ISSN 2177-9309
em teia Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana
Universidade Federal de Pernambuco
Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica EDUMATEC

OS PRINCÍPIOS INVARIANTES E A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE RACIOCÍNIO COMBINATÓRIO

Lianny Milenna de Sá Melo
Mestre
Universidade Federal de Pernambuco
Lianny_melo@hotmail.com
Juliana Ferreira Gomes da Silva
Doutora
Universidade Federal de Alagoas
julianafgs@yahoo.com.br
Alina Galvão Spinillo
Doutora
Universidade Federal de Pernambuco
alinaspinillo@hotmail.com

Resumo
O presente artigo, baseado na teoria de Vergnaud e dando continuidade a pesquisas anteriores, investigou se a explicitação dos princípios invariantes do raciocínio combinatório teria um efeito facilitador na resolução de problemas de produto cartesiano e de problemas de combinação. Sessenta crianças (idade média de 8 anos), alunas do 3º ano do Ensino Fundamental de escolas particulares da cidade de Recife, foram solicitadas a resolver problemas de produto cartesiano e de combinação apresentados em duas situações: problemas sem explicitação dos invariantes (Situação I) e problemas com explicitação dos invariantes em seu enunciado (Situação II). Os resultados mostraram que problemas de produto cartesiano são mais facilmente resolvidos do que os problemas de combinação e que a explicitação dos invariantes favorece a resolução dos problemas de produto cartesiano, contudo, o mesmo efeito não foi observado nos problemas de combinação. Implicações educacionais são discutidas.

Palavras-chave: Raciocínio combinatório, problemas de produto cartesiano, problemas de combinação, invariantes operatórios, crianças.

THE INVARIANT PRINCIPLES AND COMBINATORIAL PROBLEM SOLVING

Abstract
This paper, based on Vergnaud's theory and following previous studies, investigated whether making explicit the principles governing combinatorial reasoning would help children to solve Cartesian product problems and combination problems. Sixty children (mean age 8years old), attending the 3rd year of elementary school in Recife, were asked to solve Cartesian product problems and combination problems under two different situations: without explanation about the principles governing combinatorial reasoning (Situation I) and with explanation about these principles. The results showed

that Cartesian product problems are solved more easily than the combination problems, and that the explanation about these principles has favoured the solution of Cartesian product problems only. Educational implications are discussed.

Key-words: Combinatorial reasoning. Cartesian product problems. Combination problems. Invariant principles. Children.

INTRODUÇÃO

O raciocínio combinatório desempenha papel importante no desenvolvimento cognitivo de crianças e adolescentes (INHELDER; PIAGET, 1976) e na compreensão de diversos conceitos matemáticos (VERGNAUD, 1998, 2009). Além de ser um domínio específico da Matemática, do ponto de vista psicológico, o raciocínio combinatório é considerado um modo de pensar sofisticado que está envolvido na solução de problemas práticos complexos. Assim, sua relevância, aplicabilidade e complexidade tornam este tema de estudo desafiador tanto no âmbito da Psicologia como no âmbito da Educação.

A aprendizagem da combinatória tem se apresentado aos estudantes como um grande obstáculo, visto que diversos estudos apontam a complexidade deste raciocínio, principalmente para estudantes dos anos iniciais do Ensino Fundamental. Tal fato, dentre outros, gerou reflexões que tiveram repercussões sobre a proposta dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN).

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997) propuseram mudanças expressivas para o Ensino Fundamental, acrescentando ao estudo de *Números e Operações*, de *Espaço e Formas* e de *Grandezas e Medidas* o bloco de conteúdos denominado *Tratamento da Informação*, o qual se refere aos estudos sobre as noções de Estatística, Probabilidade e de Combinatória. Logo, a Análise Combinatória é um tema tratado como relevante nesta proposta curricular, em que se aponta sua aplicabilidade em situações que requerem tratamento de dados e tomada de decisões por parte do indivíduo. Os PCN sugerem como objetivo em relação à combinatória para o 1º e 2º ciclos do Ensino Fundamental "levar o aluno a lidar com situações-problemas que envolvem combinações, arranjos, permutações e, especialmente, o princípio multiplicativo da contagem" (BRASIL, 1997, p. 57). Esses objetivos passam a requerer a inclusão da Análise Combinatória já no 1º ciclo.

Ressaltando uma perspectiva psicológica para argumentar a favor da inclusão da combinatória no Ensino Fundamental, Borba e Azevedo (2012, p. 90) afirmam que

> Além da Combinatória ter aplicações práticas e estar relacionada a outras áreas do conhecimento, é importante o desenvolvimento do raciocínio combinatório, pois

> este possui um caráter hipotético-dedutivo; sendo, portanto, base de raciocínio científico no qual é possível isolar variáveis, manter algumas constantes e variar outras. Por esse motivo, e os anteriormente descritos, o desenvolvimento do raciocínio combinatório é de extrema relevância e deve ser alvo do ensino na educação básica.

Essa afirmação segue a perspectiva de Inhelder e Piaget (1976) ao considerar as operações combinatórias um componente essencial para o desenvolvimento do pensamento lógico (especialmente em relação ao possível e ao hipotético).

Pelas razões expostas, pesquisadores têm empreendidos esforços para compreender como crianças resolvem problemas que requerem este tipo de raciocínio, apontando os limites e as dificuldades que enfrentam, como também têm empreendido esforços no sentido de promover situações que facilitem a resolução de problemas de combinatória. É nessa segunda vertente de estudos que a presente investigação se insere.

Fundamentando-se na teoria de Vergnaud (1998, 2009) a respeito dos campos conceituais e da formação de conceitos matemáticos, este artigo apresenta resultados de uma pesquisa conduzida com crianças que examinou os esquemas organizadores da cognição subjacentes ao raciocínio combinatório presentes na resolução de dois tipos de problemas de combinatória: problema de produto cartesiano e problema de combinação. Os dados derivados desta pesquisa trazem implicações educacionais, pois demonstram que crianças já possuem noções iniciais sobre combinatória e que algumas situações de resolução de problemas podem efetivamente favorecer seu desempenho, podendo ser adaptadas ao contexto escolar na busca de desenvolver sua forma de raciocinar.

