em teia
Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana
Universidade Federal de Pernambuco
ISSN 2177-9309
Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica
EDUMATEC

ETAPAS DE ESCOLHA INFLUENCIAM A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COMBINATÓRIOS?
A comparação entre produtos cartesianos e permutações

Danielle Avanço Vega[1]
Mestre em Educação Matemática e Tecnológica
EDUMATEC – PE – Brasil
danielleavanco@yahoo.com.br

Resumo

Uma das variáveis que pode influenciar na resolução dos problemas combinatórios são as etapas de escolha, que, de acordo com Vega (2014), referem-se ao número de escolhas que devem ser efetuadas nos problemas. A base dessa pesquisa é a Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud que retrata três dimensões fundamentais de um conceito: os invariantes, as situações que dão significado e as representações simbólicas. A pesquisa foi realizada com 24 alunos do 6º ano do Ensino Fundamental respondendo a um teste de sondagem que buscou comparar a influência do número de etapas de escolha na resolução de dois tipos de problemas combinatórios: problemas de produto cartesiano e de permutação. Estudos anteriores consideram o problema de produto cartesiano como o de mais fácil resolução para os alunos e o problema de permutação o mais difícil. Como essa pesquisa é um recorte de um estudo maior realizado com 128 alunos do 6º ano do Ensino Fundamental, respondendo a seis tipos de testes de sondagem, que compararam todos os tipos de problemas combinatórios, foi possível verificar uma inversão nos resultados obtidos anteriormente. Percebeu-se que a permutação era mais fácil que o produto cartesiano, quando se controlou o número de etapas de escolha nos problemas combinatórios.

Palavras-Chave: Problemas. Combinatória. Etapas de escolha. Produto cartesiano. Permutação.

Do steps of choice influence the solution of combinatorial problems? The comparison between Cartesian products and permutations

Abstract

One of the variables that may influence the solution of combinatorial problems are the steps of choice, that, according to Vega (2014), refers to the number of choices to be made on the problems. The basis of this research is Vergnaud's Theory of Conceptual Fields which depicts three fundamental dimensions of a concept: the invariants, the situations that give meaning and symbolic representations. The survey was conducted with 24 students of the 6th year of Elementary School responding to a test

[1] Esse estudo foi desenvolvido sob a orientação da Profa. Dra. Rute Elizabete de Souza Rosa Borba, resborba@gmail.com

aimed to compare the influence of the number of steps of choice in solving two types of combinatorial problems: Cartesian product problems and permutations. Previous studies considered the Cartesian product problem the easiest one for students while permutation problem was the most difficult. As this research is a cutout of a larger study of 128 students from the 6th grade of Elementary School, accounting to six types of survey tests, comparing all types of combinatorial problems, we observed a reversal in the results obtained previously. It was noticed that permutation problems were easier than Cartesian products when the number of steps of choice was controlled in combinatorial problems.

Keywords: Problems, Combinatorics, Steps of choice, Cartesian product, Permutation.

INTRODUÇÃO

Para responder a pergunta do título de forma coerente, faz-se necessário pensar sobre a resolução de problemas combinatórios. Mas suas resoluções nem sempre envolvem uma única operação ou fórmula, isso porque esse tipo de problema abrange diversos raciocínios e, por vezes, uma simples listagem dos elementos dados no problema, ou outro procedimento informal, pode auxiliar ou até mesmo levar à resolução adequada. Segundo Pessoa e Borba (2010), os problemas combinatórios devem ser pensados em seus diferentes significados de acordo com cada situação combinatória. O que acontecia de forma geral nos currículos escolares era uma separação dessas situações combinatórias, no qual o *produto cartesiano* era nitidamente a única situação explorada nos anos iniciais do Ensino Fundamental, enquanto que o *arranjo, a combinação* e a *permutação* eram situações cogitadas somente no Ensino Médio, quando abordado o conteúdo de Análise Combinatória.

Pensando em unificar o estudo de Combinatória, Pessoa e Borba (2009) estabeleceram que os quatro tipos de situações combinatórias (*produto cartesiano*, *permutação*, *arranjo e combinação*) precisam e devem ser propostos aos alunos desde os anos iniciais da escolarização básica. Nesse caminho, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) orientam que o objetivo do ensino de Combinatória é "levar o aluno a lidar com situações-problema que envolvam combinações, arranjos, permutações e, especialmente, o princípio multiplicativo da contagem" (BRASIL, 1997, p. 40).

Frente a essa direção, percebe-se que para desenvolver o raciocínio combinatório de alunos faz-se necessário um ensino com os diferentes tipos de problemas combinatórios (*arranjos*, *combinações*, *permutações* e *produtos cartesianos*), abrangendo diversos recursos para a resolução de situações combinatórias, dentre elas o princípio fundamental da contagem, também conhecido como princípio multiplicativo. Espera-se que expor o aluno ao conhecimento combinatório possa gerar um desenvolvimento amplo do raciocínio combinatório. O desenvolvimento do raciocínio combinatório pode vir a contribuir para uma gradativa superação de erros e dificuldades que inicialmente foram expostos, possibilitando, assim, uma melhor apropriação desse conhecimento quando acontecer o aprendizado sistemático no Ensino Médio.

O raciocínio combinatório, segundo Borba (2010), é uma forma de pensar sobre as situações que abrangem o levantamento de possibilidades, observando certas condições, como as relações de ordem, repetição e escolha de elementos, dentre outras. Dessa forma, o raciocínio vai incitar competências complexas que juntamente com a proposta de ensino da escola servirá de base para o estímulo e as resoluções de situações problemas.

Esse raciocínio combinatório pode e deve ser estimulado desde o início com alunos nos primeiros anos de escolaridade, como visto em estudos anteriores (MORO; SOARES, 2006, PESSOA; BORBA, 2009; MAHER; YANKELEWITZ, 2010). Assim, mesmo antes do ensino de Análise Combinatória, usualmente proposto no segundo ano do Ensino Médio, verifica-se que os alunos, em anos escolares anteriores, distinguem algumas relações combinatórias – como a apropriada escolha de elementos de um conjunto para combiná-los, porém apresentam dificuldades em outras relações combinatórias, como a consideração, ou não, da ordem dos elementos e o esgotamento de todas as possibilidades – sendo preciso haver uma intervenção de ensino para que haja um gradativo ganho de conhecimento.

Entretanto, frente às dificuldades descritas, cabe ressaltar que foi possível detectar conhecimentos intuitivos da Combinatória em alunos bem novos, como os da Educação Infantil, destacado nos estudos de Matias, Santos e Pessoa (2011) e Pessoa e Borba (2012). Confirma-se, assim, mais uma vez, a necessidade de se trabalhar com os diferentes problemas combinatórios desde o início dos anos escolares, pois irá possibilitar um ganho no raciocínio combinatório do aluno.

Quando há uma abordagem dos diferentes tipos de problemas combinatórios (*produto cartesiano*, *arranjo*, *combinação* e *permutação*), alguns estudos (PESSOA; BORBA, 2010, CORREA; OLIVEIRA, 2011) detectaram que o problema de *produto cartesiano* mostrou ser o significado de melhor desempenho pelos alunos. Em contrapartida, as maiores dificuldades apresentadas pelos estudantes foram identificadas nas resoluções dos problemas de *permutação*. Contudo, esses estudos que indicavam a *permutação* como problema combinatório mais difícil para alunos de anos iniciais não verificaram o efeito do número de etapas de escolha de elementos.

E o que seriam as *etapas de escolha*? Para Vega (2014), essas etapas fazem referência ao número de escolhas que precisam ser executadas em problemas combinatórios. Por exemplo, em um problema de *produto cartesiano* as etapas podem ser entendidas como a possibilidade em escolher e combinar comida e bebida num contexto de lanchonete, podendo optar por um dentre cinco tipos de sanduíche e um dentre quatro tipos de suco, sendo duas as etapas de escolha: o tipo de sanduíche (5) e o tipo de suco (4), resultando em 20 possibilidades diferentes de agrupamentos. Esse exemplo de problema apresentou duas *etapas de escolha*. Em um mesmo tipo de problema com três etapas de escolha, além da comida (tipo de sanduíche) e da bebida (tipo de suco), acrescentar-se-ia a sobremesa, obtendo-se assim mais uma etapa. Essa mesma situação combinatória pode apresentar quatro etapas de escolha, basta acrescentar mais uma opção de combinação, como a forma de pagar o lanche feito na lanchonete.

Para exemplificar as etapas de escolha nos problemas de *permutação*, destacado em estudos anteriores (PESSOA; BORBA, 2010; CORREA; OLIVEIRA, 2011) como o tipo de problema combinatório em que os alunos apresentam mais dificuldade de resolução, pode-se pensar em situações combinatórias, em que, para se permutar três pessoas numa fila, cada posição ocupada na fila corresponde a uma etapa de escolha. A primeira pessoa da fila equivale à primeira etapa de escolha, a segunda pessoa corresponde à segunda etapa de escolha e a terceira pessoa corresponde à terceira etapa de escolha, resultando em seis possibilidades de permutações, pois a primeira posição da fila pode ser ocupada por uma das três pessoas, a segunda posição poderá ser ocupada por uma das outras duas pessoas, visto que uma já está na outra posição, e a terceira posição poderá ser ocupada somente por uma pessoa, ou seja, a última pessoa que restou. Acrescentando apenas mais uma pessoa na fila, obter-se-ia uma permutação com quatro etapas, pois seriam efetuadas quatro escolhas.

