equidecompostas têm áreas iguais*.

ANÁLISE A POSTERIORI

Reunimos no quadro abaixo as respostas finais dadas pelas duplas após a realização de diversos procedimentos para comparar as áreas das figuras da tarefa 1.

Quadro 1- respostas finais dadas pelas duplas à tarefa

Dupla	Resposta
Dupla 1 Ambiente Papel e Lápis (D1APL)	B e C
Dupla 2 Ambiente Papel e Lápis (D2APL)	C
Dupla 1 Ambiente Materiais Manipulativos (D1AMM)	B e C
Dupla 2 Ambiente Materiais Manipulativos (D2AMM)	C
Dupla 1 Ambiente Apprenti Géomètre 2 (D1AAG2)	C
Dupla 2 Ambiente Apprenti Géomètre 2 (D2AAG2)	B, C, E e F

Todas as respostas dadas pelas duplas estão parcialmente corretas, uma vez que todas as duplas indicaram que a figura C tem área igual à de A. Ou seja, para todas as duplas, o fato de deslocar e girar uma figura não altera sua área, o que interpretamos como indício da mobilização do teorema-em-ação verdadeiro segundo o qual *a área é invariante por isometria*, como exposto na análise a priori.

Três duplas (D2APL, D2AMM e D1AAG2) deram como resposta que apenas o retângulo C possui área igual à de A. O fato de não identificar que, além de C, as figuras E e F também têm áreas iguais à de A pode indicar a mobilização do teorema-em-ação falso, segundo o qual *duas figuras que têm mesma área são congruentes* ou seu equivalente, *figuras não congruentes têm necessariamente áreas diferentes*.

Duas duplas (D1APL e D1AMM) responderam que B e C têm mesma área que o retângulo A. Como indicado na análise a priori da tarefa, interpretamos que essa resposta corresponde à mobilização do formato das figuras como critério de comparação das suas áreas, uma vez que as duas figuras indicadas são retângulos.

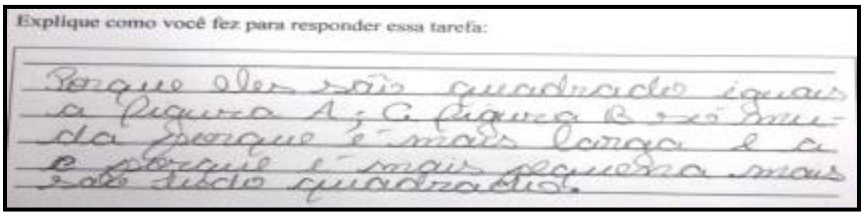
A resposta que mais se aproxima da correta é a da dupla 2 do ambiente *Apprenti Géomètre 2* que identifica as três figuras que têm mesma área que A (C, E e F), mas erra ao indicar uma figura que tem área diferente da de A (no caso, a figura B).

Vamos discutir mais em detalhes o modo como as duplas resolveram, as explicações dadas e a influência das características do ambiente sobre a resolução. Para tanto, as resoluções das duplas são agrupadas por ambientes.

Resoluções das duplas no Ambiente Papel e Lápis

A dupla D1APL realizou um procedimento de comparação visual e concluiu que as áreas das figuras B e C eram iguais à do retângulo A. Sua explicação reforça nossa hipótese de que o critério usado pela dupla foi o do formato da figura:

Figura 8- Extrato de protocolo da dupla D1APL



Fonte: Silva (2016).

A resposta dessa dupla mostra também dificuldades no campo conceitual da geometria (TELES, 2007), uma vez que há confusão entre retângulo e quadrado.

A dupla D2APL realizou uma leitura prévia das figuras, e em seguida expõe verbalmente que apenas a figura C teria a mesma área que a do retângulo A:

Aluna 1: *Eu acho que apenas C tem mesma área.*

Aluna 2: *Por que?*

Aluna 1: *Se a gente girar C e depois colocar em cima de A, cabe direitinho.*

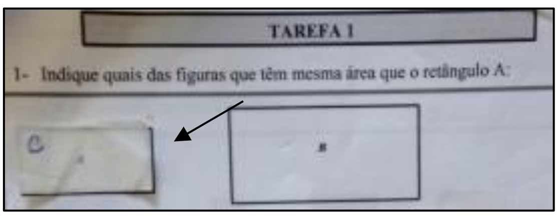
Aluna 2: *Ah*!