OS DIFERENTES TIPOS DE PROBLEMAS DE COMBINATÓRIA E SEUS PRINCÍPIOS INVARIANTES

Borba e Azevedo (2012), em extensa revisão da literatura, especificam quatro tipos de problemas matemáticos que requerem o raciocínio combinatório: problemas de produto cartesiano, de combinação, de permutação e de arranjo. Os dois primeiros são tratados a seguir, uma vez que são eles os problemas apresentados às crianças nesta investigação.

Os problemas de produto cartesiano[1] (NUNES; BRYANT, 1997), também denominados de produto de medidas por Vergnaud (1983, 2009), envolvem a ideia de raciocínio combinatório. Eles se configuram por uma relação de combinação entre elementos

---

[1] No presente estudo foi adotada a denominação produto cartesiano, de Nunes e Bryant (1997).

de dois ou mais conjuntos diferentes, sendo a tabela cartesiana de dupla entrada sua forma mais usual de representação, assim como o diagrama denominado 'árvore de possibilidades'.

A ideia de combinação presente nos problemas de produto cartesiano pode estar relacionada a situações resolvidas através da multiplicação ou da divisão. Os problemas de produto cartesiano resolvidos a partir da multiplicação são denominados de problemas diretos e seus enunciados apresentam o valor das medidas elementares[2], sendo requerido o valor da medida produto[3]. Por exemplo: Maria tem 2 saias e 3 blusas; de quantas maneiras diferentes ela pode se arrumar?

Já os problemas de produto cartesiano solucionados através da divisão são nomeados de problemas inversos e seus enunciados apresentam o valor da medida produto e de uma medida elementar, sendo solicitado o valor da segunda medida elementar. Por exemplo: Numa festa, formaram-se 12 casais diferentes para dançar. Se havia 3 mulheres e todos os presentes dançaram, havia quantos homens?

No presente estudo, são abordados apenas os problemas de produto cartesiano direto e os problemas de combinação, os quais serão discutidos a seguir.

A combinação, segundo Santos, Mello e Murari (1998, p. 46), pode ser definida como "A combinação de n elementos tomados p a p, a qualquer agrupamento não-ordenado dos p elementos distintos escolhidos dos n elementos existentes". Neste tipo de problema, trabalha-se com um subgrupo do grupo, não havendo repetição de elementos e a ordem dos elementos não é importante, ou seja, basta que a combinação ocorra apenas uma vez. Vejamos um exemplo: cinco crianças (Ana, Daniel, Alex, Bia e Pedro) querem brincar de jogo de dama, mas só duas podem brincar de cada vez. Quantas duplas diferentes de crianças podem ser formadas para brincar de jogo de dama?

Na combinação, são escolhidos alguns elementos do conjunto para formar subconjuntos, todavia a ordem de escolha desses elementos não gera possibilidades diferentes. Dessa forma, observa-se que as propriedades combinatórias presentes nas combinações são relações de escolha de elementos a partir de um conjunto maior, porém, no que se refere à ordenação, a ordem de disposição dos itens não produz combinações diversas (BORBA; AZEVEDO, 2012).

---

[2] Por medida elementar ou conjunto elementar compreende-se o número de elementos de determinado conjunto (por exemplo, o conjunto blusas).

[3] Por medida produto ou conjunto produto compreende-se a combinação de duas ou mais medidas elementares. Ela pode ser expressa pela relação A x B, sendo A e B medidas elementares.

Enquanto os problemas de combinação requerem que os elementos sejam combinados a partir de um único conjunto, nos problemas de produto cartesiano, os elementos são combinados a partir de dois (ou mais) conjuntos. Neste trabalho, como mencionado, serão tratados apenas os problemas de combinação e produto cartesiano direto por serem menos complexos para as crianças dos anos escolares iniciais.

O presente estudo fundamentou-se na Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud (1998, 2009), a qual compreende que a formação de um conceito envolve mais do que a descrição de suas propriedades, requer estabelecer relações com outros conceitos e dominar três aspectos da sua estrutura: i. O conjunto das situações que dão sentido funcional ao conceito, tornando-o significativo; ii. Os invariantes operatórios que representam as propriedades que se conservam apesar das transformações ocorridas e permitem que o conceito seja reconhecido em diferentes situações; e iii. O conjunto das representações que permitem representar os invariantes e, portanto, representar também os procedimentos de resolução adotados em dada situação. Deste modo, o domínio de um conceito matemático ocorre por meio da experiência, maturidade e aprendizagem durante um longo período de tempo, visto que o conceito não se desenvolve de maneira isolada, mas nas relações com outros conceitos.

Da mesma forma, o raciocínio combinatório em todas as suas manifestações (tipos de problemas) envolve essas três instâncias, sendo uma delas particularmente considerada nesta investigação: os princípios invariantes que governam o raciocínio combinatório.

Muitas pesquisas que investigam o raciocínio combinatório têm dado ênfase às situações e às representações, sendo poucas as que tratam dos invariantes operatórios, como é o caso de alguns estudos, como os de Mekmandarov (2000), Spinillo e Silva (2010) e Spinillo, Ferreira e Lautert (2016). Tomando esses autores de forma conjunta, é possível identificar os princípios invariantes que governam o raciocínio combinatório na resolução de problemas de produto cartesiano e de problemas de combinação, como discutido e exemplificado a seguir.

Os invariantes que constituem o raciocínio combinatório em problemas de produto cartesiano

Em problemas de produto cartesiano, trabalha-se com a combinação entre elementos de dois ou mais conjuntos diferentes (conjunto elementar) de modo que produzam um novo conjunto (conjunto produto) que contemple todas as possíveis combinações. Não há repetição de elementos de um mesmo conjunto na formação das combinações e a ordem de combinação dos elementos do conjunto elementar não é importante para a formação do conjunto produto (VERGNAUD, 2009).

Tradicionalmente, os estudos conduzidos com crianças sobre a resolução deste tipo de problemas examinam as estratégias de resolução adotadas e o grau de dificuldade dos problemas a fim de identificar um possível desenvolvimento na construção deste conceito. Observa-se que há maior interesse dos pesquisadores em investigar problemas que requerem a multiplicação (produto cartesiano direto) em sua resolução em detrimento aos problemas que requerem a operação de divisão (produto cartesiano inverso), visto que estes são considerados mais difíceis, principalmente para crianças nos anos iniciais.