Quando se pensa no exemplo citado acima de *produto cartesiano* que resultou em 20 possibilidades (combinando cinco tipos de sanduíches com quatro tipos de suco), e se compara com o problema de *permutação* que obteve como resultado seis possibilidades, acredita-se que o problema com maior resultado deve ser o mais difícil. Contudo, não foi esse o resultado obtido nos estudos de Pessoa e Borba (2010) e de Correa e Oliveira (2011), em que a *permutação* demonstrou ser mais difícil para alunos em início de escolarização, mesmo apresentando resultado final menor que os problemas de *produto cartesiano*.

Essa tendência em acreditar que os problemas que apresentam resultado final maior podem parecer mais difíceis foi objeto de pesquisa dos estudos de Pessoa e Borba (2009) e Teixeira, Campos, Vasconcellos e Guimarães (2011). Esses estudos apontaram que a grandeza numérica pode ser um dos fatores que influencia o desempenho dos alunos em problemas combinatórios, ou seja, o problema que resultou em seis possibilidades seria de mais fácil resolução que o problema que apresentou um total de 20 possíveis agrupamentos. Contudo, ressalta-se que o problema de *produto cartesiano* citado apresenta somente duas etapas de escolha e no exemplo de *permutação* mencionado há três etapas de escolha, indicando que as etapas de escolha podem ter influenciado nesse desempenho.

Essa comparação das *etapas de escolha* é um dos diferentes fatores que podem influenciar a resolução dos alunos em Combinatória e foram relatadas em alguns estudos (BORBA; VEGA; SILVA; MARTINS, 2013; VEGA, 2014; VEGA; BORBA, 2014a; 2014b; 2015). Outro fator que também é relevante e já foi mencionado anteriormente remete-se à ordem de grandeza do número de possibilidades (PESSOA; BORBA, 2009; TEIXEIRA; CAMPOS; VASCONCELLOS; GUIMARÃES, 2011). É possível destacar também que os tipos de problemas e suas respectivas relações e propriedades foram ressaltados por Pessoa e Borba (2007) como um dos fatores que influencia o desempenho dos alunos na resolução de situações combinatórias.

Além desses, outros fatores também podem influenciar na resolução de estudantes, como a descrição dos valores das variáveis em problemas combinatórios - destacado nos estudos de Correia e Oliveira (2011) -, a explicitação de possibilidades no enunciado dos problemas - objeto de estudo de Silva e Spinillo (2011) -, a influência do desenvolvimento cognitivo - apontado por Inhelder e Piaget (1976) e por Moro e Soares (2006) -, e a influência do aprendizado escolar - enfatizado por Fischbein (1975) e por Schliemann (1988).

No presente artigo foi analisada parte do estudo de Vega (2014) que examinou a influência do número de *etapas de escolha* na resolução dos problemas combinatórios, almejando refletir sobre a facilidade em resolver um determinado tipo de problema em comparação com outro. Neste artigo, o destaque recai sobre os problemas de *produto cartesiano* e de *permutação,* por serem considerados problemas de maior facilidade e maior dificuldade de resolução, respectivamente. Busca-se, assim, contribuir para que o desenvolvimento do raciocínio combinatório seja estimulado nos anos iniciais, investigando mais um fator que pode influenciar o desenvolvimento desse modo de pensar que se insere no campo das situações multiplicativas, discutidas a seguir.

TIPOS DE PROBLEMAS E ETAPAS DE ESCOLHA EM SITUAÇÕES COMBINATÓRIAS

O campo conceitual das estruturas multiplicativas engloba a Combinatória. Segundo Vergnaud (1986, p. 84), campo conceitual é “um conjunto de situações cujo domínio requer uma variedade de conceitos, de procedimentos e de representações simbólicas em estreita conexão”. Partindo dessa visão, é possível verificar que o campo conceitual é formado por um "tripé de três conjuntos" (VERGNAUD, 1986, p. 83) no qual o primeiro conjunto é formado por *situações que dão significado* ao conceito, o segundo conjunto é composto por propriedades *invariantes* do conceito e o terceiro conjunto envolve as *representações simbólicas* usadas para representar e operar com o conceito. As três dimensões da Combinatória são observadas no presente artigo através da comparação do desempenho dos alunos nos problemas com *significados* variados (*produto cartesiano e permutação*), por meio da abordagem de relações *invariantes* nos distintos problemas, em particular, no número de *etapas de escolha* sendo controladas, e com a análise das *representações simbólicas* utilizadas pelos estudantes para resolver os problemas combinatórios.

As situações que dão significado ao conceito de Combinatória destacadas no presente artigo são os *produtos cartesianos* e as *permutações.* Contudo, torna-se necessário ressaltar que os diferentes tipos de problemas combinatórios (*produto cartesiano, arranjo, combinação* e *permutação*) fazem parte do campo conceitual da Combinatória e seus significados são explicados com precisão por Barreto e Borba (2011, p. 2):

> O problema que envolve o *produto cartesiano* é composto, no mínimo, por dois conjuntos básicos, sendo necessário, combinar cada elemento de um conjunto com cada elemento do outro para formar o conjunto-solução. A operação com problemas que envolvem o *arranjo*, a *permutação* e a *combinação*, consiste basicamente, em formar subconjuntos, a partir de um conjunto, atendendo a determinadas condições peculiares a cada um desses significados (com todos os elementos – no caso da *permutação* – ou com alguns dos elementos – nos casos do *arranjo* e da *combinação* e levando em consideração se a ordem dos elementos gera, ou não, novas possibilidades). Portanto, nesses casos, o *raciocínio combinatório* se desenvolverá na organização dos elementos de um conjunto básico, diferente do *produto cartesiano* que envolve a associação entre dois ou mais conjuntos básicos.

Algumas das relações presentes nas situações combinatórias são a ordenação, a repetição e a escolha de elementos, porém Borba e Braz (2012) destacam outras relações existentes em problemas condicionais, observando uma maior complexidade nessas relações através da seleção de alguns elementos, da ordenação específica, da posição e da proximidade de elementos. Essas situações condicionais não serão abordadas no presente artigo, embora se façam presentes em diversos problemas combinatórios.

As propriedades invariantes das situações combinatórias são destacadas por Pessoa e Borba (2009) em cada tipo de problema combinatório, *produtos cartesianos*, *permutações*, *combinações e arranjos*. Nos problemas de *produto cartesiano* o invariante é a escolha de elementos a partir dos conjuntos apresentados nos problemas. O interessante é que este é o único tipo de problema combinatório que envolve a escolha de elementos a partir de dois ou mais conjuntos. Em uma situação que requer a escolha de três conjuntos dados, por exemplo, o primeiro conjunto composto por dois tipos de massa de uma pizza (fina ou grossa), o segundo composto por três opções de borda (catupiry, cheddar ou parmesão) e o terceiro conjunto formado por quatro tipos de recheios (calabresa, mussarela, portuguesa ou atum), o conjunto resultante será formado pelos agrupamentos constituídos de um elemento de cada um dos três conjuntos. Esse novo conjunto será formado pelo agrupamento de todas as possibilidades possíveis de tipo de massa, com borda e recheio, formando o conjunto das pizzas, no qual será necessário combinar massa fina com todas as opções de borda e com todas as opções de recheio e, da mesma forma, deve ser feito com a massa grossa. Nos problemas do tipo *produto cartesiano* o invariante destacado é a escolha de elementos, não se aplicando a ordem dos elementos nesse tipo de problema.

Já nos problemas de *permutação,* o invariante destacado é a ordem, no qual há um conjunto de elementos, do qual todos os elementos devem ser utilizados e permutados entre si. Por exemplo, em um conjunto composto por três amigos (Marcos, André e Carolina) que desejam tirar uma foto juntos, um ao lado do outro, um possível agrupamento poderia ser Marcos no meio, André do lado esquerdo e Carolina do lado direito. Outro agrupamento poderia ser uma foto no qual André ficasse no meio, Marcos ao lado direito e Carolina ao lado esquerdo. Nestes casos as fotos sairiam diferentes, portanto, a ordem em que os elementos se posicionam na foto gera novas permutações, portanto, a ordenação dos elementos influencia no número de possibilidades desse tipo de situação.