Interpretamos a resposta escrita e o diálogo acima como indícios da mobilização do teorema-em-ação verdadeiro segundo o qual *a área é invariante por isometria*, mas também do teorema-em-ação falso segundo o qual *figuras não congruentes têm áreas diferentes*.

Resoluções das duplas no Ambiente Materiais Manipulativos

A dupla D1AMM decalcou as seis figuras com o papel manteiga, recortou o retângulo C e o comparou com a figura A como ilustra a imagem a seguir:

Figura 9 - Extrato inicial do protocolo da D1AMM

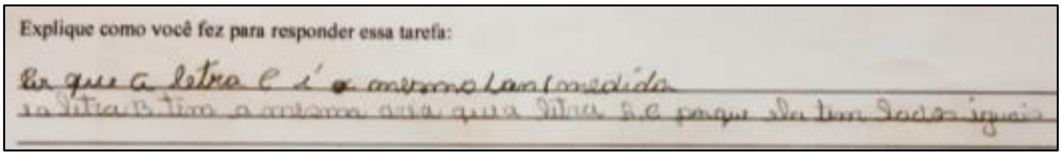


Fonte: Silva (2016).

Após recortar C e sobrepor ao retângulo A, o aluno 1 dessa dupla afirma "*Eita, só a C tem mesma área".* O aluno 2 da dupla contesta "*Eu acho que não, vamos ver essas outras"* (referindo-se às figuras E e F). Para comparar as áreas das figuras E e F, essa dupla também as decalcou e sobrepôs à figura A. Os alunos observam que as figuras não coincidem, o aluno 1 reforça "*Não dá certo em A. Eu disse! E não dá certo também porque são diferentes e C é igual a A*".

Para comparar as áreas das figuras A e B, os alunos dessa dupla afirmaram que elas também possuíam a mesma área "*por causa dos lados"*, como mostra a figura 10:

Figura 10- Extrato do protocolo da dupla D1AMM


Explique como você fez para responder essa tarefa:

Fonte: Silva (2016)

Interpretamos na resposta escrita, nas ações videogravadas e nas falas desses alunos, indícios de mobilização do teorema-em-ação verdadeiro - *a área é invariante por isometrias*. O aluno 1 parece mobilizar o teorema-em-ação falso segundo o qual *figuras não congruentes têm áreas diferentes*. Os alunos 1 e 2 não parecem concordar quanto à comparação da área de A com as das figuras E e F. Ao final, o critério de comparação das áreas que prevalece é o uso do formato das figuras.

A dupla D2AMM realizou procedimento análogo ao da dupla 1 desse ambiente, para comparar a área das figuras C, E e F com a da figura A. Com relação à comparação das áreas de A e B, os alunos decalcaram a figura A e sobrepuseram a B. Para eles, a área de A era menor que a de B, porque A cabia dentro de B, como mostra o extrato do diálogo entre eles. O aluno 1 afirma "*A tem área menor que a de B"* e o aluno 2 completa "*É mesmo, essa é fácil porque dá dentro de A"*.

Como exposto na análise a priori, é possível verificar por inclusão (aliada à mobilização do teorema-em-ação verdadeiro, segundo o qual *a área é invariante por isometria* e da aditividade das áreas) que o retângulo B tem área maior que a de A.

A disponibilização do papel de decalque, da tesoura e a possibilidade de recortar e sobrepor às figuras ampliaram as estratégias de resolução desta tarefa pelos integrantes das duplas deste ambiente em relação às do ambiente Papel e Lápis.

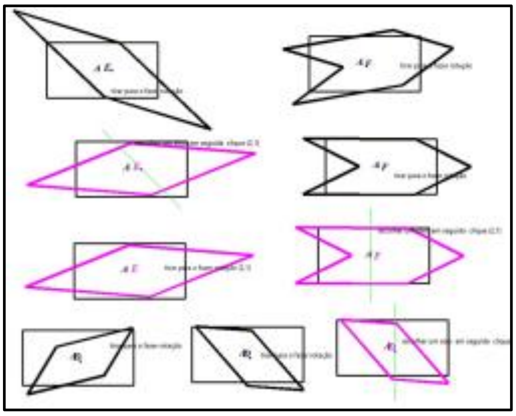
Resoluções das duplas no Ambiente *Apprenti Géomètre* 2

A dupla 1 desse ambiente não explicou na ficha como comparou as áreas das figuras, mas a filmagem, a captura da tela do computador e o histórico das ações gravadas pelo software nos permitiram ter mais evidências sobre as quais apoiamos nossa análise.