Os invariantes que constituem o raciocínio combinatório em problemas de combinação

Em problemas de combinação, trabalha-se com a combinação de elementos de um subgrupo do grupo, não há repetição de elementos e a ordem de apresentação dos elementos no subconjunto não é importante, basta que a combinação ocorra apenas uma vez (VERGNAUD, 2009).

Do ponto de vista psicológico, os dois tipos de problemas requerem o estabelecimento da correspondência um-para-muitos entre os elementos dos conjuntos. A relevância da correspondência de um para muitos na resolução de problemas multiplicativos é amplamente reconhecida e apontada como causa das dificuldades em problemas de combinatória. Segundo Piaget e Szeminska (1971), o esquema de correspondência um-para-muitos se caracteriza pela relação de um elemento com outros elementos de forma exaustiva. Nunes e Bryant (1997) afirmam que nos problemas de combinatória as relações um-para-muitos estão implícitas diferentemente de outros problemas multiplicativos, nos quais estas relações estão explicitadas.

Em estudos anteriores, Spinillo e Silva (2010) e Spinillo, Ferreira e Lautert (2016) examinaram se a explicitação verbal dos princípios invariantes requeridos para a resolução de problemas de produto cartesiano poderia melhorar o desempenho das crianças e promover o uso de formas de resolução apropriadas.

Spinillo e Silva (2010) investigaram o efeito da explicitação dos princípios invariantes sobre o desempenho e o uso de estratégias mais apropriadas na resolução de problemas de produto cartesiano por crianças. Participaram da pesquisa 40 crianças, de oito anos de idade, alunas do 3º ano do Ensino Fundamental, que ainda não haviam recebido instrução formal sobre a multiplicação no contexto escolar. As crianças foram solicitadas a resolverem dois tipos de problemas de produto cartesiano (problemas de percurso e de traje), que foram apresentados em três situações distintas, as quais diferiam em função da explicitação e da não explicitação dos princípios invariantes no enunciado dos problemas. Na situação I, a correspondência um para muitos estava implícita nos enunciados dos problemas, sendo, portanto, os problemas apresentados de forma clássica. Na situação II, as correspondências múltiplas estavam explicitadas no enunciado do problema e este era acompanhado também de uma representação gráfica dos conjuntos elementares. A situação III caracterizava-se pela explicitação das relações um-para-muitos no enunciado do problema e dos demais princípios invariantes que compõem o conceito do produto cartesiano direto.

Os resultados evidenciaram que a explicitação da correspondência um para muitos, seja acompanhada de representação gráfica ou dos princípios invariantes, auxilia na resolução de problemas de produto cartesiano. Observou-se também um efeito de ordem em relação à aplicação das situações, pois quando as situações de explicitação antecediam a situação implícita, o desempenho dos alunos nesta última era melhor, se aproximando do desempenho das demais situações. Além disso, verificou-se que a explicitação da correspondência um-para-muitos também favoreceu o uso de estratégias mais sofisticadas.

A pesquisa de Spinillo, Ferreira e Lautert (2016) teve por objetivo refletir sobre situações que coloquem os invariantes de conceitos matemáticos em evidência, explicitando-os para o aprendiz, a fim de promover uma compreensão psicológica de tais conceitos. Para tal, foram discutidas duas investigações realizadas com alunos de anos iniciais do Ensino Fundamental, a saber: uma que envolvia resolução de problemas de divisão e outra sobre a resolução de problemas de produto cartesiano. Apesar de contextos metodológicos distintos, ambos os estudos buscavam criar situações que favorecessem a compreensão das crianças acerca de conceitos matemáticos complexos a partir da explicitação dos invariantes que regem esses conceitos.

A análise de ambos os estudos levou as autoras a concluir que um dos fatores que contribui de forma expressiva para a compreensão acerca de conceitos matemáticos complexos por parte das crianças foi a explicitação dos invariantes relativos a esses conceitos. Elas acreditam que é possível adaptar esses contextos controlados de pesquisa ao ambiente escolar a partir de situações de ensino em que os invariantes operatórios sejam objetos de reflexão durante o processo de resolução de situações-problemas que envolvam o conceito trabalhado.

Ademais, Spinillo, Ferreira e Lautert (2016) advogam que é necessário considerar os domínios específicos do conhecimento nas situações de ensino. Para isso, é necessário compreender os invariantes como instâncias definidoras dos conceitos, sendo privativas a um conceito e variando em relação a outros, bem como estão relacionadas a formas de operar sobre as situações em que um dado conceito se insere.

Considerando este campo de investigações, o presente estudo buscou examinar o efeito da explicitação dos princípios invariantes em relação a problemas de produto cartesiano e de combinação, sendo estes considerados mais complexos que os primeiros (PESSOA; BORBA, 2009). Neste sentido, a questão de pesquisa a ser respondida é: será que se os princípios invariantes da combinação forem explicitados nos enunciados dos problemas matemáticos que envolvem a combinação ocorrerá o mesmo fenômeno que aquele observado nos estudos de Spinillo e Silva (2010) e de Spinillo, Ferreira e Lautert (2016), ou seja, será que a explicitação dos invariantes auxiliaria a criança a resolver tais problemas de forma apropriada?

Assim, o presente estudo teve por objetivo investigar o efeito da explicitação dos invariantes sobre o desempenho em problemas de combinatória. Especificamente, dois problemas de combinatória foram examinados: problemas de produto cartesiano e de combinação. A apresentação desses problemas variava: ora eram apresentados de forma em que seus invariantes operatórios eram explicitados em seu enunciado, ora os seus invariantes operatórios não eram explicitados, conforme detalhado na descrição do procedimento adiante.

MÉTODO

Participantes

Participaram do estudo 60 crianças de ambos os sexos, com média de oito anos de idade, alunas do 3º ano do Ensino Fundamental de escolas particulares da região metropolitana do Recife. Os participantes foram divididos em dois grupos em função do tipo de problema a ser resolvido:

Grupo 1: crianças que resolveram os problemas de produto cartesiano direto.

Grupo 2: crianças que resolveram os problemas de combinação.