Mesmo não sendo o foco deste artigo comparar todos os tipos de problemas combinatórios, cabe destacar os invariantes de todos os problemas combinatórios, incluindo os problemas de *combinação* e de *arranjo,* para que fique clara a escolha da comparação dos tipos de problemas propostos: *produto cartesiano e permutação*. Com relação aos problemas de *combinação,* o invariante relaciona-se à escolha, contudo de forma diferente ao que acontece nos problemas do tipo *produto cartesiano*, pois há apenas um conjunto, no qual é preciso escolher alguns dos elementos para se formar distintos subconjuntos. Sendo assim, em uma situação na qual é dado um conjunto com seis animais (cachorro, gato, passarinho, ratinho, peixe e tartaruga), dos quais é preciso combinar somente três deles, um agrupamento será formado pela escolha de cachorro, gato e passarinho, outro formado por cachorro, gato e ratinho e, assim por diante, até serem esgotadas todas as possibilidades de agrupamento. Nos problemas de *combinação* a ordem das escolhas não gera novas possibilidades, pois escolher um cachorro, um gato e uma tartaruga é o mesmo que escolher uma tartaruga, um gato e um cachorro. Portanto, o invariante destacado nesse tipo de problema é a escolha de elementos dentre os apresentados num dado conjunto.

Nos problemas de *arranjo*, o invariante destacado é a ordem; diferentemente do que acontece nos problemas de *produto cartesiano* e *combinação*, a ordem irá gerar novas possibilidades, assim como nos problemas de *permutação*. Em situações de *arranjo* tem-se um conjunto do qual são formados agrupamentos dentre os elementos dados e a ordem dos elementos determina a formação de novas possibilidades. Por exemplo, em um conjunto formado por quatro alunos (Davi, Pedro, Marcos e Léo) que disputam uma corrida podem ser dados o primeiro, o segundo e o terceiro lugar. Nesse caso, a ordem irá formar novas possibilidades, pois o agrupamento Pedro, Davi e Léo gera novas possibilidades à medida que a classificação do pódio é modificada, ou seja, Pedro em primeiro, Davi em segundo e Léo em terceiro lugar é diferente do agrupamento de Davi em primeiro, Pedro em segundo e Léo em terceiro.

Com a descrição e exemplificação de cada tipo de problema combinatório (*produto cartesiano, combinação, arranjo e permutação*) percebe-se a natureza de distintos invariantes, ora referentes à escolha dos elementos, ora referentes à ordenação. A observação de quais invariantes estão sendo mobilizados em um determinado tipo de problema pode auxiliar na compreensão e resolução dos problemas.

Quando se pensa nas situações combinatórias distintas, percebe-se que em certos casos serão utilizados todos os elementos do conjunto apresentado, como nos problemas de *permutação*, no qual se permuta todos os elementos do conjunto dado para se formar agrupamentos distintos. Em outros casos, como nos problemas de *arranjo*, *combinação* e *produto cartesiano*, utilizam-se apenas alguns dos elementos a cada possibilidade de agrupamento. Também é preciso observar se a ordem dos elementos propostos no problema gera novas possibilidades, como em *arranjos* e *permutações*, o que não ocorre nos problemas de *combinação* e de *produto cartesiano*.

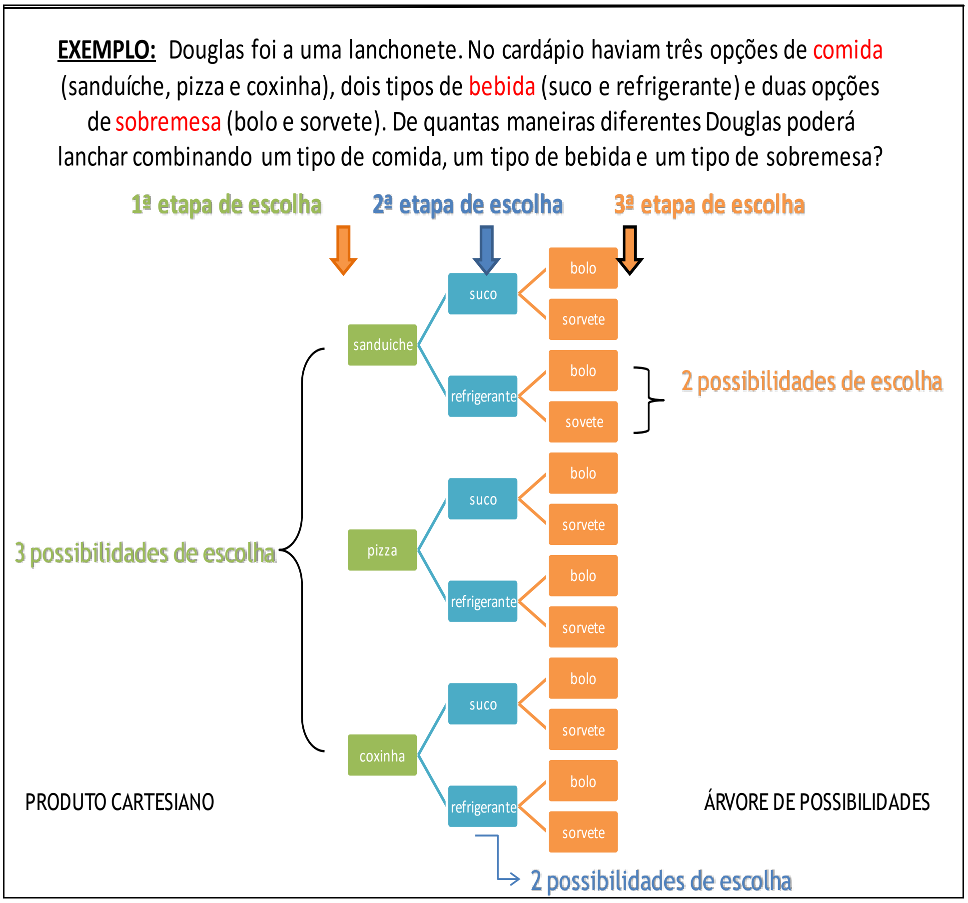
Quando o aluno responde a um problema de Combinatória precisa ampliar suas habilidades e não simplesmente aplicar mecanicamente um método de resolução, ou a memorização de uma fórmula. Dentre os problemas matemáticos trabalhados no Ensino Fundamental, os problemas combinatórios apresentam-se inicialmente com certa complexidade que nem sempre permite resoluções mecânicas em suas soluções. O estudante precisa distinguir e compreender as propriedades, as relações e os significados que estão presentes para, dessa forma, conseguir realizar o levantamento correto de possibilidades, a partir de uma representação simbólica apropriada.

Os problemas combinatórios vivenciados no dia a dia fora da sala de aula são diferentes dos problemas combinatórios apresentados na escola, pois na escola é indispensável que o aluno esgote todas as possíveis combinações para se ajustar às variáveis propostas, e assim, conseguir obter êxito em um problema. Já em contextos extraescolares, o esgotamento de todas as possibilidades não se faz necessário. Isso pode ser confirmado com o exemplo de combinação de roupas e acessórios para escolher a vestimenta do dia. Logo, os problemas combinatórios escolares proporcionam mais essa particularidade que necessita ser considerada nas estratégias empregadas pelos alunos.

As situações combinatórias estão relacionadas a diferentes propriedades e relações que podem ser resolvidas por diversas estratégias, sem necessariamente precisar do uso de fórmulas, como os desenhos, os quadros, as listagens e os diagramas. Também é plausível destacar o Princípio Fundamental da Contagem (PFC) como um procedimento de resolução, dentre outros, que cita as etapas de escolha apresentadas em problemas combinatórios. O PFC torna-se vantajoso por ser um recurso que serve de alicerce para a solução dos diversos tipos de problemas combinatórios.

A exemplificação de como seriam as resoluções em cada tipo de problema combinatório utilizando o *Princípio Fundamental da Contagem* pode ser representada em cada situação através das etapas de escolha. No problema de *produto cartesiano* que pode ser visto na Figura 1 a seguir, estão representadas três etapas de escolha, idealizando a composição de três conjuntos distintos que são combinados para compor um novo conjunto dos possíveis agrupamentos. Nesse problema, as opções das comidas se assinalam como a 1ª etapa de escolha, as alternativas das bebidas são a 2ª etapa de escolha e as escolhas das sobremesas compõem a 3ª etapa de escolha. Cada conjunto possui uma quantia de elementos que são combinados para formar um quarto conjunto, de possíveis lanches.

Figura 1: Etapas de escolha em um problema de *produto cartesiano*



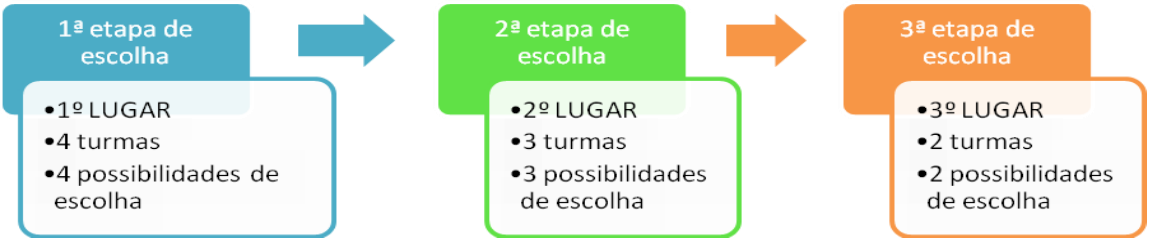
Fonte: Vega (2014).