Após realizar os comandos solicitados para iniciar a tarefa e antes de começar a utilizar as ferramentas do software para responder a tarefa 1, há uma interação entre os integrantes dessa dupla, que ilustra a comparação das áreas de A e C. O aluno 1 pergunta "*O que é que tu achas?*". E o aluno 2 responde "*Sei não, mas penso que é a C*". O aluno 2 clica na ferramenta *rotação*, realiza uma rotação na figura, depois clica em *mover*, arrasta C e sobrepõe em A. O aluno 1 conclui "*Eita, é mesmo, deu certinho*". Esse diálogo indica que um dos alunos inicialmente tinha dúvidas se as áreas de A e C eram iguais, mas a sobreposição permitiu verificar empiricamente a congruência das figuras e ao final ambos estão convencidos que, apesar das diferenças de localização e posição, as figuras A e C têm mesma área, o que corresponde ao teorema-em-ação segundo o qual *figuras congruentes têm áreas iguais*.

Em seguida, os alunos dessa dupla movimentam as figuras D, E e F, para colocá-las sobre o retângulo A, como mostra a figura 11 na qual há alguns *prints screens* com tentativas de sobreposição das figuras, pela dupla.

Figura 11- Extrato do protocolo da dupla 1 no *Apprenti Géomètre* 2



Fonte: Elaborada pelos autores da pesquisa.

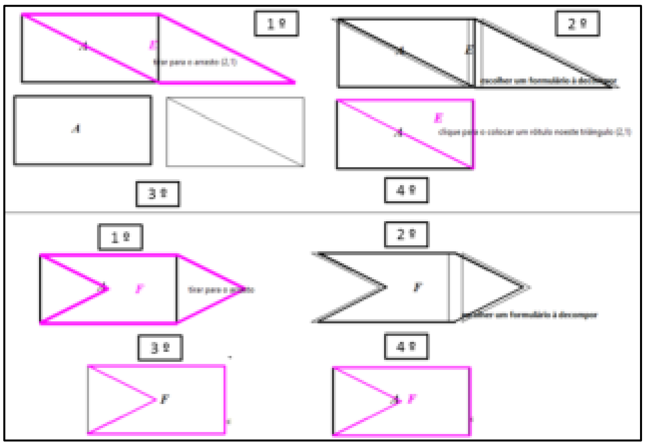
Durante essas tentativas, observa-se o seguinte diálogo entre os alunos da dupla. Referindo-se às figuras D, E e F, o aluno 1 sugere "*Vamos tentar com as outras, acho que pode dar certo*! *A gente arrasta, coloca em cima e depois gira, ou aplica reflexão e vê se dá certo*". O aluno 2 replica: "*Não é girar, é fazer rotação*", empregando o termo utilizado no software, o que indica um processo de apropriação do funcionamento do software e da linguagem empregada nele. Ao mesmo tempo, deve-se destacar que essa dupla não tentou em nenhum momento decompor as figuras para comparar suas áreas.

Na resposta final dada pela dupla D1AG2, apenas C é indicada como tendo mesma área que A e o argumento utilizado é que o retângulo C é idêntico ao retângulo A. Essa resposta, os procedimentos utilizados, os diálogos e as imagens videogravadas apontam para a mobilização do teorema-em-ação falso segundo o qual *figuras não congruentes têm áreas diferentes*.

Os alunos da dupla D2AG2, após aplicarem uma rotação central em C, visualmente, identificaram que essa figura possuía a mesma área que o retângulo A. Interpretamos que esses alunos mobilizaram um teorema-em-ação verdadeiro segundo o qual *a isometria conserva a área*.

Para comparar as áreas de E e F com a de A, essa dupla realizou a decomposição e recomposição sem perda nem sobreposição, obtendo uma figura congruente a A, como ilustramos a seguir:

Figura 12- Extrato do protocolo da dupla D2AG2



Fonte: Elaborada pelos autores da pesquisa.