Procedimento

As crianças foram entrevistadas individualmente e solicitadas a resolver oito problemas de produto cartesiano (Grupo 1) e oito problemas de combinação (Grupo 2). Os problemas foram divididos em duas situações: quatro problemas apresentados sem explicitação dos invariantes (Situação I) e quatro problemas apresentados com explicitação dos invariantes (Situação II), como ilustrado no Quadro 1.

Quadro 1 – Distribuição dos problemas em função das situações e dos grupos.

	Situação I (sem explicitação)	**Situação II** (com explicitação)
Grupo 1 (produto cartesiano)	4	4
Grupo 2 (combinação)	4	4

Os problemas foram apresentados por escrito em uma cartela e lido em voz alta pela examinadora, juntamente com o participante. Após a leitura do problema, a cartela ficava disponível para possíveis consultas, sendo a criança solicitada a fornecer explicações e justificativas a respeito da resolução adotada em cada problema. Com relação ao material, foram disponibilizados lápis, papel e borracha. O tempo de resolução dos problemas era livre. As entrevistas foram gravadas em áudio e posteriormente transcritas em protocolos individuais.

A ordem de apresentação dos problemas foi aleatória, decidida por sorteio com cada participante. Entretanto, a ordem de apresentação das situações foi fixa, de modo que inicialmente as crianças de ambos os grupos resolviam os problemas da Situação I (sem explicitação) e, em seguida, os problemas da Situação II (com explicitação).

Exemplos dos problemas apresentados em cada grupo em função das situações são ilustrados a seguir:

Grupo 1: Problemas de produto cartesiano

Situação I (sem explicitação dos invariantes)

Problema: Ana tem duas saias (marrom e preta) e cinco blusas (rosa, laranja, azul, verde e vermelha). Ela quer combinar as saias e as blusas para formar conjuntos. Quantos conjuntos diferentes ela pode formar?

Situação II (Com explicitação dos invariantes)

Problema: Pedro vai viajar para casa do seu avô. Na mala ele colocou três calças (preta, marrom e azul) e cinco camisas (amarela, vermelha, verde, laranja e cinza). Ele pode combinar as calças e as camisas para formar conjuntos. Mas ninguém veste todas as calças e todas as camisas de uma só vez; só usa uma calça e uma camisa de cada vez, não é? Combinando as camisas com as calças, ele pode ter conjuntos diferentes. Nesta viagem Pedro quer usar uma roupa diferente a cada dia, ele não quer repetir os conjuntos. Por exemplo, um dia ele pode usar a calça preta com a camisa laranja. No outro dia ele pode usar a mesma calça preta com a camisa cinza, já seria uma roupa diferente, não seria? Combinando todas as calças com todas as camisas, quantos conjuntos diferentes Pedro pode formar?

Grupo 2: Problemas de combinação

Situação I (sem explicitação dos invariantes)

Problema: Cinco crianças (Nina, Carla, Rafaela, Joel e Murilo) estão participando do sorteio em que três delas serão premiadas, cada uma ganhando um vídeo game. Quantos grupos diferentes de três ganhadores podem ter nesse sorteio?

Situação II (com explicitação dos invariantes)

Problema: A escola vai fazer um sorteio de duas televisões. Seis alunos (Artur, Toni, Silvio, Flora, Paula e Lúcia) estão participando do sorteio. O sorteio pode ocorrer de várias maneiras. Mas nem todos os alunos ganharão o prêmio porque têm seis alunos participando do sorteio e só têm duas televisões para serem sorteadas, não é? As televisões devem ser sorteadas para dois alunos diferentes, então, um mesmo aluno não pode ganhar todas as televisões, não é? Podem ter várias combinações de dois ganhadores diferentes. Por exemplo, uma combinação de dois ganhadores pode ser: Artur e Toni. Outra combinação diferente seria Artur e Silvio. Com todos esses alunos, quantas duplas diferentes de ganhadores podem ter nesse sorteio?

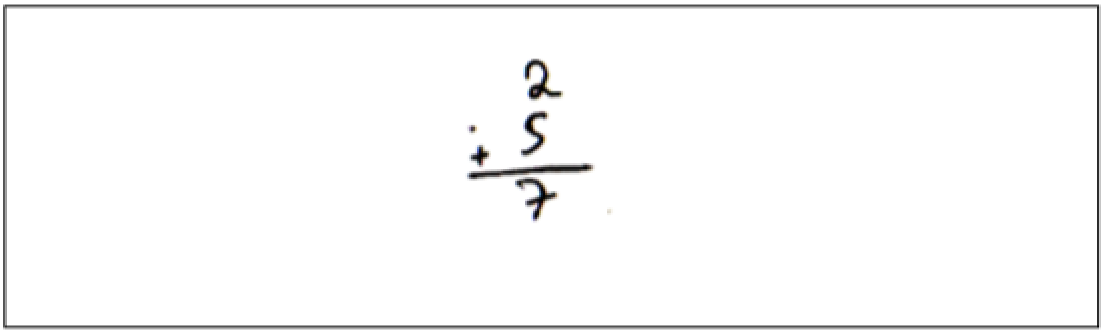
Os problemas da Situação I (sem explicitação) são semelhantes àqueles usualmente encontrados nos livros didáticos, sendo problemas prototípicos de produto cartesiano e de combinação. Nos problemas da Situação II (com explicitação), no enunciado constam os princípios invariantes que caracterizam a natureza do raciocínio combinatório em cada tipo de problema.

A seguir serão apresentados trechos das entrevistas realizadas com os participantes do estudo a fim de ilustrar as diferenças entre os tipos de problema e as resoluções empregadas pelas crianças.

Exemplo 1: Problema de produto cartesiano, Situação I - sem explicitação dos invariantes (SILVA, 2010, p. 76-77).

Ana tem 2 saias (marrom e preta) e 5 blusas (rosa, laranja, azul, verde e vermelha). Ela quer combinar as saias e as blusas para formar conjuntos. Quantos conjuntos diferentes ela pode formar?

Figura 1: Procedimento de resolução adotado no problema de produto cartesiano na Situação I (sem explicitação dos invariantes).