Percebe-se que a resolução desse problema está validada no *Princípio Fundamental da Contagem* baseando-se no número de etapas de escolha e nos elementos de cada etapa que, quando agrupados, originarão a resposta da questão investigada no problema. Na primeira etapa existem três possibilidades de escolha, na segunda etapa há duas possibilidades e a terceira etapa de escolha tem duas opções. Esses valores, quando multiplicados, correspondem ao resultado desse problema de *produto cartesiano.* A resolução desse problema gera 12 possíveis agrupamentos, sem nenhuma repetição.

Pode-se empregar o Princípio Fundamental da Contagem para responder a todos os diferentes tipos de problemas combinatórios. Nos problemas de arranjo, as etapas de escolha podem corresponder às posições de colocação que cada elemento ocupa no exemplo citado na Figura 2, a seguir. Quando a resolução acontece por meio do *Princípio Fundamental da Contagem*, a primeira etapa de escolha corresponde a quatro possibilidades de se arranjar os elementos, isso porque as quatro turmas têm chance de ocupar o primeiro lugar do torneio. Já na segunda etapa, há três possibilidades, isso acontece devido à exclusão de uma das turmas que já ocupou o primeiro lugar, restando apenas três turmas para arranjar-se no segundo lugar do torneio. Na terceira etapa de escolha aparecem somente duas possibilidades, porque restam duas turmas que podem preencher a vaga de 3º lugar. O total de possibilidades que soluciona esse problema corresponde à multiplicação dos possíveis arranjos, realizando o produto dos valores 4 x 3 x 2 = 24, que pode ser visualizado na Figura 2, um exemplo dessa situação combinatória.

Figura 2: Etapas de escolha em um problema de *arranjo*

EXEMPLO: Quatro turmas da Escola Saber (Turma A, Turma B, Turma C e Turma D) vão disputar um torneio de queimado. De quantas maneiras diferentes pode-se ter o primeiro, segundo e terceiro lugar no torneio?

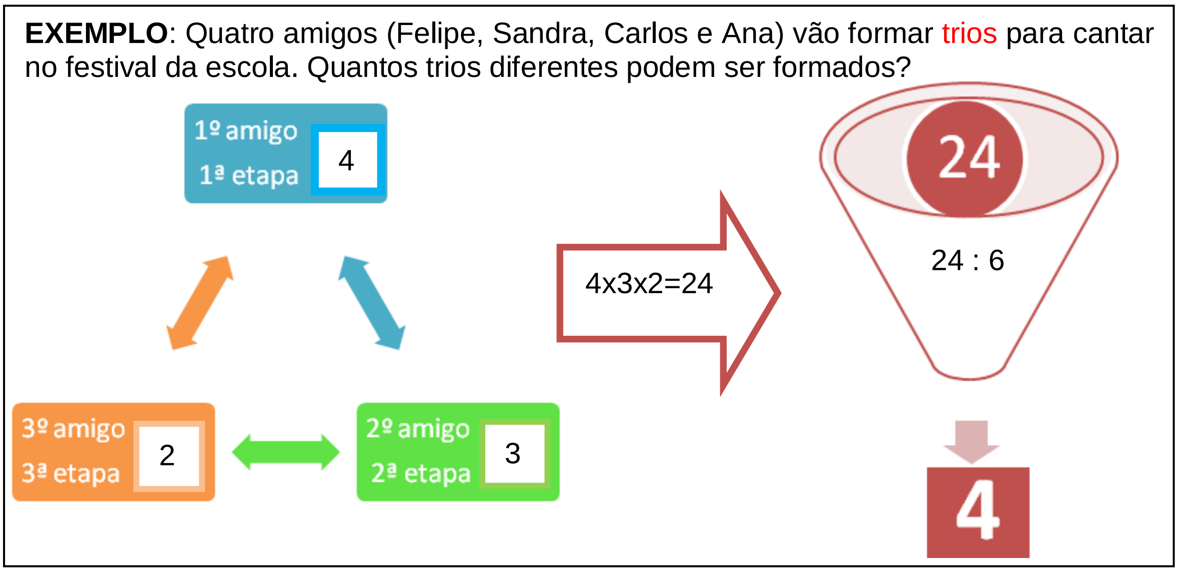


Fonte: Vega (2014).

Outro tipo de problema em que se pode empregar o Princípio Fundamental da Contagem (PFC) é o de *combinação*. A resolução por meio do PFC pode parecer um pouco mais difícil, se comparado a outras formas de resolução que utilizam, por exemplo, a listagem de elementos. Essa dificuldade pode ser vista, porque, além de multiplicar os elementos que serão combinados, é necessário realizar uma divisão com a permutação dos elementos entre si. A necessidade de dividir o resultado encontrado se deve ao fato de eliminar as repetições, visto que a ordem dos elementos não produz outra combinação.

O invariante presente nesse tipo de problema provavelmente impede a formação das combinações, pois a variação na ordem dos elementos não gera novas possibilidades e por não se darem conta dessa característica, os alunos, em grande parte das vezes, começam a repetir as possibilidades extrapolando-as. No exemplo citado na Figura 3 a seguir, há quatro possibilidades de combinações na primeira etapa de escolha, pois são quatro alunos que podem preencher uma das vagas para formar um trio. Na segunda etapa de escolha existem três possibilidades, isso porque, se um dos alunos já ocupou um espaço, restam apenas três alunos para preencher outra vaga no trio. Na terceira etapa de escolha existem duas possibilidades porque restam apenas dois alunos que podem ocupar o último espaço e formar um trio. O total de possibilidades deve ser multiplicado, encontrando-se, assim, a quantidade de combinações com repetições, que são 24 ao todo (4 x 3 x 2 = 24). No entanto, esse não é o resultado final, visto ser preciso eliminar as repetições. Sendo assim, divide-se o valor encontrado pela permutação dos três elementos entre si, ou seja, o produto a ser dividido por 6, pois os casos são iguais seis a seis, no caso: Felipe (F), Sandra (S) e Carlos (C) é igual a SFC = CSF = CFS = FSC = FCS. Para formar o trio, totalizam-se 24 combinações com repetições, dividindo por seis que é a permutação de três elementos entre si, obtêm-se quatro possibilidades de combinação, que pode ser visualizado a seguir.

Figura 3: Etapas de escolha em um problema de *combinação*

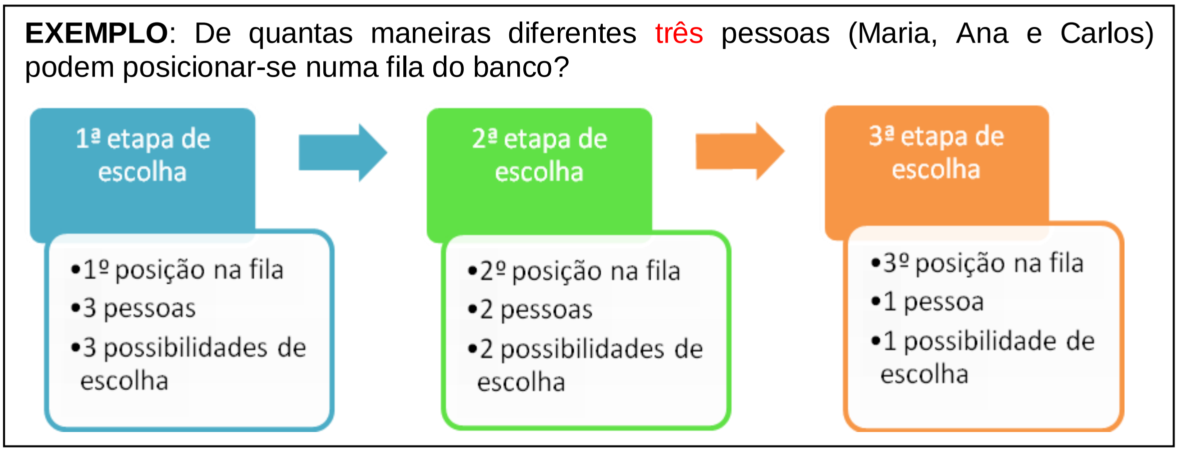


Fonte: Vega (2014).

A resolução desse tipo de problema requer uma atenção maior nos invariantes, contudo, os alunos do Ensino Fundamental não o resolvem dessa maneira, através do *Princípio Fundamental da Contagem*. Em geral, utilizam listagens de elementos ou desenhos para encontrar o total de combinações possíveis.

Pode-se também resolver outro tipo de problema combinatório através do *Princípio Fundamental da Contagem*, como os problemas de *permutação*. A caracterização das etapas de escolha nesse tipo de problema pode ser exemplificada pela quantidade de pessoas dispostas em uma fila, no qual, três pessoas podem ocupar a primeira posição da fila, duas pessoas podem preencher a segunda posição e uma pessoa pode ocupar a terceira posição que restou. O resultado pode ser obtido, segundo o PFC, pelo produto das possibilidades de cada etapa, sendo 3 x 2 x 1 = 6. Dessa forma, as três pessoas podem se posicionar na fila do banco de seis maneiras diferentes, sendo possível visualizar esse exemplo na Figura 4 a seguir.

Figura 4: Etapas de escolha em um problema de *permutação*



Fonte: Vega (2014).

Através dos exemplos de todos os tipos de problemas combinatórios, foi possível visualizar como são as etapas de escolha em cada um dos problemas. Em todos os exemplos apresentados foram destacadas três etapas de escolha.