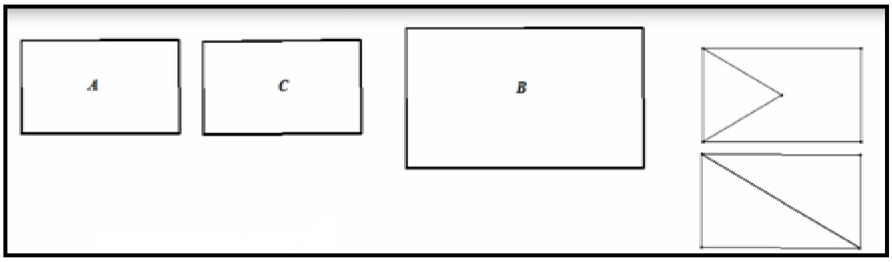
Interpretamos que a dupla, ao realizar esse procedimento de decomposição, mobilizou o teorema-em-ação verdadeiro, segundo o qual *figuras equidecompostas têm áreas iguais*.

Com relação à figura D, a dupla D2AG2 considerou que tem área menor que a do retângulo A. Ela realizou várias tentativas de sobreposição, corte-colagem, rotação, como se tentassem obter uma superfície possível de ser comparada por sobreposição com o retângulo A. A transcrição das falas dos alunos dessa dupla traz os argumentos usados. O aluno 1 referindo-se a não conseguirem compor um retângulo com a decomposição realizada diz: "*Não tem jeito*", e o aluno 2 afirma: "*Eu acho que ela tem área menor, coloca em cima de A para ver*". Então, referindo-se à figura D, o aluno 1 conclui: "*É mesmo, faltam pedaços para completar*".

Nessa comparação, observamos indícios de teoremas-em-ação verdadeiros: *isometrias conservam a área* e *figuras equidecompostas têm áreas iguais. a decomposição e recomposição sem perda nem sobreposição conserva as áreas* e *a* a *área da união de duas figuras X e Y, quase-disjuntas é a soma das áreas das figuras X e Y,* o que permitiu concluir corretamente que a área de D é menor que a de A.

Por fim, a dupla 2 chega à conclusão que as figuras B, C, E e F possuem as mesmas áreas que A e organizaram da seguinte forma:

Figura 14 - Protocolo final da dupla D2AG2



Fonte: Silva (2016)

Identificamos indícios da mobilização de teoremas-em-ação verdadeiros: *isometrias conservam a área* (ao deslocar e girar as figuras para comparar áreas), *figuras equidecompostas têm áreas iguais* (ao realizar decomposições e recomposições das figuras E, F e D). Por outro lado, a indicação da figura B como tendo mesma área que A parece-nos apontar para outro critério de comparação ancorado em um teorema-em-ação falso segundo o qual *figuras que têm mesmo formato possuem áreas iguais*.

A possibilidade do uso das ferramentas que permitem *decompor*, *duplicar*, aplicar as transformações isométricas do plano (translação – *mover*, *rotação* e *reflexão*), presentes no *Apprenti Géomètre* 2, mostraram-se pertinentes para a comparação das áreas das figuras, ampliando a mobilização de diferentes estratégias de resolução desta tarefa.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Como já foi dito, esse texto traz um recorte de nossa dissertação de mestrado, do qual podemos extrair algumas considerações. Nesse texto, apresentamos nossas análises de uma tarefa de comparação de área em três ambientes Papel e Lápis, Materiais Manipulativos e no software de geometria *Apprenti Géomètre* 2.

A tarefa proposta é pouco familiar aos alunos, uma vez que, em geral, no ensino é enfatizada a abordagem numérica das tarefas sobre área. Apesar disso, os sujeitos da pesquisa mostraram dominar parcial ou plenamente na comparação das áreas das figuras procedimentos de inclusão e sobreposição. Percebemos nas resoluções de todas as duplas indícios da mobilização do teorema-em-ação verdadeiro segundo o qual *a área é invariante por isometrias*, subjacente à identificação do retângulo C, em posição não prototípica, como tendo mesma área que o retângulo A e em muitos outros momentos ao longo da resolução da tarefa pelas duplas.