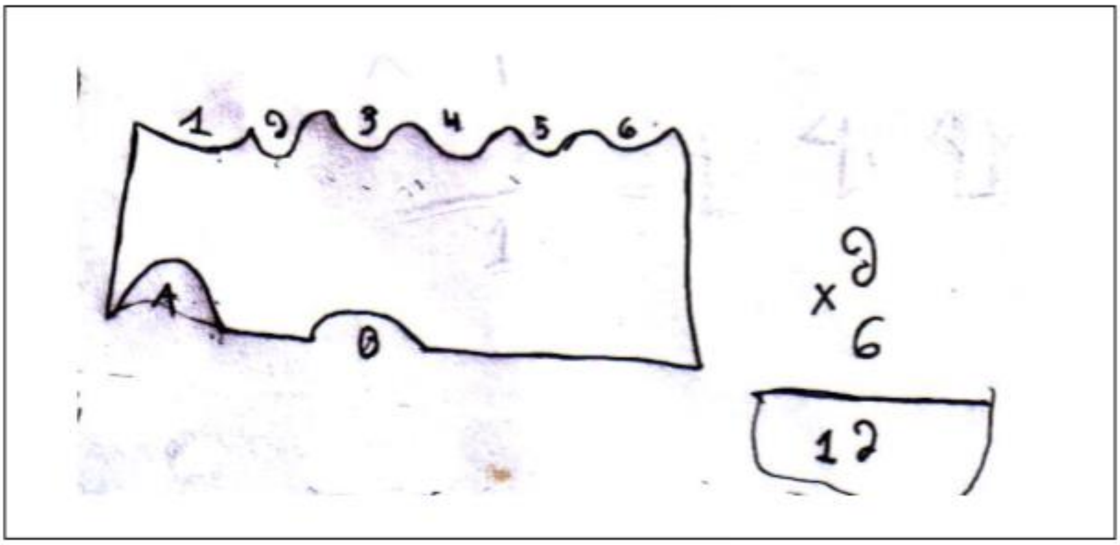


C: 7.
E: Como você fez?
C: Eu pensei.
E: Me diz como você pensou.
C: Eu fiquei pensando nas operações e somei os números.
E: Você somou o que?
C: Aqui (aponta para o 2) e aqui (aponta para o 5).
E: Por que tu somou o 2 com o 5?
C: Pra saber os conjuntos.
E: Esse 2 é o que?
C: 2 saias.
E: E o 5?
C: 5 blusas.

Exemplo 2: Problema de produto cartesiano, Situação II - com explicitação dos invariantes (SILVA, 2010, p. 86-87).

Bia foi ao shopping. Nesse shopping existem 2 entradas (A, B) e 6 saídas (1, 2, 3, 4, 5, 6). Nesse shopping as pessoas têm que entrar pelas entradas e sair pelas saídas. Elas não podem entrar e sair pela mesma porta, elas só podem entrar pelas portas de entrada e sair pelas portas de saída. Bia pode, por exemplo, entrar pela entrada A e sair pela saída 1. Mas se ela entrar novamente no shopping, ela pode novamente entrar pela mesma entrada A e sair pela saída 2; esse seria um caminho diferente, não é? Nessas férias Bia quer ir ao shopping muitas vezes, em dias diferentes. Mas ela não quer repetir os caminhos de entrada e de saída todos os dias, ela quer fazer um caminho diferente a cada dia. De quantas maneiras diferentes Bia pode entrar e sair desse shopping?

Figura 2: Procedimento de resolução adotado no problema de produto cartesiano na Situação II (com explicitação dos invariantes).

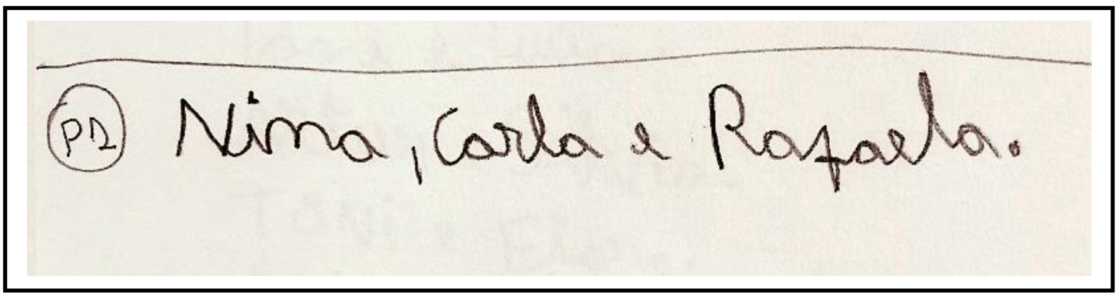


C: 12. Bia tem que entrar por uma entrada e sair por uma saída, né?
E: É.
C: Então ela tem que entrar na A e sair na 1, por exemplo. Ela pode fazer A-2, A-3, A-4, A-5, A-6. Aí deu 6 aqui (aponta para entrada A). Com a (entrada) B é a mesma coisa. 2 x 6 dá 12.
E: Entendi. Você poderia resolver esse problema de outra forma, com outra continha? **C:** Sim. Com a conta de mais. Se fosse a continha de mais tinha que ser 6 + 6, aí dava 12 caminhos também.

Exemplo 3: Problema de combinação, Situação I - sem explicitação dos invariantes (MELO, 2012, p. 100).

Cinco crianças (Nina, Carla, Rafaela, Joel e Murilo) estão participando do sorteio em que três delas serão premiadas, cada uma ganhando um vídeo game. Quantos grupos diferentes de três ganhadores podem ter nesse sorteio?

Figura 3: Procedimento de resolução adotado no problema combinação na Situação I (sem explicitação dos invariantes).

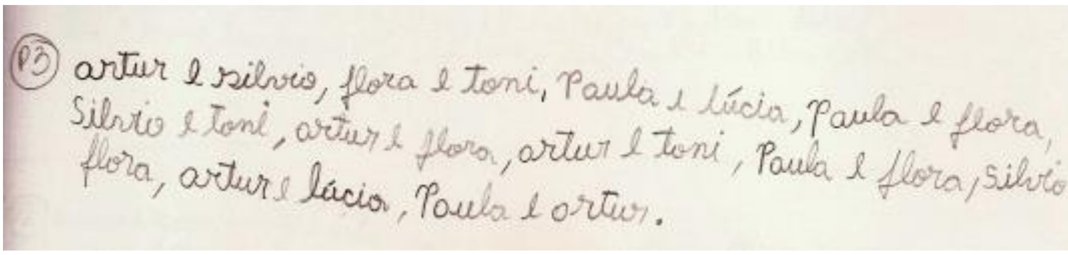


C: Tem que ser grupo de três, né?
E: De três.
C: Ia ficar duas crianças sem participar porque se tivesse outra ia poder participar.
E: Ah, porque não ia completar o grupinho de três, é?
C: É.
E: Então qual era o grupinho de três que teria?
C: Nina, Carla e Rafael.
E: Rafaela, né? Aí sobraria Joel e Murilo, né?
C: É.