Como citado anteriormente, observou-se em pesquisas recentes, tais como Pessoa e Borba (2009), que para ordenar os problemas pelo seu grau de dificuldade, algumas variáveis devem ser mantidas constantes, como a grandeza numérica. Mas, que outras variáveis podem interferir na facilidade ou dificuldade de um problema? Buscando manter próximos os valores numéricos dos problemas, será que as etapas de escolha poderiam influenciar o desempenho dos estudantes nos problemas combinatórios?

Sendo assim, buscou-se observar, nessa proposta de estudo, se a complexidade dos problemas combinatórios pode ser explicada, pelo menos em parte, pelo número de etapas de escolha dos elementos. Foi investigado se, controladas as etapas de escolha dos elementos, a maior dificuldade com os problemas de *permutação* permanecerá. Se não permanecer a dificuldade, será evidenciado o efeito do número de etapas de escolha, mas, se a mesma permanecer, deve-se buscar uma explicação outra, como a de que as relações presentes em problemas de *permutação* são, de fato, mais complexas.

MÉTODO

Para analisar o efeito do número de etapas de escolha em dois tipos de problemas combinatórios, realizou-se um recorte na pesquisa de Vega (2014), buscando comparar a influência de duas, três ou quatro etapas de escolha na resolução de problemas de *produto cartesiano* e de *permutação,* controlando o total de possibilidades em todos os problemas com mesmo número de etapas. A pesquisa de Vega (2014) realizou-se com 128 alunos respondendo a um dentre seis outros tipos de testes. Buscando obter um melhor controle das variáveis manipuladas, foram controlados o número de etapas de escolha dos problemas, a ordem de grandeza dos resultados dos problemas e todos os tipos de situações combinatórias (*arranjo*, *combinação*, *permutação* e *produto cartesiano*).

Realizou-se uma sondagem por meio de seis tipos diferentes de testes, todos aplicados em cinco salas de aula do 6º ano do Ensino Fundamental, entregue aos alunos de forma aleatória, contendo seis ou oito problemas combinatórios (dependendo do teste). A organização do Teste 1 ao Teste 5 buscou comparar dois tipos de problemas combinatórios, todos com duas, três e quatro etapas de escolha. Dessa forma, cada um dos cinco testes continha seis problemas. O sexto tipo de teste, diferentemente, buscou comparar as etapas de escolha, sendo duas etapas, três ou quatro, juntamente com a quantidade total de possibilidades dentro de um mesmo tipo de problema, contendo assim, ao total, oito problemas nesse tipo de teste.

Os seis tipos de testes foram estruturados de duas maneiras distintas. Os cinco primeiros testes compararam dois tipos de problemas combinatórios cada, o sexto teste comparou as etapas de escolha dentro de um mesmo problema. No Teste 1 houve a comparação entre os problemas de *produto cartesiano e permutação* (utilizados no presente artigo); no Teste 2 compararam-se *produtos cartesianos* com *arranjos;* no Teste 3 confrontaram-se os problemas de *produto cartesiano* com os problemas de *combinação;* no Teste 4 foram comparados problemas de *combinação* com os de *permutação* e no Teste 5 compararam-se os problemas de *combinação* com os de *arranjo.*

Os problemas de *permutação* e *arranjo* não puderam ser comparados, pois seus resultados finais são fixos, de acordo com as etapas de escolha. Por exemplo, o resultado dos problemas de *permutação* são fixos, com duas etapas de escolha o total de possibilidades é 2, o resultado nos problemas com três etapas de escolha é 6 e o total em quatro etapas é 24. Essa similaridade acontece nos problemas de *arranjo* que apresentam como menores resultados 6, 24 e 120, respectivamente para duas, três e quatro etapas.

Com os resultados fixos e diversos em cada uma das etapas, não seria possível realizar uma comparação entre os problemas de *permutação* e *arranjo* que mantivessem controlados os números de etapas de escolha e o total de possibilidades fossem iguais. Por exemplo, não seria o objetivo desse estudo comparar problemas que apresentassem resultados 2, 6 e 24 para duas, três e quatro etapas com 6, 24 e 120 respectivamente para as mesmas etapas. Isso porque haveria equivalência nas etapas de escolha, porém os resultados em cada uma delas seriam muito diferentes, possibilitando aos problemas que apresentam maior grandeza numérica, uma dificuldade superior já relatada em estudos anteriores.

A combinação dos resultados nos diferentes tipos de problemas foi organizada em cada tipo de teste, de forma que possibilitasse o controle das grandezas numéricas (ver Quadro 1)

Quadro 1: Tipos de testes

Testes	Questões	Comparando	Respostas		
Tipo 1	6	Produto Cartesiano X Permutação	2 etapas	3 etapas	4 etapas
			2	6	24
Tipo 2	6	Produto Cartesiano X Arranjo	2 etapas	3 etapas	4 etapas
			6	24	120
Tipo 3	6	Produto Cartesiano X Combinação	2 etapas	3 etapas	4 etapas
			6	4	6 e 5
Tipo 4	6	Permutação X Combinação	2 etapas	3 etapas	4 etapas
			2 e 3	6 e 4	24 e 15
Tipo 5	6	Arranjo X Combinação	2 etapas	3 etapas	4 etapas
			6	20 e 24	120 e 126
Tipo 6	8	2, 3 e 4 Etapas de Escolha dentro de um mesmo problema	Produto Cartesiano	Combinação	Permutação
			8	6, 4 e 5	2 e 6

Fonte: Vega (2014).

Sendo assim, a comparação em cada tipo de teste buscou manter constantes ou semelhantes os resultados em cada etapa de escolha, resultando num total de cinco diferentes tipos de testes. Porém, ainda houve a elaboração de outro tipo de teste, chamado de Teste 6, que tinha por objetivo comparar as etapas de escolha dentro de um mesmo tipo de problema.

Pretendendo eliminar a grandeza numérica como possível causa de baixo desempenho, a organização nesse tipo de teste manteve os resultados menores ou iguais a uma dezena. No Teste 6, foram utilizados os problemas de *produto cartesiano*, com 2, 3 e 4 etapas de escolha, os problemas de *combinação* também com 2, 3 e 4 etapas e os problemas de *permutação* somente com 2 e 3 etapas de escolha. A exclusão da quarta etapa aconteceu por esta apresentar um número total de possibilidades que ultrapassaria uma dezena, seu resultado seria fixo em 24 possibilidades. Da mesma forma, excluíram-se os problemas de *arranjo* por este apresentar como menor resultado fixo os valores de 6, 24 e 120, para cada uma das etapas de escolha, como já foi explicado anteriormente. Dessa forma, esse tipo de teste resultou em 8 diferentes problemas.

No presente artigo foram utilizados somente os resultados do teste Tipo 1, nele tanto os problemas de *produto cartesiano*, como os problemas de *permutação*, tiveram seus resultados iguais em cada uma das etapas. O Teste 1 foi respondido por 24 alunos do 6º ano do Ensino Fundamental, como pode ser visto no Quadro 2, a seguir, contendo três problemas de *produto cartesiano* e três de *permutação*, cada um com duas, três e quatro etapas de escolha.

Quadro 2: Teste de comparação dos problemas de *produto cartesiano* (PC) e *permutação* (P)