Uma das duplas do ambiente *Apprenti géomètre 2* também usou o corte-colagem, o que interpretamos como indício da mobilização do teorema-em-ação verdadeiro segundo o qual *a decomposição e recomposição sem perda nem sobreposição conserva as áreas* ou ainda *figuras equidecompostas têm áreas iguais*. A invariância da área por decomposição e recomposição sem perda nem sobreposição é um aspecto importante para a superação das concepções geométricas e para a construção do sentido da área como grandeza autônoma (DOUADY; PERRIN-GLORIAN, 1989) e os dados da pesquisa apontam para um domínio insuficiente dessa propriedade pelos sujeitos.

As resoluções dos alunos também sinalizaram a mobilização de teoremas-em-ação falsos, com ênfase para *duas figuras que têm mesma área são congruentes* (ou o teorema-em-ação equivalente segundo o qual *figuras não congruentes têm necessariamente áreas diferentes*) e *figuras com mesmo formato têm mesma área* que parecem estar em jogo respectivamente quando as duplas respondem que apenas a figura C (congruente a A) tem mesma área que A ou que dentre as figuras, os retângulos B e C são os que têm mesma área que A.

Observamos que a ideia de ter mesma área para os sujeitos da pesquisa, na resolução dessa tarefa de comparação, estava relacionada a diferentes critérios: figuras congruentes, figuras com mesmo formato ou figuras equidecompostas.

Cabe ressaltar que figuras congruentes têm sempre áreas iguais, embora figuras com áreas iguais não precisem ser congruentes. Figuras com mesmo formato podem ter áreas iguais, embora haja figuras com mesmo formato com áreas diferentes. Utilizar o critério de equidecomposição (em jogo no procedimento de decomposição e recomposição sem perda nem sobreposição) é mais abrangente e é suficiente para comparar de modo adequado as áreas das figuras da tarefa proposta. A predominância dos critérios de congruência e mesmo formato nas resoluções dos alunos é interpretada por nós, em ambos os casos, como indício de concepções geométricas de área.

Quanto às características dos ambientes e o modo como as duplas resolveram a tarefa, observamos que, como previsto na análise a priori, as duas duplas do ambiente Papel e Lápis resolveram visualmente e os ambientes materiais manipulativos e *Apprenti Géomètre* 2 ofereceram a possibilidade de resolver a tarefa de maneira dinâmica (decalcando, deslocando, cortando e colando efetivamente as figuras ou utilizando as ferramentas do menu do software), ampliando as possibilidades de ação oferecidas pelo ambiente Papel e Lápis.

No ambiente Materiais Manipulativos, os sujeitos decalcaram figuras e realizaram sobreposição, mas contrariamente ao que esperávamos, nenhuma das duplas utilizou a decomposição e recomposição das figuras, embora os artefatos disponibilizados permitissem fazer isso empiricamente. A análise das resoluções dos alunos deve então apoiar-se em uma combinação das características do ambiente com os conhecimentos mobilizados pelos sujeitos. O fato de não utilizar o corte-colagem sem perda nem sobreposição pode ser consequência da falta de hábito com esse tipo de recurso em sala de aula como também da convicção de que, ao cortar e colar, a área da figura se altera (teorema-em-ação falso).

Do mesmo modo, no *Apprenti géomètre 2*, as duas duplas movimentaram as figuras usando as funcionalidades do software, o que interpretamos como a mobilização do teorema-em-ação segundo o qual *a área é invariante por isometrias*. Por outro lado, apenas uma das duplas utilizou a decomposição e recomposição das figuras para realizar a comparação das áreas. Como no caso do ambiente Materiais Manipulativos, as características do ambiente favorecem o corte-colagem. O fato de não utilizá-lo pode ser resultante dos conhecimentos dos alunos ou da familiaridade insuficiente com o software.

Observamos que o modo como os sujeitos interagem com os recursos depende de seus conhecimentos, ao mesmo tempo que os recursos utilizados influenciam os procedimentos empregados na resolução das tarefas. A pesquisa evidenciou as limitações do ambiente Papel e Lápis em relação aos dois outros ambientes investigados.