Exemplo 4: Problema de combinação, Situação II - com explicitação dos invariantes (MELO, 2012, p. 101-102).

A escola vai fazer um sorteio de duas televisões. Seis alunos (Artur, Toni, Silvio, Flora, Paula e Lúcia) estão participando do sorteio. O sorteio pode ocorrer de várias maneiras. Mas nem todos os alunos ganharão o prêmio porque têm seis alunos participando do sorteio e só têm duas televisões para serem sorteadas, não é? As televisões devem ser sorteadas para dois alunos diferentes, então, um mesmo aluno não pode ganhar todas as televisões, não é? Podem ter várias combinações de dois ganhadores diferentes, não pode? Por exemplo, uma combinação de dois ganhadores pode ser: Artur e Toni. Outra combinação diferente seria Artur e Silvio, não seria? Com todos esses alunos, quantas duplas diferentes de ganhadores podem ter nesse sorteio?

Figura 4: Procedimento de resolução adotado no problema combinação na Situação II (com explicitação dos invariantes).



C: *(começa a escrever)...* São com todos os alunos?
E: Com todos os alunos. Pra você ver quantas duplinhas diferentes pode formar, tá certo?
C: *(escreve)...* Pronto.
E: Então, você formou nove duplinhas. Tu acha que consegue formar mais duplinhas ou essa é a quantidade máxima de duplinhas?
C: Vou formar mais.
E: Quais as duplinhas que você poderia formar mais?
C: Artur e Lúcia.

E: Então copia aí. Aí quando você achar que terminou, você me diz, tá?
C: humrum *(resposta positiva)*
E: Formasse mais duas duplinhas, ficaram onze. Como é que você sabe que formou todas as duplinhas?
C: Porque eu coloquei esse com esse daqui, esse com esse, aí esse com esse. Botei esse com esse daqui, esse com esse. *(a criança sai apontando os nomes no protocolo e dizendo que combinou determinado nome com outro, porém, não explicita nenhum padrão sistemático).*
E: Entendi, você foi colocando um nome com cada um. Aí você formou essas onze duplinhas. Você foi misturando.
C: humrum *(resposta positiva)*
E: E você foi misturando de uma maneira, assim, qualquer? Você não seguiu uma ordem não, né?
C: É
E: Então a gente acabou aqui as duplinhas. Não tem como formar mais?
C: É

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Como mencionado na descrição dos procedimentos de coleta dos dados, além de resolver os problemas, a criança era solicitada a fornecer explicações e justificativas acerca dos procedimentos de resolução adotados, independentemente de estarem corretos ou incorretos. Contudo, na presente investigação, a análise dos dados versou apenas sobre o desempenho das crianças, uma vez que o objetivo do estudo era saber se a situação explícita (princípios invariantes mencionados no enunciado dos problemas) seria um fator que facilitaria a resolução dos problemas quando comparados a uma situação em que tais princípios estavam implícitos.

A Tabela 1 mostra o percentual de acertos das crianças do Grupo 1 e do Grupo 2 nas duas situações.

Tabela 1 – Percentual de acertos nos problemas de produto cartesiano e de combinação em cada situação (n=120).

Situações	Grupo 1 (produto cartesiano)	Grupo 2 (combinação)
Situação I (sem explicitação dos invariantes)	45,8	2,5
Situação II (com explicitação dos invariantes)	60	1,6

As crianças do Grupo 1 que resolveram problemas de produto cartesiano tiveram desempenho superior ao das crianças do Grupo 2 que resolveram problemas de combinação, em ambas as situações, conforme detectado pelo teste U de Mann-Whitney (Situação I: U= 242,0; p= .000; e Situação II: U= 146,0; p= .000). Na Situação I, o Grupo 2 (cartesiano) obteve apenas 2,5% de respostas corretas, enquanto que entre as crianças do Grupo 1 (produto cartesiano) o percentual foi expressivamente mais alto, chegando a 45,8% de respostas corretas. Esses percentuais indicam que problema de combinação é mais difícil de ser solucionado por crianças do que os problemas de produto cartesiano. Esse resultado corrobora o que foi observado em outros estudos, como os de Pessoa e Borba (2009, 2010), por exemplo.

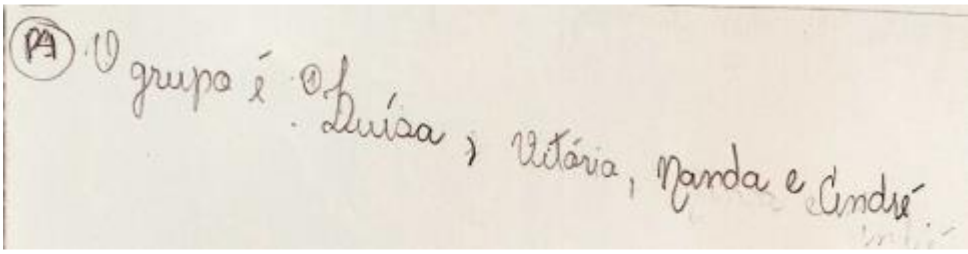
Importante comentar que esses dados podem se justificar de duas maneiras complementares. Uma explicação é que os problemas de combinação estão praticamente ausentes nos livros didáticos, uma vez que nos anos iniciais do Ensino Fundamental os problemas do tipo produto cartesiano são os mais contemplados nos livros (PESSOA; MATOS FILHO, 2006). Estes fatos parecem contribuir para o baixo índice de acertos nos problemas de combinação e podem fornecer uma possível explicação para o melhor desempenho das crianças do 3º ano em problemas de produto cartesiano.