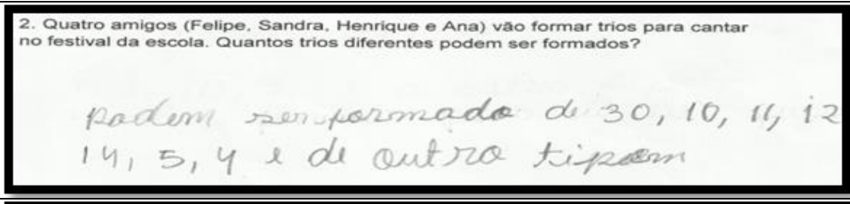
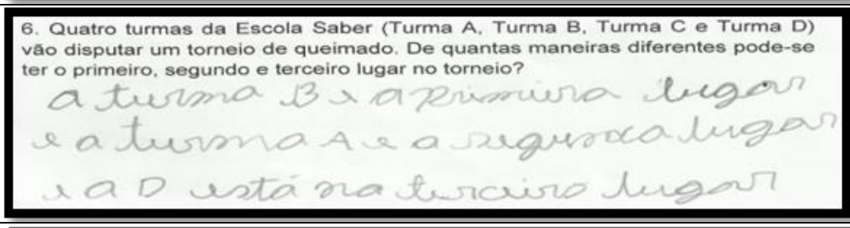
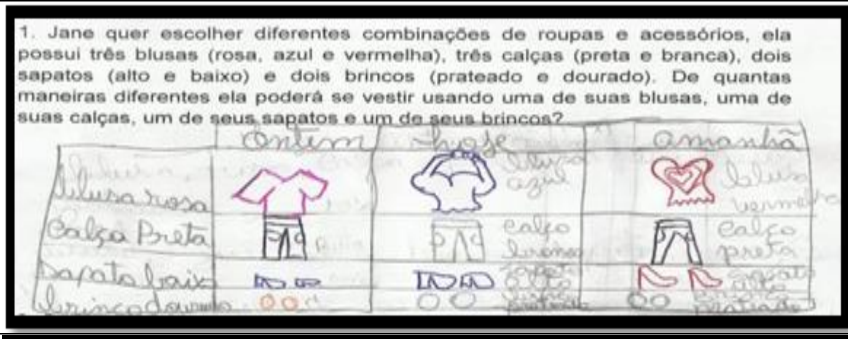
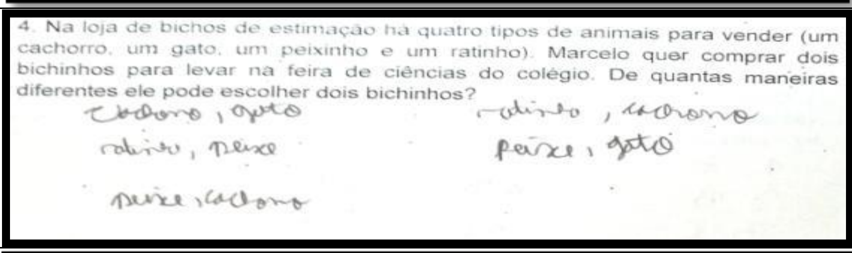
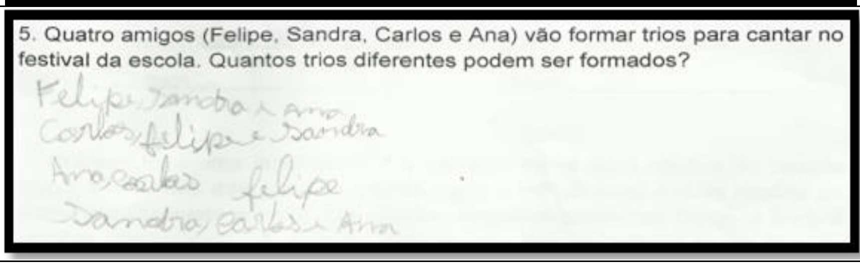
2 Etapas de Escolha	**PC**	Júlia foi a uma **pizzaria**. Para escolher sua pizza, ela poderia optar por um tipo de **massa** (fina) e dois tipos de **recheio** (calabresa e mussarela). De quantas maneiras diferentes Júlia poderá comer uma pizza combinando um tipo de massa e um tipo de recheio? **Resposta: 2 possibilidades**
	P	**Dois** amigos (Marcos e André) querem tirar uma foto juntos, **um ao lado do outro.** Quantas fotos diferentes eles podem tirar? **Resposta: 2 possibilidades**
3 Etapas de Escolha	**PC**	Douglas foi a uma **lanchonete**. No cardápio havia três opções de **comida** (sanduíche, pizza e coxinha), dois tipos de **bebida** (suco e refrigerante) e uma opção de **sobremesa** (sorvete). De quantas maneiras diferentes Douglas poderá lanchar combinando um tipo de comida, um tipo de bebida e um tipo de sobremesa? **Resposta: 6 possibilidades**
	P	De quantas maneiras diferentes **três** pessoas (Maria, Ana e Carlos) podem posicionar-se **numa fila do banco? Resposta: 6 possibilidades**
4 Etapas de Escolha	**PC**	Jane quer escolher diferentes combinações de **roupas e acessórios**, ela possui duas **blusas** (azul e vermelha), três **calças** (preta, branca e jeans), dois **sapatos** (bota e rasteirinha) e dois **brincos** (prateado e dourado). De quantas maneiras diferentes ela poderá se vestir usando uma de suas blusas, uma de suas calças, um de seus sapatos e um brinco? **Resposta: 24 possibilidades**
	P	Gabriela quer arrumar os porta-retratos de sua casa. Ela tem **quatro** fotos, a de sua mãe, de seu pai, a sua e de seu irmão. De quantas maneiras diferentes ela poderá organizá-los **lado-a-lado** na estante? **Resposta: 24 possibilidades**

Fonte: Vega (2014).

A ordem em que cada problema se apresentou dentro do teste aconteceu de forma aleatória. Não foi preciso alterar a ordenação dos problemas, ou seja, iniciar o teste por um problema de *produto cartesiano*, tido como mais fácil em estudos anteriores, ou por um problema de *permutação*, considerado mais difícil, visto que Pontes e Borba (2012) realizaram essa verificação, detectando não haver diferença significativa no desempenho dos alunos na disposição dos problemas dentro do teste.

Ao responderem o teste, foi possível verificar que cada resposta apresentada pelos alunos poderia ser inserida em categorias de acertos, indo além do mero erro ou acerto total. De acordo com o desempenho dos alunos na resolução dos problemas, foi possível categorizar as respostas, visualizadas no Quadro 3 e organizá-las em acertos totais, acertos parciais e erros.

Quadro 3: Categorização e extrato das respostas

PONTUAÇÃO	CATEGORIA	EXTRATO
0	ERRO	 2. Quatro amigos (Felipe, Sandra, Henrique e Ana) vão formar trios para cantar no festival da escola. Quantos trios diferentes podem ser formados? podem ser formado de 30, 10, 11, 12 14, 5, 4 e de outro tipom
1	ACERTO PARCIAL 1: apenas uma possibilidade	 6. Quatro turmas da Escola Saber (Turma A, Turma B, Turma C e Turma D) vão disputar um torneio de queimado. De quantas maneiras diferentes pode-se ter o primeiro, segundo e terceiro lugar no torneio? a turma B e a primeira lugar e a turma A e a segunda lugar e a D está na terceira lugar
2	ACERTO PARCIAL 2: de 2 até a metade das possibilidades	 1. Jane quer escolher diferentes combinações de roupas e acessórios, ela possui três blusas (rosa, azul e vermelha), três calças (preta e branca), dois sapatos (alto e baixo) e dois brincos (prateado e dourado). De quantas maneiras diferentes ela poderá se vestir usando uma de suas blusas, uma de suas calças, um de seus sapatos e um de seus brincos? ontem hoje amanhã blusa rosa Calça Preta Sapato baixo
3	ACERTO PARCIAL 3: mais da metade das possibilidades	 4. Na loja de bichos de estimação há quatro tipos de animais para vender (um cachorro, um gato, um peixinho e um ratinho). Marcelo quer comprar dois bichinhos para levar na feira de ciências do colégio. De quantas maneiras diferentes ele pode escolher dois bichinhos? cachorro, gato ratinho, cachorro ratinho, peixe peixe, gato peixe, cachorro
4	ACERTO TOTAL	 5. Quatro amigos (Felipe, Sandra, Carlos e Ana) vão formar trios para cantar no festival da escola. Quantos trios diferentes podem ser formados? Felipe Sandra e Ana Carlos felipe e Sandra Ana carlos felipe Sandra Carlos e Ana

Fonte: Vega e Borba (2015).

Os extratos das resoluções dos alunos expostos nessa categorização não se restringem apenas aos tipos de problemas comparados na presente pesquisa; foram utilizados também todos os tipos de problemas combinatórios que fazem parte do estudo maior aqui já mencionado para a criação das categorias.

A categoria de pontuação zero corresponde ao erro e engloba respostas que não exibiram em sua resolução uma relação combinatória, não atendendo ao que foi solicitado no problema. É possível visualizar no Quadro 3, acima, um extrato dessa resposta que apresenta em seu registro diversos números sem aparente relação com a solução correta da situação combinatória. Na categoria de Acerto Parcial 1 foram inseridas as respostas que apresentam indícios de relações combinatórias limitadas em apresentar uma única possibilidade, seja por considerá-la sua preferida ou por julgar, ainda, que não havia necessidade de apresentar outras. No extrato, o aluno explicitou apenas uma possibilidade de combinar as turmas, sendo a turma B em 1º lugar, a turma A em 2º lugar e a turma D em 3º lugar, quando deveria apresentar 24 possibilidades de combinação.

Ao responder com mais de duas possibilidades, o aluno relaciona-se na categoria de pontuação dois que indica como resolução duas ou mais situações combinatórias, podendo chegar até a metade das possibilidades. No extrato destacado, o aluno expõe três possibilidades de combinação de roupas e acessórios, as de ontem, de hoje e de amanhã. Nesse problema, a solução correta seriam 24 combinações possíveis.