Disponibilizar uma pluralidade de recursos pode ser uma importante iniciativa para que os alunos utilizem procedimentos diversificados na resolução das tarefas. Contudo, é preciso também que se desenvolva a familiaridade com os recursos para que os alunos possam utilizá-los plenamente e que construam os conhecimentos subjacentes aos procedimentos de resolução das tarefas.

REFERÊNCIAS

ARTIGUE, M. Engenharia Didática. In: BRUN, J. **Didática das Matemáticas**. Tradução de: Maria José Figueiredo. Lisboa: Instituto Piaget, 1996. Cap. 4. p. 193-217.

BALDINI, L. A. F. **Construção do conceito de área e perímetro**: uma sequência didática com auxílio de software de geometria dinâmica. 2004. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2004.

BALTAR, P. M. **Enseignement et apprentissage de la notion d'aire de surfaces planes**: une étude de l'acquisition des relations entre les longueurs et les aires au collège. 1996. Tese (Doutorado em Didática da Matemática) , - Université Joseph Fourier, Grenoble, França, 1996.

BELLEMAIN, P. M. B.; LIMA, P. F. **Um estudo da noção de grandeza e implicações no Ensino Fundamental**. Ed. Geral: John A. Fossa. Natal: SBHMat, 2002.

CREM, Apprenti Géomètre. **Impact du logiciel Apprenti Géomètre sur certains apprentissages.** Tome 2. Nivelles, Bélgica, Ministère de la Communauté Française, 2007.

DOUADY, R.; PERRIN-GLORIAN, M. J. Un processus d'apprentissage du concept d'aire de surface plane. **Educational Studies in Mathematics**. v. 20, n. 4, p. 387-424, 1989.

DUARTE, J. H. **Análise de Situações Didáticas para a Construção do Conceito de Área, como Grandeza, no Ensino Fundamental**. 2002. Dissertação (Mestrado em Educação) .- Centro de Educação, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2002.

FACCO, S. R. **Conceito de área**: uma proposta de ensino-aprendizagem. 2003. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, PUC/SP, São Paulo, 2003.

FERREIRA, L. de F. D. **A construção do conceito de área e da relação entre área e perímetro no 3º ciclo do ensino fundamental**: estudos sob a ótica da teoria dos campos conceituais. 2010. Dissertação (Mestrado em Educação) -. Centro de Educação, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2010.

FERREIRA, L. de F. D.; BELLEMAIN, P. M. B. **Estratégias utilizadas por alunos do 6º ano em questões da OBEMEP sobre as grandezas comprimento e área**. 2013. Disponível em: < http://sbem.web1471.kinghost.net/anais/XIENEM/pdf/2899_1501_ID.pdf> Acesso em: 23 de fevereiro de. 2016.

LIMA, P. F.; BELLEMAIN, P. M. B. Habilidades matemáticas relacionadas com grandezas e medidas. In: FONSECA, M. (Org.). **Letramento no Brasil**: habilidades matemáticas reflexões a partir do NIAF 2002. São Paulo: Global, 2004.

PESSOA, G. S. **Um estudo diagnóstico sobre o cálculo da área de figuras planas na malha quadriculada**: influência de algumas variáveis. 2010. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) - Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica, Universidade Federal de Pernambuco, 2010.

PORTAL DO LEMATEC. *Home*. Disponível em: <http://www.lematec.no-ip.org/>. Acesso em: 27 de dezembro de. 2016.

SILVA, A. D. P. R. da. **Ensino e aprendizagem de área como grandeza geométrica**: um estudo por meio dos ambientes papel e lápis, materiais manipulativos e no Apprenti Géomètre 2 no 6º ano do ensino fundamental. 2016. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e

Tecnológica) - Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2016.

TELES, R. A. de M. **Imbricações entre os campos conceituais das grandezas geométrica e suas medidas, da álgebra e das funções**: um estudo sobre as fórmulas de área no ensino fundamental. 2007. Tese (Doutorado em Educação) . - Centro de Educação, UFPE, Recife, 2007.

VERGNAUD, G. A Teoria dos Campos Conceptuais. In: BRUN, JEAN. **Didática das Matemáticas**. Tradução: Maria José Figueiredo. Lisboa: Instituto Piaget – Horizontes Pedagógicos, p. 155-191, 1996. p. 155-191.