Outra explicação é que as dificuldades das crianças com problemas de combinação decorrem do fato de que os invariantes operatórios nos problemas de combinação são mais complexos do que aqueles envolvidos nos problemas de produto cartesiano. Embora ambos os problemas pertençam à mesma estrutura multiplicativa e correspondam a problemas de raciocínio combinatório, estes diferem em termos da natureza do raciocínio lógico-matemático empregado. O exemplo apresentado, a seguir, ilustra as diferenças entre os tipos de problema e as estratégias de resolução empregadas pelas crianças.

Exemplo 1: Problema de combinação, Situação I - sem explicitação dos invariantes (MELO, 2012, p. 99)

Seis crianças (Luísa, Vitória, Nanda, André, Beto e Júnior) querem brincar de vôlei, mas só podem brincar quatro crianças de cada vez. Quantos grupos diferentes de quatro crianças podem ser formados para brincar de vôlei?

Figura 5: Procedimento de resolução adotado no problema de combinação na Situação II (com explicitação dos invariantes).



Ao finalizar a resolução do problema, a criança responde que apenas um grupo pode ser formado "O grupo é Luisa, Vitória, Nanda e André", e quando questionada se seria possível formar mais algum grupo, a criança afirma que "só dá pra formar este porque só sobraram duas pessoas, né?".

Enquanto os problemas de produto cartesiano trabalham com conjuntos distintos (blusas e saias), o problema de combinação trabalha com a formação de subconjuntos de um determinado conjunto (formar diferentes duplas de crianças a partir de um conjunto de cinco crianças). O fato de ter que escolher um subgrupo de elementos no conjunto e, para isto, necessariamente deixar de fora outros elementos pode dificultar a compreensão da correspondência um para muitos, presente em problemas multiplicativos. Assim, a criança lança mão de um tipo de estratégia própria aos problemas aditivos, a correspondência um para um ou termo a termo (PIAGET; SZEMINSKA, 1971). É possível que a relação um para muitos seja mais clara nos problemas de produto cartesiano do que nos de combinação, pois naqueles problemas é mais evidente perceber as relações entre elementos de conjuntos distintos do que entre elementos de um mesmo conjunto, como ocorre nos problemas de combinação. Ao que parece, mesmo com a explicitação dos princípios invariantes, esta dificuldade não é superada, como discutido a seguir.

Como pode ser observado na Tabela 1, na Situação II o padrão de desempenho nos problemas de produto cartesiano e de combinação é semelhante ao verificado na Situação I, isto é, os problemas de combinação (1,6%) continuam sendo mais difíceis do que os problemas de produto cartesiano (60%), mesmo quando os princípios invariantes que caracterizam o raciocínio combinatório são explicitados no enunciado dos problemas.

Considerando o desempenho de cada grupo separadamente, o teste de Wilcoxon realizou a comparação entre as situações e revelou que há diferenças significativas apenas para o Grupo 1 ($Z= - 1,949$; $p= .05$), visto que o desempenho na Situação II (60%) foi melhor do que na Situação I (45,8%). Este resultado indica que a explicitação dos princípios invariantes nos problemas de produto cartesiano facilitou a compreensão das relações subjacentes ao raciocínio combinatório. Tal resultado está em acordo com os dados obtidos em estudos anteriores (SPINILLO; SILVA, 2010; SPINILLO; FERREIRA; LAUTERT, 2016). O que se verifica, portanto, é que a explicitação dos invariantes tem efeito facilitador na resolução de problemas de produto cartesiano, porém não surge como condição suficiente para promover o bom desempenho das crianças em problemas de combinação.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A relevância do raciocínio combinatório tanto em termos do desenvolvimento cognitivo como em termos educacionais é reconhecida, assim como sua complexidade, o que tem se transformado em um grande desafio para professores que desejam efetivamente desenvolver este raciocínio em seus alunos. A investigação apresentada neste artigo baseou-se na teoria de Vergnaud (1998, 2009) de que os conceitos se constituem a partir de um tripé formado por um conjunto de invariantes, por representações e pelas situações, dando destaque ao papel desempenhado pelos princípios invariantes na resolução de problemas que envolvem o raciocínio combinatório.

A importância de se destacar os princípios invariantes, por sua vez, teve por base evidências empíricas, tais como as apresentadas nos estudos de Spinillo e Silva (2010) e Spinillo, Ferreira e Lautert (2016).

O estudo conduzido por Spinillo e Silva (2010) revelou que a explicitação dos princípios invariantes do conceito de produto cartesiano auxilia as crianças na resolução desse tipo de problema, ao melhorar seu desempenho, bem como ao favorecer o uso de estratégias de resolução mais sofisticadas.

Spinillo, Ferreira e Lautert (2016), ao analisarem dois estudos distintos que investigavam o desempenho e o uso estratégias de resolução por crianças em problemas de divisão, em uma pesquisa, e de produto cartesiano, em outra, concluíram que a explicitação dos invariantes dos conceitos contribui de forma significativa para a compreensão de conceitos matemáticos complexos por partes das crianças. Ademais, as autoras acreditam que é possível ultrapassar os limites dos contextos controlados da pesquisa científica e trabalhar conceitos matemáticos em sala de aula a partir da reflexão dos invariantes operatórios que os governam durante o processo de resolução de situações-problemas.

A partir dos resultados desses estudos, a presente pesquisa investigou se a explicitação de tais princípios teria um efeito facilitador também em problemas de combinação. Os dados obtidos levaram à conclusão de que explicitar os princípios que governam o raciocínio combinatório favorece o entendimento de problemas de produto cartesiano, contudo, o mesmo efeito não é constatado em relação a problemas de combinação. Se, por um lado, apresentar os princípios aumenta significativamente o número de acertos em problemas de produto cartesiano, por outro lado, o sucesso neste tipo de problema não garante o êxito na resolução de problemas de combinação.

A que se deve tal fato? Além das razões apresentadas anteriormente, por se tratarem de problemas com invariantes distintos, percebe-se que apesar de pertencerem ao campo das estruturas multiplicativas e se configurarem como problemas de raciocínio combinatório, há uma hierarquia no que se refere aos esquemas necessários para a compreensão adequada destes conceitos, refletindo, assim, em níveis distintos de dificuldade. Ao que parece, as relações um para muitos não se configuram de uma mesma maneira nos dois tipos de problemas, sendo esta uma questão teórica que merece ser investigada com maiores detalhes.