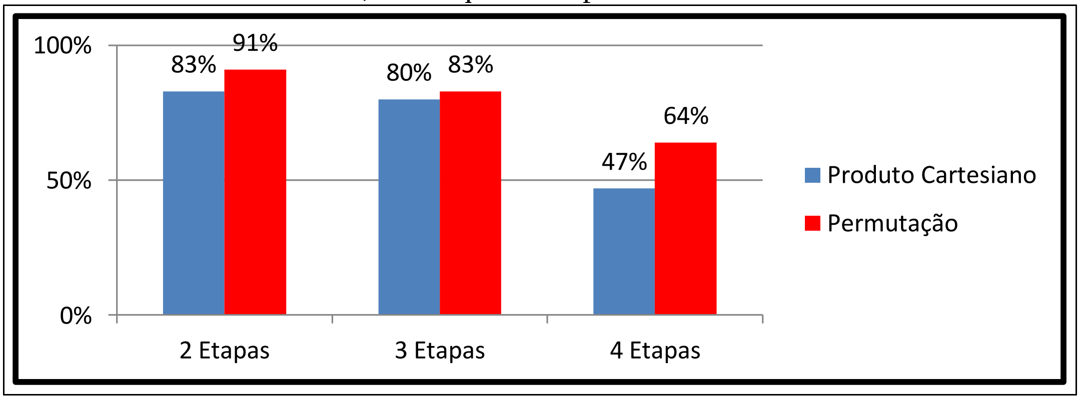
Quando o aluno apresenta mais da metade das situações combinatórias, classifica-se no Acerto Parcial 3, no qual demonstra perceber a necessidade em esgotar todas as possibilidades, embora ainda não consiga sistematizar todas. No exemplo apresentado há cinco possibilidades de combinar os animais que poderão ser comprados. O aluno utiliza a listagem para responder ao problema, cuja solução correta seriam seis possibilidades.

A pontuação quatro corresponde ao aluno que apresentou todas as possibilidades corretas de combinar os amigos para formar trios. Essa era a máxima pontuação que um aluno poderia atingir em um problema. O aluno que acertasse todos os problemas do teste atingiria a pontuação máxima de 32 pontos. Com a organização das respostas dos alunos em categorias, foi possível seguir com as análises por meio de provas estatísticas, com uso do programa *Statistical Package for the Social Sciences* – SPSS.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

A comparação entre os problemas de *produto cartesiano* e de *permutação* foi realizada através de um teste de sondagem que apresentou quantidades de possibilidades iguais em cada uma das etapas de escolha. Dessa forma, pode ser vista no Gráfico 1 a influência das etapas de escolha, com o controle das grandezas numéricas, nos resultados obtidos.

Gráfico 1: Percentuais de acerto nos problemas de *produto cartesiano* e de *permutação*, com duas, três e quatro etapas de escolha.



Fonte: Vega (2014).

A pontuação de acertos obtidos em problemas de *produto cartesiano* e de *permutação* foi transformada em percentuais. Como a pontuação máxima que poderia ser obtida no teste era de 24 pontos (sendo 6 problemas com acerto total em 4 pontos), o aluno que conseguiu essa pontuação atingiu 100% do aproveitamento. Sendo assim, é possível identificar que a maioria dos alunos apresentou uma pontuação superior a 50%, sendo mais da metade da pontuação obtida nos problemas comparados no teste.

É possível visualizar que o desempenho dos alunos foi superior nos problemas com duas etapas de escolha, tanto em *produto cartesiano* quanto em *permutação*, havendo uma queda nos percentuais de acerto nos problemas com três e quatro etapas de escolha. Quando se destacam as etapas de escolha, percebe-se que os problemas com mais etapas se apresentam mais difíceis de serem resolvidos do que os problemas com menos etapas. Esses resultados são similares aos verificados por Borba, Vega, Silva e Martins (2013), Vega e Borba (2014a, 2014b, 2015) que apontaram, a partir do controle do número de etapas de escolha, a *permutação* como mais fácil que o *produto cartesiano*.

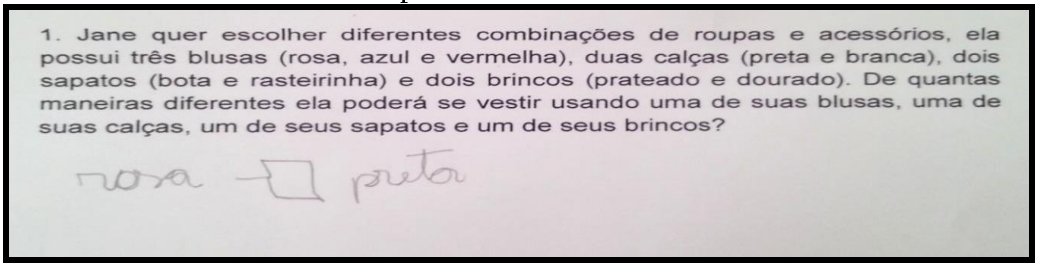
Nos problemas de *permutação* verifica-se um pequeno, porém superior, percentual de acerto quando comparado aos problemas de *produto cartesiano* e isso acontece em todas as etapas, mas somente nos problemas com quatro etapas de escolha essa diferença torna-se maior. Os resultados obtidos caminham em sentido contrário aos estudos de Pessoa e Borba (2009), Pessoa e Santos (2011), Correa e Oliveira (2011), Barreto (2012) e Azevedo (2013) que apontaram *permutação* como mais difícil que *produto cartesiano*. Ressalta-se que esses estudos não tiveram como objetivo o controle do número de etapas de escolha entre os problemas comparados.

Através de análises estatísticas, verificou-se, por meio de prova paramétrica t-teste de amostras em pares, que os problemas de *permutação* foram significativamente mais fáceis de serem resolvidos do que os problemas de *produto cartesiano* com quatro etapas de escolha (t (23) = 2,713; p = 0,012). Não se observaram diferenças estatisticamente significativas com duas ou três etapas de escolha. As resoluções em *produtos cartesianos* e em *permutações*, com duas etapas, quando comparados, não ofereceram diferença estatisticamente significativa a 0,05 (t (23) = - 1,356; p = 0,188). O mesmo foi verificado com três etapas de escolha; não se observou diferença significativa na prova paramétrica t-teste de amostras em pares (t (23) = - 0,365; p = 0,718). Esses resultados apontam para uma equiparação dos problemas, em termos de facilidade para os alunos, quando há duas ou três etapas de escolha, diferente do que foi visto nos problemas de quatro etapas de escolha.

Os problemas com elevado número de etapas de escolha, no caso com quatro etapas, podem ser mais difíceis, como já constatados em estudos anteriores que indicavam os problemas de permutação como os de mais difícil resolução. Essa constatação se deu pela avaliação, à luz do tripé de Vergnaud (1996), em que os invariantes, ou seja, propriedades e relações de cada tipo de situação combinatória, podem influenciar no desempenho dos estudantes. Contudo, os estudos anteriormente citados não se detiveram aos números de etapas de escolha presentes nos problemas combinatórios, nos quais, *produto cartesiano* sempre apresentava duas etapas de escolha e *permutação* constantemente continha três ou quatro etapas de escolha. Observou-se no presente estudo que, quando se controlou o número de etapas de escolha, os problemas de *permutação* não necessariamente são os de mais difícil compreensão.

Na comparação com quatro etapas de escolha, voltou-se o olhar para a diferença entre o percentual de acertos em *produtos cartesianos e permutações* e foi preciso analisar os erros cometidos pelos alunos nos problemas de *produto cartesiano*. Verificou-se, por meio dos registros das representações simbólicas, que 43% dos alunos esqueceram de combinar todas as etapas de escolha, enquanto que os outros 57% deixaram a resposta em branco, não sendo possível analisar. Como pode ser visto na Figura 5, a seguir, o erro do aluno foi combinar somente duas etapas, revelando possivelmente um maior grau de dificuldade quando o problema apresenta maior número de etapas de um problema.

Figura 5: Resposta do aluno ao não considerar todas as etapas de escolha de um problema de produto cartesiano



1. Jane quer escolher diferentes combinações de roupas e acessórios, ela possui três blusas (rosa, azul e vermelha), duas calças (preta e branca), dois sapatos (bota e rasteirinha) e dois brincos (prateado e dourado). De quantas maneiras diferentes ela poderá se vestir usando uma de suas blusas, uma de suas calças, um de seus sapatos e um de seus brincos?

rosa preta

Fonte: Vega (2014).

O aluno começa a listar um tipo de blusa, no caso, a de cor rosa, e combina-a com um tipo de calça, no caso, a de cor preta, contudo, não continuou a lista das demais peças que precisam ser combinadas, como os sapatos e os brincos. Nesse tipo de problema, *produto cartesiano,* são dados quatro conjuntos de elementos que precisam ser combinados, tornando a possibilidade de erro superior, quando comparado com um único conjunto, como foi visto em *permutação,* composto por quatro elementos que precisam ser permutados. Nesses problemas os alunos utilizavam todos os elementos, mas possuíam dificuldades em encontrar todas as possíveis permutações dos quatro elementos.

Todavia, o percentual de acertos foi maior em *permutações,* visto que os alunos tendiam a considerar todos os quatro elementos e utilizavam alguma sistematização no levantamento das permutações possíveis, enquanto que nos *produtos cartesianos* alguns dos elementos tendiam a ser esquecidos, pois nenhuma possibilidade de combinação estava completa.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Quando se busca responder a questão inicial tema dessa pesquisa percebe-se que o número de etapas de escolha pode ser uma variável que influencia o desempenho de alunos do Ensino Fundamental na resolução de problemas combinatórios. Esse é o principal dado dessa pesquisa, uma vez que estudos anteriores indicavam outras variáveis, como o tipo de situação combinatória, o número total de possibilidades do problema e a forma de apresentação das variáveis, as quais foram examinadas por Vega (2014).