IMPLICAÇÕES EDUCACIONAIS

Embora alguns livros didáticos já abordem os problemas de combinatória nos anos iniciais do Ensino Fundamental, parece que este tipo de problema não vem sendo explorado de maneira satisfatória em situações didáticas. Uma possível explicação para tal fato é que ainda se observa a existência de uma compreensão um tanto limitada do raciocínio combinatório, acreditando que por se tratar de um problema de divisão e de multiplicação, pode ser considerado como semelhante a outros problemas que também requerem essas operações para sua resolução, como os problemas de isomorfismo de medidas que são, sem dúvida, mais fácies que os de cominatória. Outro exemplo dessa visão ainda limitada é que os livros didáticos e práticas em sala de aula, nos anos iniciais do Ensino Fundamental, privilegiam apenas um tipo de problema de combinatória, que é o de produto cartesiano.

Seria importante que os educadores tivessem uma compreensão psicológica do processo de aquisição e do desenvolvimento de conceitos matemáticos, que esclarece os limites e as possibilidades do raciocínio infantil.

Considerando o valor didático da resolução de problemas no ensino da matemática, sugere-se que o raciocínio combinatório possa ser introduzido no Ensino Fundamental a partir da resolução de problemas de produto cartesiano, com base na explicitação de seus invariantes operatórios. Uma vez compreendidos tais princípios, poderiam ser propostas situações em que os invariantes da combinação fossem também explicitados e comparados aos invariantes dos problemas de produto cartesiano. Dessa forma, seria possível promover reflexões a respeito da natureza de cada tipo de problema, destacando o raciocínio necessário para a resolução desses problemas. Especial ênfase poderia ser dada ao fato de como as combinações entre os elementos se configuram em cada tipo de problema. Por exemplo, os problemas de produto cartesiano e as relações entre os elementos se dão entre conjuntos distintos, enquanto que nos problemas de combinação essas relações ocorrem entre elementos de um mesmo conjunto, sendo este um aspecto difícil de ser entendido pelos alunos.

O uso de diferentes suportes de representação poderia ser explorado com o objetivo de tornar as relações um para muitos nos dois tipos de problemas mais evidentes. A construção de árvores de possibilidades, a utilização de material manipulativo, entre outros, poderiam vir associadas a explicações verbais permitindo evidenciar de maneira mais clara as diferentes relações entre os elementos na resolução desses dois tipos de problemas. Por fim, assim como Borba e Azevedo (2012), destaca-se a importância de se trabalhar com diferentes problemas de raciocínio combinatório (produto cartesiano, permutação, arranjo e combinação) ainda nos anos iniciais do Ensino Fundamental.

REFERÊNCIAS

BORBA, R. E. S. R.; AZEVEDO, J. A construção de árvores de possibilidades com software: o desenvolvimento do raciocínio combinatório de Karine e Vitória. In: SPINILLO, A.; LAUTERT, S. L. (Orgs.), **A pesquisa em Psicologia e suas implicações para a Educação Matemática**. Recife: Editora Universitária, 2012.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais**. Matemática. 1º e 2º ciclos. Brasília: Secretaria de Ensino Fundamental, 1997.

INHELDER, B.; PIAGET, J. **Da lógica da criança à lógica do adolescente**. São Paulo: Pioneira, 1976.

MEKHMANDAROV, I. Analysis and synthesis of the cartesian product by kindergarten children. In: NAKAHARA, T.; KOYAMA, M. (Ed.), **Proceedings of the 24th. Annual Conference of the PME**. Hiroshima: Hiroshima University, 2000, v.3, p. 295-301.

MELO, L. M. S. **O efeito da explicitação dos princípios invariantes na resolução de problemas de combinação por crianças**. 2012. 183 f. Dissertação (mestrado), Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2012.

NUNES, T.; BRYANT, P. **Crianças Fazendo Matemática**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1997.

PESSOA, C. A. S.; BORBA, R. E. S. R. Quem dança com quem: o desenvolvimento do raciocínio combinatório de crianças de 1ª a 4ª série. **Zetetike**, Campinas, v. 17, n. 31, jan/jun, p. 105-150, jan-jun, 2009.

PESSOA, C. A. S.; BORBA, R. E. S. R. O desenvolvimento do raciocínio combinatório na escolarização básica. **Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana**, v. 1, p. 1-22, 2010.

PESSOA, C. A. S.; MATOS FILHO, M. A. S. Estruturas multiplicativas: como os alunos compreendem os diferentes tipos de problemas? Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática. **Anais**... Recife, 2006.

PIAGET, J.; SZEMINSKA, A. **A gênese do número na criança**. Rio de Janeiro: Zahar, 1971.

SANTOS, J. P. O.; MELLO, M. P.; MURARI, I. T. C. **Introdução à análise combinatória**. Campinas, SP: Editora da UNICAMP, 1998.

SILVA, J. F. G. **O efeito da explicitação da correspondência um-para-muitos na resolução de problemas de produto cartesiano por crianças**. 2010. 130 f. Dissertação (Mestrado em Psicologia Cognitiva), Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2010.

SPINILLO, A. G.; SILVA, J. F. Making explicit the principles governing combinatorial reasoning: does it help children to solve cartesian product problems? 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, **Anais…** Belo Horizonte, 2010, v. 4, p. 216-224.

SPINILLO, A. G.; FERREIRA, J.; LAUTERT, S. L. Ensino e aprendizagem de conceitos matemáticos a partir da explicitação dos princípios invariantes. In: CASTRO FILHO, J. A.; BARRETO, M. C.; BARGUIL, P. M.; MAIA, D. L.; PINHEIRO, J. L. (Org.) **Matemática, cultura e tecnologia**: perspectivas internacionais. Curituba: CRV, 2016, v. 1, p. 35-47.

VERGNAUD, G. Multiplicative structures. In: LESH, R.; LANDAU, M. (Orgs.). **Acquisition of mathematics***:* concepts and processes. New York: Academic Press, 1983.

VERGNAUD, G. Multiplicative structures. In: HIEBERT, J..; BEHR, M. (Orgs.). **Numbers concepts and operations in the middle grades**. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum, 1998.

VERGNAUD, G. **A matemática, a criança e a realidade:** problemas de ensino da matemática na escola elementar (M. L. F. Moro, Trad.). Curitiba: Ed. da UFPR, 2009.