Ao se controlar a variável de etapas de escolha, ao lado de outras, como do número total de possibilidades e da situação combinatória, no caso, *produto cartesiano e permutação,* constata-se que os problemas de *produto cartesiano* com quatro etapas de escolha são mais difíceis que os problemas de *permutação* também com quatro etapas de escolha. Dessa forma, percebe-se a influência do número de etapas de escolha, variável que foi controlada nos estudos de Borba, Vega, Silva e Martins (2013), Vega (2014), Vega e Borba (2014a, 2014b, 2015) e da ordem de grandeza no total de possibilidades, como já registrado nos estudos de Moro e Soares (2006), Pessoa e Borba (2009) e Teixeira, Campos, Vasconcellos e Guimarães (2011), nas resoluções dos problemas combinatórios.

Há indícios que, além dessas duas variáveis, o tipo de situação combinatória também pode influenciar nos desempenhos dos alunos, visto que as relações e propriedades presentes em cada situação também influenciam na compreensão da situação e no procedimento utilizado em sua resolução, como foi verificado nos estudos de Pessoa e Borba (2007). É o caso, por exemplo, de problemas de *permutação* com quatro etapas, em que os alunos puderam sistematizar suas soluções levando em consideração os quatro elementos a serem permutados, enquanto se esqueceram de um ou mais elementos em *produtos cartesianos* que também possuíam quatro etapas de escolha.

Conclui-se que os problemas de *permutação* são mais fáceis que os problemas de *produto cartesiano* quando ambos possuem, igualmente, quatro etapas de escolha. Esse é um resulto distinto daquele visto em estudos anteriores que indicavam o *produto cartesiano* como problema de mais fácil resolução, mas, em geral, esse tipo de problema abrangia apenas duas etapas de escolha e era comparado com problemas de *permutação* os quais tinham três ou quatro etapas de escolha. O objetivo do presente estudo não foi focar no problema mais fácil ou mais difícil, mas ressaltar que vários fatores podem influenciar o desempenho dos alunos e que todos devem ser considerados pelo professor dos anos iniciais.

Os alunos do 6º ano exibiram um bom desempenho, reforçando a ideia de que o ensino desse conteúdo pode e deve ser iniciado no Ensino Fundamental, como orientam os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) e como evidenciado em estudos anteriormente citados. É importante que os resultados dessa pesquisa cheguem ao conhecimento do professor, pois é ele quem irá auxiliar o aluno na construção da ponte entre modos intuitivos e cotidianos de raciocínios para o modo próprio da Matemática formal, em um processo crescente e espiral que se inicia no conhecimento prévio do aluno, como ressaltado na pesquisa de Vega (2014), e progride para procedimentos combinatórios apurados, como a generalização, a sistematização e demais procedimentos importantes para a combinação de elementos.

REFERÊNCIAS

AZEVEDO, Juliana. **Alunos de anos iniciais construindo árvores de possibilidades**: É melhor no papel ou no computador? 2013. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica – Edumatec, UFPE, Recife, 2013.

BARRETO, F. **O papel das representações simbólicas no desenvolvimento do raciocínio combinatório na educação de jovens e adultos**. 2012. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica. UFPE, Recife, 2012.

BARRETO, F.; BORBA, R. Intervenções de Combinatória na educação de jovens e adultos. **Anais..**. da XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática. Recife - PE, 26 a 30 de junho de 2011.

BORBA, Rute. O Raciocínio Combinatório na Educação Básica. In: 10º Encontro Nacional de Educação Matemática - ENEM. **Anais...** Salvador, 2010.

BORBA, Rute; BRAZ, Flávia. O que é necessário para compreender problemas combinatórios condicionais? In: 3º Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, 2012, Fortaleza. **Anais...** Fortaleza, 2012.

BORBA, Rute; VEGA, Danielle Avanço; SILVA, Josenir; MARTINS, Niedja. Como etapas de escolha podem influenciar a resolução de problemas combinatórios. In: 11º Encontro Nacional de Educação Matemática - ENEM. **Anais...** Curitiba, 2013.

BRASIL. Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica. **Parâmetros Curriculares Nacionais**. Matemática. 1º e 2º ciclos. Brasília, DF, 1997.

CORREA, Jane; OLIVEIRA, Gisele. A escrita do problema e sua resolução: o entendimento intuitivo acerca da combinatória. **Educar em Revista**, Curitiba, n. especial, p. 77-91, 2011.

FISCHBEIN, Efraim. **The Intuitive Sources of Probabilistic Thinking in Children**. Dordrecht: Reidel, 1975.

INHELDER, Bárbara; PIAGET, Jean. **Da lógica da criança à lógica do adolescente.** São Paulo: Livraria Pioneira Editora, 1976.

MAHER, Carolyn; YANKELEWITZ, Dina. Representations as tools for building arguments. In: MAHER, Carolyn; POWER, Arthur; UPTEGROVE, Elizabeth. **Combinatorics and Reasoning**. New York: Springer, 2010.

MATIAS, Patricia; SANTOS, Missilane; PESSOA, Cristiane. Crianças de Educação Infantil resolvendo problemas de arranjo. In: 13º Conferência Interamericana de Educação Matemática - CIEM. **Anais...** Recife, 2011.

MORO, Maria Lucia; SOARES, Maria Tereza. Níveis de raciocínio combinatório e produto cartesiano na escola fundamental. **Revista Educação Matemática Pesquisa**. São Paulo, v. 8, n. 1, pp. 99-124, 2006.

PESSOA, Cristiane; BORBA, Rute. Como alunos de 1ª à 4ª série resolvem problemas de raciocínio combinatório? In: 18º Encontro de Pesquisa do Norte e Nordeste - EPNN. **Anais**... Maceió, 2007.

PESSOA, Cristiane; BORBA, Rute. Quem dança com quem: o desenvolvimento do raciocínio combinatório de crianças de 1ª a 4ª série. **ZETETIKÉ**. Cempem, FE, Unicamp, Campinas, v. 17, jan-jun. 2009.

PESSOA, Cristiane; BORBA, Rute. O Desenvolvimento do Raciocínio Combinatório na Escolarização Básica. **Em Teia – Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana**, v. 1, n. 1, 2010. Disponível em: http://emteia.gente.eti.br/index.php/emteia/article/view/4

PESSOA, Cristiane; BORBA, Rute. Do young children notice what combinatorial situations require? In: 36th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education - PME36, **Proceedings…**Taiwan, 2012.

PESSOA, Cristiane; SANTOS, Lais Thalita. O que fazem alunos do 5º ano de escolarização básica diante de situações combinatórias? In: 13º Conferência Interamericana de Educação Matemática - CIEM. **Anais**... Recife, 2011.

PONTES, Danielle Avanço Vega; BORBA, Rute. A influência das etapas de escolha e das representações simbólicas na resolução de problemas combinatórios por estudantes do 5º ano do Ensino Fundamental. In: 16º Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática - EBRAPEM. **Anais...** Canoas, 2012.

SCHLIEMANN, Analúcia. A compreensão da análise combinatória: desenvolvimento, aprendizagem escolar e experiência diária. In: CARRAHER, Terezinha Nunes; CARRAHER, David; SCHLIEMANN, Analúcia. **Na vida dez, na escola zero**. São Paulo: Cortez, 1988.

SILVA, Juliana; SPINILLO, Alina. Como auxiliar crianças na resolução de problemas de raciocínio combinatório: a explicitação dos princípios invariantes. In: 13º Conferência Interamericana de Educação Matemática. **Anais...** Recife, 2011.

TEIXEIRA, Leny; CAMPOS, Edileni; VASCONCELLOS, Mônica; GUIMARÃES, Sheila. Problemas multiplicativos envolvendo combinatória: estratégias de resolução empregadas por alunos do Ensino Fundamental público. **Educar em Revista**, Curitiba, n. 1, 2011.

VEGA, Danielle Avanço. **Qual mais fácil resolver com 2, 3 ou 4 etapas de escolha**: Produto Cartesiano, Arranjo, Combinação ou Permutação? 2014. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica – Edumatec, Recife, 2014.

VEGA, Danielle Avanço; BORBA, Rute. Etapas de escolha na resolução de produtos cartesianos, arranjos, combinações e permutações. **Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática** v. 7, n. 3, 2014a. Disponível em: http://pgsskroton.com.br/seer//index.php/jieem/article/view/70

VEGA, Danielle Avanço; BORBA, Rute. Mais ou menos etapas de escolha influenciam a resolução de problemas combinatórios? In: 17º Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática - EBRAPEM. **Anais...** Recife - PE, 20 a 23 de novembro de 2014b.

VEGA, Danielle Avanço; BORBA, Rute. Problemas combinatórios e a influência de etapas de escolha em suas resoluções. In: 4º Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática- SIPEMAT. **Anais...** Ilhéus, 2015.

VERGNAUD, Gerárd. Psicologia do desenvolvimento cognitivo e didática das matemáticas. Um exemplo: as estruturas aditivas. **Análise Psicológica**, Lisboa, v. 1, 1986.

______. A Teoria dos Campos Conceptuais. In. BRUM, Jean (org.). **Didáctica das Matemáticas**. Lisboa: Horizontes Pedagógicos, 1996.